5. Lineární prostory a lineární nezávislost

5.1. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů X aritmetického vektorového prostoru T^n nad nad tělesem T lineárně závislá či nezávislá, jestliže

(a) $X = ((1,0,2,1)^T,\ (2,0,1,1)^T,\ (1,0,1,-1)^T)$, $n = 4$ a $T = \mathbb{Q}$,
(b) $X = ((1,1,2)^T,\ (2,0,1)^T,\ (2,1,1)^T)$, $n = 3$ a $T = \mathbb{Z}_3$,
(c) $U = ((1,1)^T, (1,0)^T, (3,4)^T)$ pro $T = \mathbb{Z}_7$.

(a) Stačí zjistit, zda existuje (a v takovém případě půjde o lineárně závislé vektory) či neexistuje (což by znamenalo, že dané vektory by byly lineárně nezávislé) netriviální řešení vektorové rovnice

$$x_1 \cdot (1,0,2,1)^T + x_2 \cdot (2,0,1,1)^T + x_3 \cdot (1,0,1,-1)^T = (0,0,0,0)$$

Úlohu převedeme na otázku, zda existuje jednoznačné (tedy pouze triviální) řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z upravené soustavy dostáváme jednoznačné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, tedy vektory $(1,0,2,1)^T$, $(2,0,1,1)^T$, $(1,0,1,-1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

(b) stejně jako v (a) se ptáme, jakou má hodnost hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Protože $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vidíme, že má tato matice hodnost 2, tedy existuje netriviální řešení homogenní soustavy s touto maticí, a proto je posloupnost vektorů lineárně nezávislá.

(c) Tentokrát nemusíme nic počítat, protože hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ určitě nemůže být 3 (na to má málo řádků), tudíž existuje netriviální řešení homogenní soustavy s takovou maticí a posloupnost vektorů je lineárně závislá. $\square$

5.2. Najděte nějakou bázi podprostoru U aritmetického vektorového prostoru T^4 nad nad tělesem T, jestliže

(a) $U = \{(0,0,0,0)^T\}$ pro libovolné těleso T,
(b) $U = T^4$ pro libovolné těleso T,
(c) $U = \langle (1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T \rangle$ pro $T = \mathbf{Q}$,
(d) $U = \langle (2,1,1,1)^T, (4,2,1,3)^T, (3,4,3,0)^T,\ (1,3,4,2)^T \rangle$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,
(e) $U = \langle (2,0,3,4)^T, (3,3,1,2)^T, (3,1,1,2)^T \rangle$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,
(f) $U = \langle (1,1,3,6)^T, (5,5,1,0)^T, (3,3,2,6)^T \rangle$ pro $T = \mathbb{Z}_7$.

(a) Protože podprostor $\{(0,0,0,0)^T\}$ generuje prázdná posloupnost, je právě prázdná posloupnost $\emptyset$ báze U.

(b) Snadno nahlédneme, že bázi celého aritmetického vektorového prostoru T^4 tvoří například kanonická báze, tedy posloupnost sloupcových vektorů obsažených ve sloupcích jednotkové matice.

(c) Protože množina $X = \{(1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T\}$ podle definice generuje U a v předchozím příkladu jsme dokázali, že jde o lineárně nezávislou množinu aritmetických vektorů, tvoří množina X bázi U.

(d) Seřadíme si vektory generující podprostor U do řádků matice, již upravíme na odstupňovanou, a využijeme Tvrzení 5.27 a 5.37 z přednášky, která nám říkají, že nenulové řádky matice tvoří lineárně nezávislou generující množinu vektorů:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že posloupnost $((1,3,4,2)^T, (0,0,3,2)^T)$ je báze podprostoru U. Závěrem poznamenejme, že $U = \mathrm{Im}\mathbf{A}$.

(e) Stejně jako v (d) si podprostor U vyjádříme jako řádkový vektorový prostor jisté matice $\mathbf{B}$, kterou upravíme na odstupňovaný tvar:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tedy například posloupnost $((2,0,3,4)^T, (0,3,4,1)^T, (0,0,1,4)^T)$ tvoří bázi podprostoru $U = \mathrm{Im}\mathbf{B}$.

(f) Opět upravujme matici do jejíž řádku jsme sepsali generující vektory podprostoru U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že bázi U tvoří například posloupnost $((1,1,3,6)^T, (0,0,0,5)^T)$. □

5.3. Spočítejte dimenzi podprostorů z předchozí úlohy.

Podle definice stačí spočítat počty vektorů báze, kterou jsme našli v předchozím příkladu:

(a) $\dim U = 0$,
(b) $\dim U = 4$,
(c) $\dim U = 3$,
(d) $\dim U = 2$,
(e) $\dim U = 3$,
(f) $\dim U = 2$.

□

5.4. Dokažte, že množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ tvoří s obvyklým sčítáním a násobením vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$.

Je třeba zcela přímočaře ověřit platnost axiomatiky vektorového prostoru. Přitom víme, že $\mathbf{C}$ je se sčítáním a násobením těleso, odkud okamžitě dostáváme asociativitu a komutativitu sčítání, stejně jako existenci nulového vektoru (0). Protože $r(c+d) = rc + rd$ pro všechna komplexní r, c, d platí tato rovnost i v případě, že zvolíme $r \in \mathbf{R}$. Stejný argument ukazuje, že pro každé $r, s \in \mathbf{R}$ a $c \in \mathbf{C}$ máme $(r+s)c = rc + sc$ a $(rs)c = r(sc)$. Konečně zřejmě $1c = c$. □

5.5. Najděte nějakou bázi a určete dimenzi $\mathbb{C}$ jako vektorového prostoru nad tělesem $\mathbb{R}$.

Protože $\mathbb{C} = \{a + bi|\ a, b \in \mathbb{R}\}$, okamžitě vidíme, že posloupnost $1, i$ generuje $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. Předpokládáme-li, že $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$ pro nějaká reálná $a, b \in \mathbb{R}$, pak nutně $a = b = 0$, čímž jsme ověřili, že $1, i$ je báze $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, tedy $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. □

5.6. Rozhodněte, zda dvojice komplexních čísel $3 - i$, $2 + 3i$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

Díky tomu, že jsme v předchozím příkladu spočítali, že $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbb{C}) = 2$, stačí zjistit, zda je dvojice $3 - i$, $2 + 3i$ lineárně nezávislá nebo generující, zbývající vlastnost je totiž podle Věty 2.19 důsledkem každé z nich. Ukážeme například, že jde o lineárně nezávislou množinu. Jestliže $0 = a(3 - i) + b(2 + 3i) = (3a + 2b) + (-a + 3b)i$, tedy z reálné i imaginární části dostáváme jednu rovnici:
$\begin{array}{rcrl} 3a & + & 2b & = 0 \\ -a & + & 3b & = 0 \end{array}$ a řešíme homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, která má zjevně hodnost 2, tedy pouze triviální řešení.

Tím jsme dokázali, že je dvojice $3 - i$, $2 + 3i$ lineárně nezávislá, tedy jde o bázi $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. □

5.7. Vyberte z posloupností $X = ((2, 1, 1, 1)^T, (4, 2, 1, 3)^T, (3, 4, 3, 0)^T, (1, 3, 4, 2)^T)$, resp. $Y = ((2, 0, 3, 4)^T, (1, 3, 1, 2)^T, (1, 0, 1, 2)^T)$ báze podprostorů $\mathbf{U} = \langle X \rangle$, resp. $\mathbf{V} = \langle Y \rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^4$.

