PÍSEMKY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY 2

Úloha 1 (8.3.). Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Spočítejte $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, a najděte ortonormální báze podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé a) na $\mathbf{u}$ a b) na $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

(9.3.): Mějme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Spočítejte $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, a najděte ortogonální bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^4$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

Řešení.

(8.3):

Vypočítáme nejprve podle definice normy a skalární součin:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6},$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 3.$$

Označíme-li φ úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, snadno spočítáme hodnotu

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

a tudíž $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

a) Hledáme nejprve ortogonální bázi množiny všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $(1, 2, 1)$. Nejprve najdeme jeden nenulový kolmý vektor, například $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ a poté řešíme homogenní soustavu rovnic s maticí $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$). Ortogonální bazí je posloupnost ($\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$), kterou ještě normalizujeme, abychom dostali hledanou ortonormální bázi ($\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$).

b) Nyní stačí najít normalizované řešení soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}^T\\\mathbf{v}^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\0 & -3 & -3\end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hledanou jednoprvkovou bázi tvoří vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

(9.3):
Vypočítáme nejprve podle definice normy a skalární součin:

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+2^2} = \sqrt{7}, \quad \| \mathbf{v} \| = \sqrt{2^2+3^2+0^2+1^2} = \sqrt{14},$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 - 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 7.$$

Označíme-li φ úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, okamžitě dostáváme hodnotu

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a proto $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Dále nejprve hledáme jedno nenulové řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{v}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Například nalezený vektor $(3,-2,1,0)^T$ přidáme jako řádkový vektor do matice soustavy, již upravíme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zbývá dopočítat, že ortogonální bází je například posloupnost $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

□

Úloha 2 (15.3)**.** : Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jeho podprostor $U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Najděte ortogonální projekci vektoru $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ do podprostoru U a do ortogonálního doplňku podprostoru U.

(16.3): Uvažujme standardní skalární součin na reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ a posloupnost vektorů:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Ověřte, že $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^4$, spočítejte souřadnice $[\mathbf{c}]_B$, a určete ortogonální projekci vektoru $\mathbf{c}$, do podprostoru $U = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$.

Řešení.

(15.3): Hledáme vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, pro které platí $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$.

Označme nejprve $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Hledáme takové skaláry $x, y \in \mathbb{R}$, aby byla lineární kombinace $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - x\,\mathbf{u}_1 - y\,\mathbf{v}_2$ kolmá na oba vektory $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$, což vede k soustavě rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 11 & 33 \end{array}\right).$$

Vidíme že $y = 3$ a $x = -2$, proto $\mathbf{u} = -2\,\mathbf{u}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 = -\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(16.3):

Nejprve přímočaře spočteme

$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i = \frac{4 \cdot 1^2}{2 \cdot 2} = 1$ pro všechna i a

$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \frac{1+1-1-1}{2 \cdot 2} = 0$ pro všechna $i < j$,

tedy B je ortonormální posloupnost, a tudíž i báze $\mathbb{R}^4$. Dále spočítáme Fourierovy koeficienty vektoru $\mathbf{c}$ vzhledem k bázi B:

$$[\mathbf{c}]_B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b}_4 \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá určit ortogonální projekci pomocí druhé a třetí složky souřadnicového vektorů jako

$$\mathbf{u} = -2 \cdot \mathbf{b}_2 - 1 \cdot \mathbf{b}_3 = -\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 3 (22.3)**.** Najděte ortonormální bázi podprostoru $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ lineárního prostoru $\mathbb{R}^4$ standardním skalárním součinem.

(23.3) Pro reálnou matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ najděte metodou nejmenších čtverců přibližné řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{v}$.

Řešení.
(22.3):
Nejprve najdeme bázi U, snadno nahlédneme, že posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze, z níž ortonormální bázi vytvoříme pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace:

1. Protože $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}$, je $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Dále spočítáme skalární součin $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \sqrt{3}$ a použijeme druhý krok algoritmu $\mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, neboť $\|\mathbf{v}_2'\| = \sqrt{3}$.
3. Nyní nejprve spočítáme skalární součiny $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \sqrt{3}$ a $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ a poté zjistíme, že $\mathbf{v}_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, a proto $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Našli jsme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ prostoru U.

