OTÁZKY A PŘÍKLADY KE ZKOUŠCE Z A.K.K.

1. Od lineárních kódů ke konvolučním a zpět

1.1. Zaveďte pojem konvoluční kód a generující matice konvolučního kódu.

1.2. Rozhodněte, které z matic (a) $G = \begin{pmatrix} 1+2D & D+D^2 \\ D & 2D^2 \end{pmatrix}$,

(b) $G = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D+D^2 & 2D \end{pmatrix}$, (c) $G = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D+D^2 & 2D & 2+D^2 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{F}_3(D)$ jsou generující matice konvolučního kódu a u těch, které jsou, určete stupeň kódu.

1.3. Vysvětlete pojmy stupeň a Forneyho indexy konvolučního kódu a určete stupeň a Forneyho indexy kódů nad tělesem $\mathbb{F}_2$ s generující maticí

(a) $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+D} & D \\ D & D^2 \end{pmatrix}$,

(b) $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+D^2} & \frac{1}{1+D} \end{pmatrix}$,

1.4. Vysvětlete pojmy stupeň a Forneyho indexy konvolučního kódu a dokažte tvrzení, které říká, že jsou Forneyho index dobře definované.

2. Konvoluční kódovač

2.1. Zformulujte, vysvětlete pojmy a dokažte tvrzení o vztahu abstraktního a fyzického konvolučního kódovače.

2.2. Pro abstraktní konvoluční kódovač nad tělesem $\mathbb{F}_2$ daný přechodovou funkcí $\delta(s,u) = sP + uQ$ a výstupní funkcí $\lambda(s,u) = sR + uS$ popište realizaci odpovídajícího fyzického konvolučního kódovače obvodem, jestliže

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Pro abstraktní konvoluční kódovač nad tělesem $\mathbb{F}_3$ daný přechodovou funkcí $\delta(s,u) = sP + uQ$ a výstupní funkcí $\lambda(s,u) = sR + uS$ najděte generující matici G odpovídajícího fyzického konvolučního kódovače, jestliže

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. Pro fyzický konvoluční kódovač nad tělesem $\mathbb{F}_2$ najděte jeho popis jako abstraktní konvoluční kódovač, má-li generující maticí $G = \begin{pmatrix} 1+D & D+D^2 & 1 \\ D & 1+D^2 & 1+D \end{pmatrix}$.

2.5. Pro fyzický konvoluční kódovač nad tělesem $\mathbb{F}_2$ určete vnější stupeň $\operatorname{extdeg} G$ a spočítejte jeho popis jako abstraktního konvolučního kódovače, má-li generující maticí $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+D} & \frac{D}{1+D^2} \end{pmatrix}$.

2.6. Pro fyzický konvoluční kódovač nad tělesem $\mathbb{F}_3$ s generující maticí $G = \begin{pmatrix} \frac{1+2D}{2+D+D^2} \end{pmatrix}$ najděte jeho realizaci obvodem a spočítejte jeho popis jako abstraktní konvoluční kódovač.

3. Smithova normální forma.

3.1. Vysvětlete pojmy a vyslovte a dokažte tvrzení o existence a jednoznačnost Smithovy normální formy polynomiální matice.

3.2. Najděte Smithův rozklad matice $G = \begin{pmatrix} 1+D & D+D^3 \\ 1+D^2 & 1+D \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{F}_2$.

3.3. Najděte Smithovu normální formu matice $G = \begin{pmatrix} D^2 & 1+D^3 & D^2+D^3 \\ D+D^2 & D+D^2 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{F}_2$.

4. Polynomiální generující matice

4.1. Vysvětlete pojmy a vyslovte a dokažte tvrzení, které charakterizuje kanonické generující matice pomocí stupně generovaného konvolučního kódu.

4.2. Vyslovte aspoň čtyři ekvivalentní podmínky popisující základní matice (jedna z podmínek může být definice).

4.3. Vyslovte aspoň tři ekvivalentní podmínky popisující redukované matice (jedna z podmínek může být definice).

4.4. Pro matici $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & D^2+D^3 & D \end{pmatrix}$ nad oborem $\mathbb{F}_2[D]$ spočítejte $\operatorname{extdeg}(G)$ a $\operatorname{intdeg}(G)$ a rozhodněte, zda je základní.

4.5. Pro matici $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & D \\ 0 & 1+D^4 & 1+D^2 \end{pmatrix}$ nad oborem $\mathbb{F}_2[D]$ spočítejte $\operatorname{extdeg}(G)$ a $\operatorname{intdeg}(G)$ a rozhodněte, zda je redukovaná.

4.6. Pro konvoluční kód nad tělesem $\mathbb{F}_2$ s generující maticí $G = \begin{pmatrix} 1+D & 1+D^2 & 0 \\ 1 & 1+D & D \end{pmatrix}$ najděte jeho kanonickou generující matici.