Nejprve si všimněme, že už jsme v Příkladu 5.2(d),(e) báze U i V hledali. Nešlo ovšem o báze vybrané. Využijme tedy spočítaných dimenzi a hledáme dvouprvkovou lineárně nezávislou množinu v $\mathbf{U}$, tedy dvojici vektorů, které nejsou svými násobky, což zřejmě splňuje například dvojice vektorů $(2, 1, 1, 1)^T, (3, 4, 3, 0)^T$ nebo $(3, 4, 3, 0)^T, (1, 3, 4, 2)^T$ a tříprvkovou generující množinu $\mathbf{U}$, jíž je zřejmě celé Y. □

5.8. Vyberte z posloupnosti

$$X = ((2, 4, 0, 1, 4)^T, (4, 3, 0, 2, 3)^T, (1, 2, 3, 4, 0)^T, (3, 1, 1, 1, 2)^T, (4, 3, 4, 0, 2)^T)$$

bázi podprostoru $U = \langle X \rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Potřebujeme si uvědomit, které vektory z daného seznamu jsou lineární kombinací předchozích. Seřadíme si tedy vektory do posloupnosti a budeme zjišťovat, které vektory jsou lineární kombinací předchozích členů posloupnosti. Nejprve si tedy seřadíme vektory do řádků matice, čímž máme dánu posloupnost vektorů, a tu budeme upravovat Gaussovou eliminací dokud nezískáme odstupňovanou matici. Jedná se tedy o posloupnost elementárních úprav, kdy k níže položeným řádkům přičítáme výše položené řádky, případně nelze-li nějakým řádkem upravit níže položené řádky, pak takový vektor) vyměníme z níže položeným vektorem přehazujeme násob tvar. Přitom si řádky původní matice označíme římskými číslicemi a budeme zaznamenávat všechna přehazování řádků a stačí zjistit, kterým řádkům původní matice odpovídají nenulové řádky Gaussovy matice.

Poznamenejme, že je podstatné, abychom neměnili pořadí těch vektorů, pomocí nichž jsme upravovali všechny následující, tj. těch řádků matice, které už jsme použili k eliminaci následujících. Takový řádek už totiž odpovídá vektoru, který je lineárně nezávislý na předchozích a jeho případná záměna za některý z následujících vektorů pro něj samozřejmě podmínku lineární nezávislosti na předchozích řádcích nemusí zachovat. V daném případě nejprve přičteme vhodné násobky prvního řádku k ostatním a poté přehodíme druhý a třetí řádek, jímž stejným způsobem vynulujeme pátý a šestý řádek:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&4&0&1&4&i\\4&3&0&2&3&ii\\1&2&3&4&0&iii\\3&1&1&1&2&iv\\4&3&4&0&2&v\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&4&0&1&4&i\\0&0&0&0&0&ii\\0&0&3&1&3&iii\\0&0&1&2&1&iv\\0&0&4&3&4&v\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&4&0&1&4&i\\0&0&3&1&3&iii\\0&0&0&0&0&ii\\0&0&0&0&0&iv\\0&0&0&0&0&v\end{array}\right).$$

Ukázalo se, že řádek ii je násobkem řádku i a řádky iv a v jsou lineární kombinací řádků i a iii. Naopak řádek iii není lineární kombinací řádku i. Hledanou bázi tvoří například první a třetí vektor posloupnosti X, tedy posloupnost $\left(\begin{pmatrix}2\\4\\0\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\0\end{pmatrix}\right)$. □

5.9. Doplňte lineárně nezávislou množinu $B = \{(2,4,0,1,4)^T, (1,2,1,0,3)^T\}$ na bázi aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^5$.

Připomeňme, že podle Důsledku 5.27 se řádkový vektorový prostor matice nezmění, upravíme-li ji posloupností elementárních řádkových úprav. Seřadíme-li vektory množiny B do řádků matice, kterou upravíme na odstupňovanou matici, vidíme, že

$$\langle B\rangle = \mathrm{Im}(\begin{pmatrix}2&4&0&1&4\\1&2&1&0&3\end{pmatrix})^T = \mathrm{Im}(\begin{pmatrix}2&4&0&1&4\\0&0&1&2&1\end{pmatrix})^T$$

Nyní snadno doplníme matici na odstupňovanou čtvercovou matici, jejíž všechny řádky jsou nenulové, například vektory standardní báze (i-tý přidáme, právě když i-tý sloupec matice není bázový) a přitom si všimneme, že:

$$\begin{pmatrix}2&4&0&1&4\\0&1&0&0&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&4&0&1&4\\0&0&1&2&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&4&0&1&4\\1&2&1&0&3\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{A}.$$

Zřejmě má řádkový prostor matice $\mathbf{A}$ dimenzi 5, proto je roven $\mathbb{Z}_5^5$. Tedy množina $\{(0,1,0,0,0)^T, (0,0,0,1,0)^T, (0,0,0,0,1)^T\}$ doplňuje množinu B na bázi $\mathbb{Z}_5^5$. □

5.10. Rozhodněte, zda vektor a) $(1,1,4)^T$ a b) $(4,1,1)^T$ leží v podprostoru $U = \langle(1,4,3)^T, (3,1,1)^T\rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Ptáme se, zda existují hodnoty $x, y \in \mathbb{Z}_5$, které řeší vektorovou rovnici $x \cdot (1,4,3)^T + y \cdot (3,1,1)^T = \mathbf{v}$, tedy chceme zjistit, zda existuje řešení soustavy 3 rovnic o 2 neznámých (pro každou souřadnici dostáváme jednu rovnici) s maticemi, které snadno upravíme na odstupňovaný tvar.

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\4&1&1\\3&1&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&4&2\\0&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&1&3\\0&0&0\end{array}\right)$$

Vidíme, že hodnost matice homogenní soustavy i matice rozšířené se shodují, tedy podle Frobeniovy věty (5.80) řešení existuje a vektor $(1,1,4)^T$ je lineární kombinací vektorů $(1,4,3)^T$, $(3,1,1)^T$, proto $(1,1,4)^T \in U$.

b)

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{array}\right)$$

Tentokrát soustava zjevně řešení nemá, tedy $(4,1,1)^T \notin U$. $\square$

5.11. Ověřte, že $B = ((1,4,3)^T, (3,1,1)^T)$ je báze podprostoru $U = \langle (1,4,3)^T, (3,1,1)^T \rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a najděte souřadnice vektoru $(1,1,4)^T$ vzhledem k bázi B. $(1,4,3)^T$, $(3,1,1)^T$

Okamžitě z definice vidíme, že posloupnost B je lineárně nezávislá, tedy jde o bázi U. Nyní hledáme hodnoty $x, y \in \mathbb{Z}_5$, které řeší vektorovou rovnici $x \cdot (1,4,3)^T + y \cdot (3,1,1)^T = (1,1,4)^T$, kterou jsme řešili už v minulé úloze. Zbývá tedy zpětnou substitucí dopočítat (jednoznačné) řešení:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Spočítali jsme, že souřadnice $(1,1,4)^T$ vzhledem k bázi B jsou $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. $\square$

5.12. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $M = (\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Q}^3$ nad tělesem $\mathbf{Q}$.

Podle pozorování 5.61 z přednášky stačí ověřit, zda je posloupnost lineárně nezávislá či zda generuje celý prostor $\mathbf{Q}^3$ a to nastává právě tehdy, když je matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ regulární. Budeme tedy matici $\mathbf{A}$ upravovat:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že M je bází $\mathbf{Q}^3$. $\square$

5.13. Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi M z předchozího příkladu, jestliže (a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ (c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$.