(23.3):
Nejprve spočítáme Grammovu matici nové soustavy

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{A} | \mathbf{A}^*\,\mathbf{v}) = \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 31 \\ 8 & 6 & 20 \end{array}\right)$$

a tu nyní obvyklým postupem vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 31 \\ 8 & 6 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 9 \\ 8 & 6 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 9 \\ 0 & -26 & -52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

Zjistili jsme, že hledané přibližné řešení je právě $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. □

Úloha 4 (29.3)**.** Pro soustavy rovnic $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 14 \end{array}\right)$ spočítejte řešení s nejmenší normou.

(30.3) Najděte QR rozklad reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení.
(29.3)
Označíme-li $\mathbf{A}$ matici levých stran a $\mathbf{b}$ vektor pravých stran naší soustavy, potřebujeme nejprve obvyklou cestou vyřešit soustavu $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 12 & 24 \end{array}\right) \sim$$

Snadno dopočítáme, že soustavu $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{b}$ řeší vektor $(1, -1, 2)^T$, proto hledané řešení soustavy $\mathbf{A} = \mathbf{b}$ s nejmenší normou tvoří právě vektor

$$\mathbf{A}^T(1, -1, 2)^T = (4, 3, 3, 0)^T.$$

(30.3)
Označíme-li si $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ sloupce matice $\mathbf{A}$, pak potřebujeme vytvořit Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací ortonormální bázi ($\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$). Hledané matice rozkladu bude tvořit matice $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3)$ a horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{R} = (r_{ij})$, kterou určí údaje získané Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací $r_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{a}_j$ pro $i < j$ a $r_{ii} = \|\mathbf{q}'_i\|$. Tedy počítáme:

1. $r_{11} = \|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{6}$ a $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Dále spočítáme $r_{12} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{4}{\sqrt{6}}$ a použijeme druhý krok algoritmu $\mathbf{q}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, tedy $r_{22} = \|\mathbf{q}'_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Konečně $r_{13} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{10}{\sqrt{6}}$ a $r_{23} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a tudíž dostáváme $\mathbf{q}'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a dále $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, neboť $r_{33} = \|\mathbf{q}'_3\| = \sqrt{2}$

Spočítali jsme, že $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ pro $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{10}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

□

Úloha 5 (5.4.)**.** Spočítejte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory lineárního operátoru φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2 a najděte bázi B a matici $[\varphi]_B$, aby byla $[\varphi]_B$ diagonální.
(6.4)
Spočítejte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory lineárního operátoru φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2 a najděte bázi B a matici $[\varphi]_B$, aby byla $[\varphi]_B$ diagonální.

Řešení.
(5.4.)
Abychom našli vlastní čísla lineárního operátoru φ, spočítáme nejprve charakteristický polynom jeho matice

$$\det([\varphi]_{K_2} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda - 21 = (\lambda - 3)(\lambda - 7),$$

Vlastní čísla matice $[\varphi]_{K_2}$ jsou kořeny charakteristického polynomu, tedy

$$\lambda \in \{3, 7\}.$$

Nyní dosadíme do matice $[\varphi]_{K_2} - \lambda \mathbf{I}_2$ nalezená vlastní čísla a řešíme homogenních soustav rovnic s maticemi, která tvoří právě souřadnicové vektory vlastních vektorů operátoru φ:

$$[\varphi]_{K_2} - 3 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]_{K_2} - 7 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obvyklým způsobem soustavy vyřešíme a spočítáme tak množinu všech vlastních vektorů

$$\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

Protože z vlastních vektorů můžeme sestavit bázi $B = (\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$, dostáváme přímočaře matici $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi B.