6. Prostor abstraktních stavů

6.1. Zaveďte pojmy prostor abstraktních stavů kódovače a prostor abstraktních stavů kódu a vyslovte tvrzení o tom, v jakém jsou tyto prostory vztahu a jak souvisí s dimenzí nějaké abstraktní realizace konvolučního kódovače.

6.2. Vyslovte a dokažte Větu o stavovém prostoru, tj. tvrzení o vztahu dimenze stavového prostoru kódu a stupně kódu.

6.3. Pro kód $\mathcal{C}$ nad $\mathbb{F}_2$ s generující maticí $G = \begin{pmatrix} 1+D+D^2 & D \\ \frac{D^2}{1+D} & \frac{D}{1+D} \end{pmatrix}$ najděte jeho kanonickou generující matici a určete jeho minimální abstraktní konvoluční kódovač.

6.4. Pro konvoluční kód daný abstraktním konvolučním kódovačem nad tělesem $\mathbb{F}_2$ s přechodovou funkcí $\delta(s,u) = sP+uQ$ a výstupní funkcí $\lambda(s,u) = sR+uS$ najděte jeho minimální fyzický konvoluční kódovač (tj. kanonickou generující matici kódu $\mathcal{C}$), jestliže

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.5. Pro konvoluční kód daný abstraktním konvolučním kódovačem nad tělesem $\mathbb{F}_3$ s přechodovou funkcí $\delta(s,u) = sP + uQ$ a výstupní funkcí $\lambda(s,u) = sR + uS$ najděte jeho minimální abstraktní konvoluční kódovač (tj. se stavovým prostorem dimenze rovné stupni kódu $\mathcal{C}$), jestliže

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Regulární jazyky a konečné automaty

7.1. Definujte pojmy regulární jazyk a racionální množina a vyslovte tvrzení vysvětlující vztah mezi nimi.

7.2. Vysvětlete pojem konečný automat a jazyk přijímaný automatem. Co znamená, že jsou jazyky ekvivalentní?

7.3. Vyslovte a dokažte Kleeneovu větu o jazycích přijímaných konečnými automaty.

7.4. Ověřte, že je jazyk $L = \{a^{2k}bc^n \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ regulární a najděte regulární výraz, který jazyk určuje.

7.5. Ověřte, že je jazyk $L = \{a^k b^n c \mid k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ regulární a najděte konečný automat, který ho přijímá.

7.6. Typ úlohy: Pro konkrétní úplný deterministický konečný automat zadaný grafem (tj. obrázkem relace δ) rozhodněte, zda přijímá dané konkrétní slovo.

8. Syntaktický monoid a minimální automat

8.1. Zaveďte pojmy syntaktická kongruence, syntaktický monoid a Myhill-Nerodova ekvivalence. V jakém vztahu jsou indexy syntaktické kongruence a Myhill-Nerodova ekvivalence?

8.2. Zkonstruujte minimální automat jazyka. Kdy se jedná o úplný deterministický automat a v jakém smyslu je v takovém případě minimální?

8.3. Vyslovte a dokažte tvrzení o vztahu syntaktického monoidu monoid transformací automatu. Jako důsledek charakterizujte regulární jazyky pomocí syntaktického monoidu.

9. Konečné překladače

9.1. Zaveďte pojem konečného překladače $\mathcal{T}$, vysvětlete, co znamená vzor $\mathcal{T}^{-1}(L)$ a obraz $\mathcal{T}(L)$ jazyka L a vyslovte tvrzení o vzoru a obrazu regulárního jazyka.

9.2. Dokažte tvrzení, že konečný překladač $\mathcal{T}$ zachovává regularitu obrazu jazyka.

9.3. Zaveďte pojem konečného překladače $\mathcal{T}$, vysvětlete, co je jeho graf a ověřte, že je abstraktní konvoluční kódovač konečným překladačem.

9.4. Nakreslete (multi)graf konečného překladače daného nějakým abstraktním konvolučním kódovačem nad tělesem $\mathbb{F}_2$ daným generující maticí $\begin{pmatrix} D & 1 & 1+D \end{pmatrix}$.

10. Viterbiho dekódovací algoritmus

10.1. Zaveďte pojem mřížoví konečného překladače a abstraktního konvolučního kódovače? Co je vrstva mřížoví?

10.2. Vyslovte Viterbiho algoritmus pro ohodnocení mřížoví μ.

10.3. Vysvětlete pojmy MAP a ML dekódování pro kanál bez paměti. Co je Viterbiho metrika? Vyslovte a dokažte tvrzení o dekódování pomocí Viterbiho algoritmu.

10.4. Typ úlohy: Pro abstraktní konvolučního kódovač dekódujte přijaté slovo Viterbiho algoritmem.