Hledáme aritmetický vektor $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, aby $\mathbf{v} = a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, tedy budeme počítat řešení nehomogenní soustavy rovnic:

(a) Pro $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zřejmě $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Tentokrát je vektor $\mathbf{v}$ jedním z bázových vektorů báze M, proto bez počítání vidíme, že $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Nyní obvyklým způsobem spočítáme jednoznačné řešení nehomogenní soustavy s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$. Zjistili jsme, že $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. □

5.14. Najděte nějakou bázi podprostoru $\mathbf{U} = \langle (3,1,4,2)^T, (2,3,5,1)^T, (1,5,6,1)^T \rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a doplňte ji bázi celého prostoru $\mathbb{Z}_7^4$.

I tentokrát můžeme využít Důsledku 5.23 o řádkovém vektorovém prostoru matice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, pro níž platí, že $\mathbf{U} = \mathrm{Im}\mathbf{M}^T$. Nejprve standardní cestou upravíme matici $\mathbf{M}$ na matici odstupňovanou:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{N}.$$

Vidíme, že báze $\mathrm{Im}\mathbf{M}^T = \mathrm{Im}\mathbf{N}^T = \mathbf{U}$ je tvořena například nenulovými řádkovými vektory odstupňované matice $\mathbf{N}$. Tedy $\{(3,1,4,2)^T, (0,0,0,1)^T\}$ je báze $\mathbf{U}$. Nyní už postupujeme stejně jako v předchozí úloze, doplníme nenulové řádky matice $\mathbf{N}$ pomocí vektorů standardní báze, abychom dostali odstupňovanou regulární matici $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tudíž posloupnost $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ doplňuje posloupnost $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ na bázi celého $\mathbb{Z}_7^4$. □

4.12.

5.15. Uvažujme dvě posloupnosti vektorů $M = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $N = (\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix})$ v lineárním prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

(a) Ověřte, že je posloupnost M lineárně nezávislá,
(b) dokažte, že $N \subset \langle M \rangle$,
(c) spočítejte souřadnice vektorů posloupnosti N vzhledem k bázi M,
(d) ověřte, že N tvoří bázi podprostoru $\langle M \rangle$.

(a) Stačí si všimnout, že jeden z vektorů není násobkem druhého, tedy, že má matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ má hodnost 2.

(b) Ptáme se, zda jsou vektory z posloupnosti N lineární kombinací vektorů z posloupnosti M, to znamená, že se ptáme, zda existuje řešení soustav rovnic s maticemi $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$ a $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$. Tuto úlohu můžeme pomocí Frobeniovy věty přeformulovat na otázku, zda jsou hodnosti matic $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$ a $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ stejné, tedy podle (a) rovná dvěma. To zjistíme ovšem standardně Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

protože je hodnost matice 2, platí, že že $N \subset \langle M \rangle$.

(c) Nyní máme najít řešení soustav s maticemi uvedenými v bodě (b). Obě přitom upravujeme stejně, proto počítáme obvyklým způsobem s využitím úprav v (b):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Stejně jako v 5.13 jsme zjistili, že $[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}]_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}]_M = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Stejnou úvahou jako v bodu (a) nahlédneme, že je posloupnost N lineárně nezávislá, proto jde podle (c) o bázi podprostoru $\langle M \rangle$. □

5.16. Ověřte, že $(3-5i, 1-2i)$ tvoří bázi lineárního prostoru komplexních čísel $\mathbb{C}$ nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$.

Protože $K = (1, i)$ je zřejmě báze $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, stačí přejít k souřadnicovým vektorům $[3-5i]_K = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ a $[1-2i]_K = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a u nich obvyklým způsobem nahlédnout, že jde o bázi aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$, tj. všimnout si, že je matice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ regulární. □

5.17. Najděte matice přechodu:

(a) $[\mathrm{id}]^B_{K_2}$ a $[\mathrm{id}]^{K_2}_B$, kde $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$ a K_2 je kanonická báze v lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$

(b) $[\mathrm{id}]^N_M$ a $[\mathrm{id}]^M_N$, kde N a M jsou báze z úlohy 5.15,

(c) $[\mathrm{id}]^M_N$, kde $N = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ k bázi $M = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ jsou báze $\mathbb{Z}_3^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$.

(d) $[\mathrm{id}]^L_K$ a $[\mathrm{id}]^K_L$, kde $K = (1, i)$ a $L = (3-5i, 1-2i)$ jsou báze $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

(a) Postupujeme-li podle definice, vidíme, že souřadnice vektorů vzhledem ke kanonické bázi jsou tytéž vektory a protože matice $[\mathrm{id}]^B_{K_2}$ obsahuje ve sloupcích právě souřadnice vektorů báze B vzhledem ke kanonické bázi, stačí do sloupců přepsat bázi B. Tudíž $[\mathrm{id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Provedeme-li stejnou úvahu jako v Příkladu 5.74 z přednášky, potřebujeme najednou vyřešit dvě soustavy rovnic s maticí levých stran $[\mathrm{id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ a s vektory pravých stran z báze K_2. Tedy postupujeme stejně jako při hledání inverzní matice.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Spočítali jsme, že $[\mathrm{id}]^{K_2}_B = ([\mathrm{id}]^B_{K_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Protože jsme v 5.15(c) našli souřadnice vektorů báze N vzhledem k bázi M, stačí je sepsat do sloupců, abychom dostali $[\mathrm{id}]^N_M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Obdobnou úvahou jako v úloze (a) tentokrát ovšem v souřadnicích zjistíme a obvyklým způsobem spočítáme, že $[\mathrm{id}]^M_N = ([\mathrm{id}]^N_M)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) Postupujeme-li podle definice , potřebujeme vyřešit maticovou rovnici $[\mathrm{id}]^M_{K_2} \cdot \mathbf{X} = [\mathrm{id}]^N_{K_2}$, kde $\mathbf{X}$ je právě hledaná matice přechodu $[\mathrm{id}]^M_N$ Stačí nám tedy známým způsobem spočítat

$$[\mathrm{id}]^M_N = ([\mathrm{id}]^M_{K_2})^{-1} \cdot [\mathrm{id}]_{NK_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) V úloze 5.16 jsme určili souřadnice vektorů báze L vzhledem ke K, proto $[\mathrm{id}]^L_K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$. Nyní zbývá podobně jako v (a) a (b) nahlédnout a dopočítat, že $[\mathrm{id}]^K_L = ([\mathrm{id}]^L_K)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ □

5.18. Určete nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$ hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a matice $\mathbf{A}^T$ a dimenze prostorů $\mathrm{Im}\mathbf{A}$, $\mathrm{Im}\mathbf{A}^T$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}^T$.