(6.4.)
Abychom našli vlastní čísla lineárního operátoru φ, spočítáme nejprve charakteristický polynom jeho matice

$$\det([\varphi]_{K_2} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda + 1)(\lambda - 7).$$

Vlastní čísla matice $[\varphi]_{K_2}$ jsou kořeny charakteristického polynomu, tedy

$$\lambda \in \{-1, 7\}.$$

Nyní dosadíme do matice $[\varphi]_{K_2} - \lambda \mathbf{I}_2$ nalezená vlastní čísla a řešíme homogenních soustav rovnic s maticemi, která tvoří právě souřadnicové vektory vlastních vektorů operátoru φ:

$$[\varphi]_{K_2} + 1 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]_{K_2} - 7 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Snadno najdeme všechna řešení obou soustav, která jsou právě množinou

$$\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

všech vlastních vektorů φ. Protože z vlastních vektorů můžeme sestavit bázi $B = (\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$, dostáváme přímočaře odpověď na druhou otázku, protože $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi B. □

Úloha 6 (12.4.). Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, dokažte, že je diagonalizovatelná, najděte regulární matici $\mathbf{P}$, pro kterou je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ diagonální a spočítejte $\mathbf{A}^{111}$ a $\mathbf{A}^{222}$.

(13.4) Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, ověřte, že je diagonalizovatelná, najděte regulární matici $\mathbf{P}$, pro kterou je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ diagonální a spočítejte $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ a $\mathbf{A}^{1001}$.

Řešení.
(12.4)

Nejprve buď pomocí charakteristického polynomu $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3)$ nebo přímým dosazením za λ do parametrické matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3$ najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$, jimiž jsou hodnoty 1 a 2 a zároveň spočítáme vlastní vektory jako jádra matic $\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_3$ a $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3$:

$$\mathrm{Ker}\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_3 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Ker}\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

Vidíme, že geometrická násobnost vlastního čísla 1 je 1 a geometrická násobnost vlastního čísla 2 je 2, tedy součet geometrických násobností všech vlastních čísel je roven stupni matice $\mathbf{A}$, z čehož plyne, že je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná a hledanou matici regulární matici $\mathbf{P}$ dostaneme jako matici přechodu od kanonické báze k bázi složené z vlastních vektorů. Proto například

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ přičemž máme } \mathbf{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}.$$

Uvědomíme-li si, že $\mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^1$ a že $2^{2k} = 1$ a $2^{2k+1} = 2$ pro každé přirozené k, dostáváme, že

$$\mathbf{A}^{111} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 1^{111} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{111} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{111} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{222} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 1^{222} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{222} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{222} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PI}_3\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(13.4)

Nejprve najdeme vlastní čísla matice, například tak, že spočítáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)\lambda.$$

tedy vidíme, že máme tři různá vlastní čísla $\lambda \in \{0, 1, 2\}$, což znamená, že je matice $\mathbf{A}$ už nutně diagonalizovatelná. Pro nalezení matice $\mathbf{P}$, potřebujeme najít bázi složenou z vlastních vektorů. Postupně tedy řešíme homogenní soustavy rovnic s maticemi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - 1\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešením je množina všech vlastních vektorů $\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, z níž snadno vybereme bázi $B = (\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$. Nyní je hledaná matice $\mathbf{P}$ matice přechodu od kanonické báze k bázi B, proto

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{a proto máme } \mathbf{D} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}.$$

Konečně uvědomíme-li si, že $\mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^1$ a že $2^4 = 1$ a tudíž $2^{1001} = (2^4)^{250} \cdot 2 = 2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, dostáváme, že

$$\mathbf{A}^{1001} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 0^{1001} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1001} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1001} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 7 (19.4.)**.** Najděte vzorec pro n-tý člen reálné posloupnosti a_n, jestliže

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.$$

(20.4) Vyřešte diskrétní lineární dynamický systém $\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n$ nad $\mathbb{R}^2$s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Řešení.
(19.4)
Nejprve si uvědomíme, že rekurentní vztah můžeme vyjádřit pomocí maticového násobení:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Nyní potřebujeme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalizovat. Snadno najdeme její charakteristický polynom $\lambda^2 - \lambda - 2$, poté vlastní čísla $-1, 2$ a regulární matici $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ s vlastními vektory ve sloupcích, pro níž máme rovnost

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

Tedy $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Obvyklým způsobem určíme součin $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

Nyní zbývá dopočítat $a_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \frac{5 \cdot (-1)^n + 7 \cdot 2^n}{3}$.