Podle Vět 5.82, 5.94 a definice hodnosti stačí spočítat hodnost matice. Upravujme tedy matici posloupností elementárních úprav nejprve nad tělesem $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že nad tělesem $\mathbb{R}$ platí, že $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 3$, a proto

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}^T) = \dim \mathrm{Im}\mathbf{A} = \dim \mathrm{Im}\mathbf{A}^T = 3.$$

Díky 5.94 je potom

$$\mathrm{Ker}\mathbf{A} = 3 - \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 3 - 3 = 0, \mathrm{Ker}\mathbf{A}^T = 3 - \mathrm{rank}(\mathbf{A}^T) = 3 - 3 = 0.$$

Podobně určíme hodnost $\mathbf{A}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}^T) = \dim \mathrm{Im}\mathbf{A} = \dim \mathrm{Im}\mathbf{A}^T = 2$ a $\mathrm{Ker}\mathbf{A} = \mathrm{Ker}\mathbf{A}^T = 3 - \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$. □

5.19. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ báze prostorů $\mathrm{Im}\mathbf{A}$, $\mathrm{Im}\mathbf{A}^T$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}^T$ pro matici $\mathbf{A}$ z předchozí úlohy.

Z odstupňovaného tvaru matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Okamžitě vidíme, že $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ je báze $\mathrm{Im}\mathbf{A}^T$ a snadno spočítáme bazické řešení $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$, tj. bázi $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$. Pro nalezení báze $\mathrm{Ker}\mathbf{A}^T$ řádkově upravíme $\mathbf{A}^T$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zpětnou substitucí najdeme bázi $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ prostoru $\mathrm{Ker}\mathbf{A}^T$. Zároveň vidíme, že báze $\mathrm{Im}\mathbf{A}$ je například $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (nebo kterákoli jiná dvojice lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru). □

11.12.

5.20. Určete dimenzi průniku podprostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ racionálního vektorového prostoru $\mathbf{Q}^3$, je-li $\mathbf{U} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Snadno zjistíme, že $\dim \mathbf{U} = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) = 2$, $\dim \mathbf{V} = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 2$ a $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 3$, proto je díky Větě o dimenzi součtu a průniku podprostorů (5.98) $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = 1$. □

5.21. Jestliže $\mathbf{U} = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix} \rangle$ podprostory lineárního prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, spočítejte dimenze a najděte báze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}+\mathbf{V}$, $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$.

Nejprve snadno zjistíme, že posloupnost $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix})$ je lineárně nezávislá, tudíž báze $\mathbf{U}$ a podobně je posloupnost $C = (\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix})$ lineárně nezávislá, a proto báze $\mathbf{V}$. Protože $3 \leq \dim \mathbf{U}+\mathbf{V} \leq 4$, stačí si všimnout, že vektor $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}$ leží v $\mathbf{U}+\mathbf{V}$. To znamená, že $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ obsahuje čtyřprvkovou lineárně nezávislou posloupnost $B \cup (\mathbf{e}_4)$, a proto $\dim \mathbf{U}+\mathbf{V} = 4$. Nyní zbývá použít Větu 5.98, abychom zjistili, že

$$\dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{V}) = \dim\mathbf{U} + \dim\mathbf{V} - \dim(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = 3+3-4 = 2.$$

Při počítání dimenzí jsme zjistili, že je B báze $\mathbf{U}$, dále C je báze $\mathbf{V}$ a například kanonická báze je bází $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \mathbb{Z}_3^4$.

Zbývá nejít bázi $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$. Hledáme tedy všechny vektory, které leží zároveň v $\mathbf{U}$ i ve $\mathbf{V}$, což si opět vyjádříme rovnicí:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix},$$

kterou opět upravíme na

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Znovu počítáme všechna řešení homogenní soustavy s maticí:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\1&2&0&1&2&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&2&2&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&2&0&2&2&0\\0&1&1&2&1&1\\0&1&2&0&2&1\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&2&0&2&2&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&2&2&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&2&0&2&2&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

Nyní obvyklým způsobem spočítáme najít bázi podprostoru Ker$\mathbf{D}$, například bázi $(1,2,2,1,0,0)^T$, $(0,2,2,0,1,1)^T$. Zjistili jsme, že:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix},$$

a

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix},$$

Tudíž vektory $(1,2,2,1)^T$ a $(0,1,1,0)^T$ leží v podprostoru $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$. Konečně si uvědomíme, že libovolné řešení soustavy lze napsat ve tvaru

$$a_1\cdot(1,2,2,1,0,0)^T + a_2\cdot(0,2,2,0,1,1)^T = (a_1, 2a_1+2a_2, 2a_1+2a_2, a_1, a_2, a_2)^T,$$

kde $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_3$, proto lze každý vektor z průniku vyjádřit:

$$a_1\cdot(1,1,1,1)^T + (2a_1+2a_2)\cdot(0,2,1,1)^T + (2a_1+2a_2)\cdot(0,0,1,2)^T =$$
$$= a_1\cdot(1,2,2,1)^T + a_2\cdot(0,1,1,0)^T.$$

Tím jsme zjistili, že každý vektor z podprostoru $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$ lze napsat ve tvaru $a_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}+$ $a_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, tedy posloupnost $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ podprostor $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$ generuje. Zjevně se jedná o posloupnost lineárně nezávislou, tedy jde o bázi průniku. Není přitom těžké si uvědomit, že výsledné vektory budou jistě lineárně nezávislé, jestliže jsme hledali jejich souřadnice vzhledem k bázím prostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$.

Závěrem si ještě všimněme, že jsme soustavu nemuseli dopočítávat, neboť nám stačilo najít souřadnice báze řešení odpovídající proměnným y_i (tj. poslední 3 souřadnice) nebo x_i (tj. první 3 souřadnice). □

5.22. Najděte nenulový reálný polynom stupně (nejvýše) 2, jehož kořenem je komplexní číslo $3-i$.

Stačí když uvážíme, že jsou vektory $(3-i)^0 = 1$, $(3-i)^1 = 3-i$ a $(3-i)^2 = 8-6i$ nad tělesem $\mathbf{R}$ nutně lineárně závislé, tedy existuje trojice $(a_0,a_1,a_2) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, pro níž $a_0 + a_1(3-i) + a_2(8-6i) = 0$. Obdobnou úvahou jako v předchozím příkladu zjistíme, že potřebujeme vyřešit homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix}1 & 3 & 8\\0 & -1 & -6\end{pmatrix}$. Snadno zjistíme, že řešením je například trojice $(a_0,a_1,a_2) = (10,-6,1)$, proto je komplexní číslo $3-i$ kořenem polynomu $x^2-6x+10$. □

5.23. Najděte všechny reálné polynom stupně nejvýše 2, jejichž kořenem je komplexní číslo $3-i$.

V předchozí úloze jsme si uvědomili, že každý takový polynom odpovídá řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí typu (2,3) hodnosti 2. Protože je množina všech řešení podprostor dimenze 1, jsou hledané reálné polynomy tvaru $rx^2 - 6rx + 10r$ pro libovolné reálné $r \in \mathbf{R}$. □

5.24. Dokažte, že je množina $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} |\ a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ podprostor racionálního vektorového prostoru $\mathbf{R}$ a navíc, že $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Stačí pro libovolné $d, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_3 \in \mathbf{Q}$ nahlédnout, že

$$(a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4})+(a_2+b_2\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4}) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt[3]{2}+(c_1+c_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$$

a dále, že

$$d(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) = da_1 + db_1\sqrt[3]{2} + dc_1\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$$

a konečně, že $(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4}) =$

$$= (a_1a_2+2b_1c_2+2c_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2+2c_1c_2)\sqrt[3]{2}+(a_1c_2+c_1a_2+b_1b_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}].$$

□

5.25. Najděte nenulový racionální polynom stupně (nejvýše) 3, jehož kořenem je reálné číslo $1 - \sqrt[3]{2}$.

Uvažujeme stejně jako v úloze 5.22. Opět si všimneme, že $\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]) \leq 3$, proto jsou vektory $(1 - \sqrt[3]{2})^0 = 1$, $(1 - \sqrt[3]{2})^1 = 1 - \sqrt[3]{2}$, $(1 - \sqrt[3]{2})^2 = 1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ a $(1 - \sqrt[3]{2})^3 = -1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$ nad tělesem $\mathbf{Q}$ lineárně závislé. Najdeme tedy opět netriviální řešení vektorové rovnice

$$a_0 + a_1(1 - \sqrt[3]{2}) + a_2(1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + a_3(-1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}) = 0,$$

která vede na homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že řešením je čtveřice $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 3, -3, 1)$, tudíž je číslo $1 - \sqrt[3]{2}$ kořenem polynomu $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. □

18.12.