(20.4)
Nejprve diagonalizujeme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Snadno spočítáme její charakteristický polynom $(\lambda+2)(\lambda-2)$, vlastní čísla $-2, 2$ a regulární matici $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ s vlastními vektory ve sloupcích, pro níž platí

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

Dále spočítáme $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$ jako řešení soustavy rovnic s maticí

$$(\mathbf{P}|\mathbf{x}_0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

proto $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Nyní už snadno dopočítáme

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\begin{pmatrix}(-2)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix}(-2)^n + 2^n\\ -3(-2)^n + 2^n\end{pmatrix} = 3\cdot 2^{n-1}\begin{pmatrix}(-1)^n + 1\\ 3(-1)^{n-1} + 1\end{pmatrix}. \qquad \square$$

Úloha 8 (26.4.)**.** Najděte pro komplexní matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ Jordanův kanonický tvar, spočítejte regulární komplexní matici $\mathbf{P}$, aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ byla Jordanova, součin $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ určete a rozhodněte, zda jsou podobné matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^T$.

(27.4.) Najděte Jordanův kanonický tvar komplexní matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, určete regulární komplexní matici $\mathbf{P}$, aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ byla Jordanova a rozhodněte, zda jsou podobné matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{-1}$.

Řešení.
(26.4.)
Nejprve spočítáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ a zjistíme, že

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2.$$

Protože je navíc hodnost matice $\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_2$ rovna 1, má vlastní číslo 5 algebraickou násobnost 2 a geometrickou násobnost 1. To nutně znamená, že Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$ má na diagonále vlastní číslo 5 geometrické násobnosti 1, tedy Jordanův kanonický tvar představuje právě matice $\mathbf{J} = \begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

Nyní nejprve hledáme vlastní vektor matice $\mathbf{A}$, jímž je například $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, který řeší homogenní soustavu s maticí $\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ a poté počítáme nehomogenní soustavu rovnic s maticí $\left(\begin{array}{cc|c}-2 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{array}\right)$, kterou řeší například vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$. Spočítali jsme Jordanův řetízek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, proto je hledaná matice například tvaru $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]^{(\mathbf{v}_i)}_{K_2} = \begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Ze způsobu, jak jsme matici $\mathbf{P}$ získali, okamžitě plyne rovnost $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

Konečně matice $\mathbf{A}^T$ má stejné vlastní číslo 5 algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1, což znamená, že matice $\mathbf{A}^T$ podobná téže Jordanově matici jako $\mathbf{A}$, a tudíž jsou $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^T$ matice podobné.

(27.4.)
Spočítáme-li charakteristický polynom $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ matice $\mathbf{B}$, vidíme, že 1 je jediné vlastní číslo $\mathbf{A}$ algebraické násobnosti 2. Protože

matice $\mathbf{B}$ není diagonální, jedná se o vlastní číslo geometrické násobnosti 1. To znamená, že Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$ má na diagonále vlastní číslo 1 geometrické násobnosti 1, a proto je jím právě matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nyní nejprve hledáme vlastní vektor matice, který řeší homogenní soustavu s maticí $\mathbf{B} - 1\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B}$, jímž je například $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, a poté počítáme nehomogenní soustavu rovnic s maticí $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$. Druhý hledaný bazický vektor je tudíž například vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Spočítali jsme Jordanův řetízek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, proto je hledaná matice například tvaru $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{K_2}^{(\mathbf{v}_i)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Na závěr si uvědomíme, že matice $\mathbf{A}^{-1}$ má vlastní číslo $1^{-1} = 1$ algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1, což znamená, že je Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}^{-1}$ rovněž matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, proto jsou $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{-1}$ podobné. □

Úloha 9 (10.5.). Buď f bilineární forma

$$f((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) = x_1y_2 + 3x_1y_3 + 6x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_3$$

na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$. Určete matice f, f_s a f_a vzhledem ke kanonické bázi a k bázi $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix})$, kde f_s je symetrická a f_a antisymetrická bilineární forma, pro něž $f = f_s + f_a$.