6. Lineární zobrazení

6.1. Nechť $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ je zobrazení dané předpisem $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}$. Rozhodněte, zda jde o lineární zobrazení.

Na přednášce jsme si uvědomili, že díky Tvrzením 4.18 a 4.20 zobrazení dané násobením sloupcového vektoru (tedy matice typu $(n, 1)$) maticí splňuje axiomy lineárního zobrazení, tedy

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}(r \cdot \mathbf{u}) = r \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u})$$

pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$ a $r \in \mathbb{Z}_5$. □

Označujme K_n kanonickou bázi libovolného aritmetického vektorového prostoru T^n nad tělesem T a její i-tý vektor $\mathbf{e}_i$.

6.2. Najděte matici lineárního zobrazení f z předchozí úlohy vzhledem

(a) ke kanonickým bázím K_3 a K_2,

(b) k bázi $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$ a K_2,

(c) k bázi B a $C = (\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$,

(a) Podle definice nejprve potřebujeme zjistit souřadnice vektorů $f(\mathbf{e}_i)$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{Z}_5^2$:

$$[f(\mathbf{e}_1)]_{K_2} = [\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}]_{K_2} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},$$

$$[f(\mathbf{e}_2)]_{K_2} = [\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}]_{K_2} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

$$[f(\mathbf{e}_3)]_{K_2} = [\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}]_{K_2} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá souřadnicové vektory uspořádat do sloupců matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím $[f]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \mathbf{A}$.

(b) Opět postupujeme podle definice a dostáváme souřadnice

$$[f(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})]_{K_2} = \begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$

$$[f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})]_{K_2} = \begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},$$

$$[f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})]_{K_2} = \begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $[f]_{K_2}^{B} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(c) Tentokrát využijeme Tvrzení 6.15 můžeme vyjádřit hledanou matici $[f]_C^B$ jakou součin matic: $[f]_C^B = [\mathrm{id}]_C^{K_3} \cdot [f]_{K_3}^B = ([\mathrm{id}]_{K_3}^C)^{-1} \cdot [f]_{K_3}^B$. Přímo z definice určíme matici přechodu $[\mathrm{id}]_{K_3}^C = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 0\end{pmatrix}$. Obvyklým způsobem nyní počítáme součin $[f]_C^B = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 0\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}2 & 3 & 2 & 0 & 4\\3 & 0 & 1 & 3 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc}3 & 0 & 1 & 3 & 1\\0 & 3 & 3 & 3 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 2\\0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $[f]_C^B = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. $\square$

6.3. Pro lineární zobrazení f z předchozích dvou příkladů najděte bázi podprostorů Ker$f$ a Imf a souřadnice báze Ker$f$ vzhledem k bázi B z předchozí úlohy.

Připomeňme, že Ker$f = \{\mathbf{v} |\ f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{v} |\ \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Tedy Ker$f$ je právě množina všech řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$, tj. Ker$f$ = Ker$\mathbf{A}$. Snadno spočítáme, že Ker$f = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, tudíž $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je báze Ker$f$.

Vezmeme-li libovolnou generující množinu G vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ (například kanonickou bázi), potom $f(G)$ tvoří generující množinu podprostoru Im$f = f(\mathbb{Z}_5^3)$. Vidíme, že $f((1,0,0)^T) = (4,1)^T$, $f((0,1,0)^T) = (1,2)^T$ a $f((0,0,1)^T) = (2,3)^T$, tj. obrazy vektorů kanonické báze tvoří právě sloupce matice $\mathbf{A}$. To znamená, že Imf = Im$\mathbf{A} = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{Z}_5^2$. Dimenze Im$f$ je jak víme také podle Věty o dimenzi jádra a obrazu 5.94 rovna $3 - \dim \mathrm{Ker}\mathbf{A} = 2$ a bází Imf je tudíž libovolná báze $\mathbb{Z}_5^2$, například kanonická báze.

Pro nalezení souřadnic báze Ker$f$ vzhledem k B můžeme buď obvyklým způsobem spočítat souřadnice nalezeného vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, což znamená vyřešit nehomogenní soustavu rovnic, nebo můžeme využít Tvrzení 6.25, podle nějž stačí najít bázi homogenní soustavy rovnic s již nalezenou maticí $[f]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. To je zjevně velmi snadné a vidíme, že souřadnicovým vektorem báze Ker$f$ vzhledem k B je například vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

6.4. Nechť $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ je zobrazení určené předpisem

$$g((x_1, x_2)) = (x_1 + 2x_2, 4x_1 - x_2, 2x_2).$$

Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení.

Snadno zjistíme, že lze předpis definující zobrazení g vyjádřit jako součin matice a aritmetického vektoru: $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Proto jde o lineární zobrazení.

□

6.5. Najděte matici vzhledem ke kanonickým bázím lineárního zobrazení g z předchozího příkladu.

Postupujeme stejně jako v Příkladu 6.2. Stačí tedy dosadit vektory kanonické báze do g a seřadíme je do sloupců matice $[g]^{K_2}_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

6.6. Mějme $A = (\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix})$ bázi prostoru $\mathbb{Z}_7^2$ a $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\0\\5\end{pmatrix})$ bázi prostoru $\mathbb{Z}_7^3$. Najděte matici lineárního zobrazení $h : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^3$ vzhledem k bázím A a B, známe-li matici h vzhledem ke kanonickým bázím $[h]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 0\\2 & 6\end{pmatrix}$.

Dvojí aplikací Tvrzení 6.15 můžeme vyjádřit hledanou matici $[h]_B^A$ jakou součin matic:

$$[h]_B^A = [\mathrm{id}]_B^{K_3} \cdot [h]_{K_3}^A = [\mathrm{id}]_B^{K_3} \cdot [h]_{K_3}^{K_2} \cdot [\mathrm{id}]_{K_2}^A = ([\mathrm{id}]_{K_3}^B)^{-1} \cdot [h]_{K_3}^{K_2} \cdot [\mathrm{id}]_{K_2}^A.$$

Snadno určíme přímo podle definice matice přechodu od kanonické báze k bázi A resp. B, tj. do sloupečků sepíšeme bázi A resp. B:

$$[\mathrm{id}]_{K_2}^A = \begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 1\end{pmatrix}, \quad [\mathrm{id}]_{K_3}^B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\1 & 0 & 0\\2 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Dokončení úlohy je už jen rutinním počítáním s maticemi:

$$[h]_B^A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\1 & 0 & 0\\2 & 3 & 5\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 0\\2 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\1 & 0 & 0\\2 & 3 & 5\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}6 & 6\\4 & 5\\5 & 5\end{pmatrix}.$$

Nyní součin matic dopočítáme standardním postupem:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 6 & 6 & 6\\1 & 0 & 0 & 4 & 5\\2 & 3 & 5 & 5 & 5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 4 & 5\\0 & 1 & 6 & 2 & 1\\0 & 3 & 5 & 4 & 2\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 4 & 5\\0 & 1 & 6 & 2 & 1\\0 & 0 & 1 & 5 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 4 & 5\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 5 & 6\end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $[h]_B^A = \begin{pmatrix}4 & 5\\0 & 0\\5 & 6\end{pmatrix}$. □

6.7. Buď $A = ((1,1,1)^T, (1,0,1)^T (1,1,0)^T)$ báze vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^3$ a $B = ((1,2)^T, (1,1^T))$ báze vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^2$. Najděte maticí lineárního zobrazení $\psi : \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^2$ vzhledem ke kanonickým bázím, má-li matici $[\psi]_B^A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ vzhledem k bázím A a B.

Postupujeme stejně jako v předchozí úloze s využitím Tvrzení 6.15:

$$[\psi]_{K_2}^{K_3} = [\mathrm{id}]_{K_2}^B \cdot [\psi]_B^A \cdot [\mathrm{id}]_A^{K_3} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}.$$

a některým ze známých způsobů dopočítáme $[\psi]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. □

6.8. Uvažujme první derivaci $()'$ na lineárním prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]_4 = \{\sum_{i=0}^{3} a_i x^i |\ a_i \in \mathbb{R}\}$ stupně menšího než 4 a označme $K = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ bázi $\mathbb{R}[x]_4$. Z matematické analýzy víme, že je $()'$ lineární zobrazení.

(a) Najděte matici $[()']_K^K$,
(b) určete jádro $\mathrm{Ker}()'$ a $\mathrm{Im}()'$,
(c) je-li nějaká B báze $\mathbb{R}[x]_4$, najděte nejmenší n pro které $([()']_B^B)^n = \mathbf{0}$.

(a) Stačí derivovat jednotlivé polynomy báze K a určit souřadnice derivací vzhledem k této bázi:

$$[(x^0)']_K = [0]_K = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ [(x^1)']_K = [x^0]_K = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ [(x^2)']_K = [2x^1]_K = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$[(x^3)']_K = [3x^2]_K = \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix},\ \text{tedy } [()']_K^K = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(b) Odpověď dostaneme buď elementární úvahou na půdě matematické analýzy, která říká, že nulovou derivaci mají právě konstantní funkce, tedy $\mathrm{Ker}()' = \langle x^0\rangle$, a obrazem polynomů stupně menšího než 4 jsou právě polynomy stupně menšího než 3, tedy $\mathrm{Im}()' = \langle x^0, x^1, x^2\rangle$, nebo týž výsledek můžeme vyčíst v souřadnicích vzhledem ke K z matice $[()']_K^K$ pomocí Tvrzení 6.25.

(c) Uvědomíme-li si, že složením n derivací dostaneme derivaci n-tého stupně, tj. $(()')^n = ()^{(n)}$ a připomeneme-li si, že $(\mathbb{R}[x]_4)^{(n)} = 0$, právě když $n \geq 4$, pak stačí jen opakovaně využít Tvrzení 6.15, abychom zjistili, že

$$([()']_B^B)^n = ([(()')^n]_B^B) = ([()^{(n)}]_B^B) = \mathbf{0} \Leftrightarrow n \geq 4.$$

To ovšem znamená, že nejmenší n pro které $([()']_B^B)^n = \mathbf{0}$ je $n = 4$. □

6.9. Najděte matici lineárního zobrazení φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonickým bázím, víte-li, že $\varphi((1,2)^T) = (3,0)^T$ a $\varphi((2,1)^T) = (3,3)^T$.

Protože $B = ((1,2)^T, (2,1)^T)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^2$, zaručuje nám Tvrzení 7.4, že daná podmínka určuje lineární zobrazení f jednoznačně, a bezprostředně z definice dostaneme matici $[\varphi]_{K_2}^B = \begin{pmatrix}3&3\\0&3\end{pmatrix}$. Dále postupujeme obvyklým způsobem:

$$[\varphi]_{K_2}^{K_2} = [\varphi]_{K_2}^B \cdot [\mathrm{id}]_B^{K_2} = [\varphi]_{BK_2} \cdot ([\mathrm{id}]_{K_2}^B)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}3&3\\0&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}3&3\\0&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}.$$

□

6.10. Je-li $\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&1&2&5\\1&2&6&6\end{pmatrix}$ matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^3$ vzhledem k bázím $M = ((1,1,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,1,1)^T, (1,0,0,0)^T)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a $N = ((3,1,4)^T, (3,3,0)^T, (2,1,6)^T)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^3$. Určete dimenze jádra $\mathrm{Ker} f$ a obrazu $\mathrm{Im} f$.

Nejprve standardní cestou určíme hodnost matice $[f]_N^M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ a zjistíme, že $h([f]_{MN}) = 2$. Nyní využijeme Tvrzení 5.94, které říká, že $\dim(\mathrm{Im} f) = h([f]_{MN}) = 2$ a že $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(\mathbb{Z}_7^4) = 4$. Proto $\dim(\mathrm{Ker} f) = 4 - \dim(\mathrm{Im} f) = 2$. $\square$

8.1.

7. Determinanty

7.1. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Postupujeme přímo podle definice. Rozmyslíme si, že $S_2 = \{\mathrm{id}, (12)\}$. a proto $\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$. Obvyklá úvaha o počítání v tělesech $\mathbb{Z}_p$ nám umožní využít výsledku spočítaného v tělese reálných (či racionálních) čísel, který nakonec stačí upravit modulo p. To znamená, že $\det(\mathbf{A}) = (5) \mathrm{mod}\ 5 = 0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(\mathbf{A}) = (5) \mathrm{mod}\ 7 = 5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$. $\square$

7.2. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

I tentokrát budeme fakticky postupovat podle definice. Sudým permutacím id, (123) a (132) z S_3 odpovídají po řadě součiny $1 \cdot 0 \cdot 1$, $2 \cdot 3 \cdot 2$ a $1 \cdot 4 \cdot 3$ (vždy bereme nejprve hodnotu z prvního řádku, poté z druhého a nakonec z třetího) a lichým permutacím (12), (13) a (23) odpovídají součiny $2 \cdot 4 \cdot 1$, $1 \cdot 0 \cdot 2$ a $1 \cdot 3 \cdot 3$, proto

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - (2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3).$$

Tedy $\det(\mathbf{B}) = 7$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{B}) = 2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(\mathbf{B}) = 0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$. $\square$

7.3. Rozhodněte, zda je nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ regulární matice:
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{A}^{555}$.