(11.5.): Uvažujme lineární operátor $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte takovou ortonormální bázi B, aby byla matice $[\varphi]_B^B$ diagonální a tuto matici najděte.

Řešení.
(10.5.)
Nejprve seřadíme koeficienty polynomu určujícího analytické vyjádření bilineární formy do matice vzhledem ke kanonické bázi $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dále snadno určíme matici přechodu $[\mathrm{Id}]_{K_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ a poté spočítáme matici f vzhledem k bázi B díky vztahu: $[f]_B = ([\mathrm{Id}]_{K_3}^B)^T \cdot [f]_{K_3} \cdot [\mathrm{Id}]_{K_3}^B =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme matice symetrické a antisymetrické části:

$$[f_s]_{K_3} = \frac{1}{2}([f]_{K_3} + [f]_{K_3}^T) = 4(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_{K_3} = [f]_{K_3} - [f_s]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[f_s]_B = \frac{1}{2}([f]_{K_3} + [f]_{K_3}^T) = 4(\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_B = [f]_B - [f_s]_B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(11.5.)

Nejprve určíme matici $[\varphi]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, pro níž snadno najdeme vlastní čísla 0 a -3. Nejprve najdeme normovaný vlastní vektor $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ příslušný vlastnímu číslu 0. Podprostor vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu -3, tedy prostor Ker $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je zřejmě dvoudimenzionální, budeme tedy hledat dva kolmé normované vlastní vektory. Nejprve snadno najdeme jeden, například vektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a poté druhý, například $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ jako řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Našli jsme ortonormální bázi

$$B = (\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}),$$

pro níž $[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ □

Úloha 10 (17.5.). Najděte nějakou f-ortogonální bázi B kvadratické formy f_2 na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ s analytickým vyjádřením $f_2(x_1, x_2, x_3)^T = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2^2 + x_2x_3$ vzhledem ke kanonické bázi a určete $[f]_B$.

(18.5.) Je-li f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ s maticí vzhledem ke kanonické bázi $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Určete analytické vyjádření f, f_s a f_a vzhledem ke kanonické bázi a matice bilineárních forem f, f_s a f_a vzhledem k bázi $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, jestliže je f_s symetrická a f_a antisymetrická bilineární forma, pro něž $f = f_s + f_a$.

Řešení.
(17.5.)

Nejprve určíme matici příslušné symetrické bilineární formy $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ symetrické bilineární formy f, která vytváří kvadratickou formu f_2 vzhledem ke kanonické bázi a dále postupujeme pomocí symetrických úprav

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

V řádcích pravé strany upravené matice vidíme, že ortogonální bázi f tvoří například vektory $(1,0,0)^T, (3,1,0)^T, (0,3,1)^T$ a z levé strany matice dostáváme $[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(18.5.)
Nejprve spočítáme matice symetrické a antisymetrické části f:

$$[f_s]_{K_3} = \frac{1}{2}([f]_{K_3} + [f]_{K_3}^T) = 3(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_{K_3} = [f]_{K_3} - [f_s]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní seřadíme koeficienty matic do polynomu určujících analytická vyjádření vzhledem ke kanonické bázi pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$:

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_1y_3 + 4x_2y_2 + 3x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_3,$$

$$f_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 4x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 + x_3y_3,$$

$$f_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 4x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 3x_3y_1 + 4x_2y_3 + x_3y_2,$$

Nyní pomocí matice přechodu $[\mathrm{Id}]_{K_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ spočítáme matici f vzhledem k bázi B: $[f]_B = ([\mathrm{Id}]_{K_3}^B)^T \cdot [f]_{K_3} \cdot [\mathrm{Id}]_{K_3}^B =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme matice symetrické a antisymetrické části:

$$[f_s]_B = \frac{1}{2}([f]_{K_3} + [f]_{K_3}^T) = 3(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_B = [f]_B - [f_s]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□