Díky Tvrzení 7.22 stačí zjistit, zda jsou determinanty jednotlivých matic nenulové. Spočítejme nejprve determinanty matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = -5$$

nad $\mathbf{Q}$, $\det \mathbf{A} = 0$ nad $\mathbb{Z}_5$ a $\det \mathbf{A} = 2$ nad $\mathbb{Z}_7$, což znamená, že je $\mathbf{A}$ regulární nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbf{A}$ je singulární nad $\mathbb{Z}_5$. Podobně

$$\det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

nad $\mathbf{Q}$, $\det \mathbf{B} = 1$ nad $\mathbb{Z}_5$ a $\det \mathbf{B} = 6$ nad $\mathbb{Z}_7$, tedy $\mathbf{B}$ jr regulární nad všemi tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$. Použijeme-li Větu 7.26, která říká, že $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$, pak vidíme, že $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$ právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$ a $\det \mathbf{B} \neq 0$. Tudíž matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je regulární nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbb{Z}_7$ a není regulární nad $\mathbb{Z}_5$. Konečně indukčním rozšířením Věty 7.26 dostaneme, že $\det(\mathbf{A}^{555}) = \det(\mathbf{A})^{555}$, a proto je matice $\mathbf{A}^{555}$ regulární právě nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbb{Z}_7$. □

7.4. Určete nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinanty matic

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice $\mathbf{C}_1 = (c_{ij})$ můžeme opět spočítat podle definice, uvědomíme-li si, že pro každou neidentickou permutaci $\sigma \in S_5$ bude existovat aspoň jedno j, pro něž $j > \sigma(j)$, a proto $c_{j\sigma(j)} = 0$ a $c_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot c_{5\sigma(5)} = 0$. Tedy determinant Gaussovy čtvercové matice $\mathbf{C}_1$ je právě součin hodnot na hlavní diagonále, tj. $\det(\mathbf{C}_1) = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 48$ nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{C}_1) = (48) \bmod 5 = 3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(\mathbf{C}_1) = (48) \bmod 7 = 6$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

Nyní si všimněme, že matici $\mathbf{C}_2$ dostaneme z matice $\mathbf{C}_1$ výměnou 1. a 4. řádku. Proto podle Tvrzení 7.18 a 7.19 je $\det(\mathbf{C}_2) = -\det(\mathbf{C}_1)$, tudíž $\det(\mathbf{C}_2) = -48$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{C}_2) = (-48) \bmod 5 = 2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(\mathbf{C}_2) = (-48) \bmod 7 = 1$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$. □

7.5. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Připomeňme, že Tvrzení 7.18 a 7.19 nám říkají, jak se změní determinant matice, provedeme-li některou z řádkových úprav. V předchozí úloze jsme si navíc uvědomili, že je velmi snadné určit determinant Gaussovy matice jako součin hodnot na hlavní diagonále. Budeme-li tedy standardními prostředky pomocí elementárních úprav řádků převádět matici $\mathbf{D}$ na její Gaussovu matici, budeme v každém kroku znát, jak jsme původní determinant změnili. Tedy upravujme a počítejme:

$$\det(\mathbf{D}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}) =$$

$$= \det(\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 5 & -1\end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}) = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5.$$

Tedy zjistili jsme, že $\det(\mathbf{D}) = 5$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{D}) = 0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\det(\mathbf{D}) = 5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$. $\square$

7.6. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

Tentokrát k výpočtu použijeme Tvrzení 7.18 Větu 7.32 a budeme determinant rozvíjet podle 2. řádku:

$$\det(\mathbf{G}) = (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det(\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}) + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det(\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}) +$$

$$+(-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \det(\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}) + (-1)^{2+4} \cdot 0 \cdot \det(\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}) =$$

$$= -3 \cdot \det(\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}) = -3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2) = 30.$$

Tedy jako obvykle $\det(\mathbf{G}) = 18$ nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{G}) = 3$ nad $\mathbb{Z}_5$ a $\det(\mathbf{G}) = 4$ nad $\mathbb{Z}_7$. $\square$

Poznamenejme, že jsme determinanty ani další členy rozvoje, které přísluší nulovému prvku z řádku, podle nějž determinant rozvíjíme, vůbec nemuseli psát. Navíc si uvědomme, že tato metoda je vhodná právě v případě, kdy některý z řádků nebo sloupců, využijeme-li pozorování obsahuje „hodně"nul.

7.7. Spočítejte determinant matice $\mathbf{H} = \begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9\\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel.

V matici $\mathbf{H}$ sice žádný řádek ani sloupec neobsahuje větší počet nul, ovšem první a čtvrtý sloupec se liší jen na jedné pozici. Víme, že odečteme-li od jednoho z těchto sloupců druhý, nezmění se podle Tvrzení 7.19 hodnota determinantu. Po této úpravě už ovšem můžeme použít metodu rozvoje podle sloupce (tedy Větu 7.32):

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9\\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix}0 & 3 & -3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 7 & 5 & -9\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}) =$$

$$= (-1)\cdot(-2)\cdot \det(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}).$$

Nyní odečteme od prvního řádku upravené matice trojnásobek druhého řádku. Na prvním řádku zůstanou dva nenulové prvky, podle nichž determinant rozvedeme a snadno dopočítáme:

$$\det(\mathbf{H}) = 2\cdot\det(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}) = 2\cdot\det(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}) =$$

$$= 2\cdot(-5)\cdot\det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 7\end{pmatrix}) - 2\cdot 1\cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}) =$$

$$= -10\cdot(14-1+3+14) - 2\cdot(4+1+12+4+4-3) = -344.$$

□

7.8. Rozhodněte pro která reálná a jsou reálné matice $\mathbf{P}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ a & 1 & a\\ 1 & a & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{Q}(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1\\ a-1 & 1 & 1\\ a+1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}(a)\cdot\mathbf{Q}(a)$ a $\mathbf{P}(a)^{257}\cdot\mathbf{Q}(a)^{374}$ regulární.

Nejprve spočítáme determinanty $\det(\mathbf{P}(a)) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ a & 1 & a\\ 1 & a & 0\end{pmatrix} = a - a^2,$ a

$$\det(\mathbf{Q}(a)) = \det\begin{pmatrix} a & -1 & -1\\ a-1 & 1 & 1\\ a+1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & 0\\ a-1 & 1 & 1\\ a+1 & 1 & 0\end{pmatrix} = 1-2a.$$

Věta 7.22 z přednášky říká, že je matice regulární, právě když je její determinant nenulový. Determinanty matic $\mathbf{P}(a)$ a $\mathbf{Q}(a)$ už jsme spočítali, zbývá nám s využitím Věty 7.26 spočítat $\det(\mathbf{P}(a)\cdot\mathbf{Q}(a)) = \det(\mathbf{P}(a))\cdot\det(\mathbf{Q}(a)) = a(1-a)(1-2a)$. Vidíme, že je matice $\mathbf{P}(a)$ regulární, právě když $a \in \mathbf{R}\setminus\{0,1\}$, matice $\mathbf{Q}(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbf{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ a součin $\mathbf{P}(a)\cdot\mathbf{Q}(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbf{R}\setminus\{0,\frac{1}{2},1\}$.

Konečně indukční aplikací Věty 7.26 dostáváme, že

$$\det(\mathbf{P}(a)^{257}\cdot\mathbf{Q}(a)^{374}) = \det(\mathbf{P}(a))^{257}\cdot\det(\mathbf{Q}(a))^{374} = a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}.$$

Protože polynom $a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}$ v proměnné a nemá jiné kořeny než 0, $\frac{1}{2}$, 1, vidíme, že je matice $\mathbf{P}(a)^{257}\cdot\mathbf{Q}(a)^{374}$ regulární opět právě tehdy, když $a \in \mathbf{R}\setminus\{0,\frac{1}{2},1\}$. □

7.9. Rozhodněte pro která $x \in \mathbb{Z}_5$ je matice $\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ singulární.

Opět spočítáme determinant matice $\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$, nejprve přičteme třetí sloupec k druhému a pak rozvedeme podle třetího řádku:

$$\det \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x & 3x+4 & 2x+1 \\ x+4 & 3x & 3 \\ x+1 & 0 & 4x \end{pmatrix} =$$

$$= (x+1) \cdot (4x^2 + x + 2) + 4x \cdot (3x^2 + 4x + 4) = x^3 + x^2 + 4x + 2.$$

Stejně jako v předchozí úloze potřebujeme najít $x \in \mathbb{Z}_5$, pro něž je hodnota $\det(\mathbf{A}(x)) = x^3 + x^2 + 4x + 2 = 0$, což snadno zjistíme dosazováním jednotlivých prvků tělesa $\mathbb{Z}_5$:

$$\det(\mathbf{A}(0)) = 2,\ \det(\mathbf{A}(1)) = 1^3+1^2+4\cdot 1+2 = 3,\ \det(\mathbf{A}(2)) = 2^3+2^2+4\cdot 2+2 = 2,$$

$$\det(\mathbf{A}(3)) = 3^3 + 3^2 + 4 \cdot 3 + 2 = 0, \qquad \det(\mathbf{A}(4)) = 4^3 + 4^2 + 4 \cdot 4 + 2 = 3.$$

Zjistili jsme, že je matice $\mathbf{A}(x)$ singulární, právě když je $x = 3$. □

7.10. Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1,0,0)^T$ s reálným parametrem a, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

Pro počítání použijeme Cramerovo pravidlo, tedy Věty 7.28 z přednášky. Nejdříve určíme $\det \mathbf{A} = 2a \cdot (a+1)$. To znamená, že Cramerovo pravidlo můžeme využít pro parametr $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1\}$, t.j. je-li matice A regulární. Dále určíme determinant matic $\mathbf{A}_i$, které vzniknou z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran vektorem, tedy $(1,0,0)^T$:

$\det \mathbf{A}_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a$, $\det \mathbf{A}_2 = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & 2a \\ a & 0 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a$ a $\det \mathbf{A}_3 = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2a$.

Nyní pomocí Věty 7.28 spočítáme hodnotu i-té neznámé jako $x_i = (\det \mathbf{A})^{-1} \cdot \det \mathbf{A}_i$. Tedy $x_1 = x_2 = \frac{2a}{2a(a+1)} = \frac{1}{a+1}$ a $x_3 = \frac{-2a}{2a(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$. Konečně standardním postupem zjistíme, že soustava pro $a = -1$ nemá řešení a pro $a = 0$ leží všechna řešení v množině $(1,0,0)^T + \langle((0,1,-1)\rangle$. □

Další úlohy

(1) Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $(1,3,2,1)^T$, $(3,0,1,1)^T$, $(1,4,2,4)^T$ lineárně závislá ve vektorovém prostorech $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{C}^4$, $\mathbb{Z}_5^4$ a $\mathbb{Z}_7^4$.

(2) Určete bázi a dimenzi podprostoru $\langle (1,3,2,1)^T,\ (3,0,1,1)^T,\ (1,4,2,4)^T \rangle$ vektorových prostorů $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{C}^4$, $\mathbb{Z}_5^4$ a $\mathbb{Z}_7^4$.

(3) Najděte všechny podmnožiny množiny $X = \{(1,2,1,1,1)^T, (3,1,3,3,3)^T, (2,4,2,2,2)^T,\ (1,0,1,3,2)^T\}$, které tvoří bázi podprostoru $U = \langle X \rangle$ vektorových prostorů $\mathbf{Q}^5$, $\mathbb{Z}_5^5$, $\mathbb{Z}_7^5$.

(4) Kolik existuje bází podprostoru $\langle (1,1,2,0)^T,\ (4,1,3,1)^T,\ (1,3,2,1)^T \rangle$ vektorových prostorů $\mathbb{Z}_5^4$ a $\mathbb{Z}_7^4$?

(5) Určete dimenze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$ vektorových prostorů $\mathbb{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$, jestliže $\mathbf{U} = \langle (1,2,1,3)^T, (1,2,4,1)^T, (3,4,1,0)^T \langle$ a $\mathbf{V} = \langle (4,1,2,3)^T,\ (0,3,3,1)^T,\ (1,2,1,3)^T \rangle$.

(6) Uvažujme v lineárním prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ posloupnosti vektorů

$$B_1 = (\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}), B_2 = (\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}),$$

$$B_3 = (\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}), B_4 = (\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})$$

a označme B_0 kanonickou bázi lineárního prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

(a) Ověřte, že je B_i pro každé $i = 1,2,3,4$ báze $\mathbb{Z}_5^3$,

(b) najděte matice přechodu $[\mathrm{id}]_{B_j}^{B_i}$ pro všechna $i,j \in \{0,1,2,3,4\}$,

(c) najděte pro každé $i \in \{0,1,2,3,4\}$ báze C a D, aby

$$[\mathrm{id}]_C^{B_i} = [\mathrm{id}]_{B_i}^D = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

(7) Určete nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$, matice $\mathbf{A}+\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$.

(8) Najděte nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$ z předchozí úlohy.

(9) Najděte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení nehomogenní soustavy rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$.

(10) Je-li podprostor $\mathbf{U} = \langle (2,4,0,1,4)^T, (1,2,1,0,3)^T \rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, najděte bázi nějakého takového podprostoru $\mathbf{V}$, aby $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \mathbb{Z}_5^5$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.

(11) Uvažujme podprostor $\mathbf{W} = \langle (1,6,2,4,5)^T \rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$. Najděte báze nějakých takových podprostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$, aby $\dim(\mathbf{U})^T = \dim(\mathbf{V})^T = 3$, $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \mathbb{Z}_7^5$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V} = \mathbf{W}$.

(12) Kolika způsoby lze lineárně nezávislou posloupnost $((1,2,2,1)^T, (2,1,1,0)^T)$ doplnit na bázi (chápanou jako posloupnost, tj. záleží na pořadí prvků) vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^4$?

(13) Buď $k \leq n$ přirozená čísla, p prvočíslo a $\mathbf{U}$ podprostor dimenze k vektorového prostoru $\mathbb{Z}_p^n$ nad tělesem $\mathbb{Z}_p$. Určete kolik existuje podprostorů $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbb{Z}_p^n$, pro něž platí, že $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \mathbb{Z}_5^5$ a $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.

(14) Dokažte, že lze nad tělesem $\mathbb{Q}$ převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ na matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(15) Uvažujme matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ z předchozího příkladu. Najděte nějakou posloupností elementárních řádkových úprav, pomocí nichž lze převést matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$.

(16) Nechť $f : \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^3$ je zobrazení určené předpisem $g((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4, 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4, 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4)$. Spočítejte dimenze a báze jádra Ker$f$ a obrazu Imf, rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f$ a najděte matice $[f]_{K_3}^{K_4}$, $[f]_{K_3}^{B}$, $[f]_{C}^{K_4}$ a $[f]_{C}^{B}$, jestliže K_3 a K_4 jsou kanonické báze a $B = (\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $C = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix})$

(17) Spočítejte determinant matic $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$.

(18) Najděte pro libovolná $a \in \mathbf{Q}$ nad $\mathbf{Q}$ rekurentní vzorec pro výpočet determinant čtvercové matice $\mathbf{G}_n = (g_{ij})$ stupně n, kde $g_{ii} = 1$, $g_{ii+1} = a$ a $g_{i+1i} = b$ a jinde je $g_{ij} = 0$.

(19) Rozhodněte, zda jsou nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ regulární matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}^3$.

(20) Najděte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ adjungované matice k maticím z předchozí úlohy.

(21) Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ je nad $\mathbb{Z}_7$ matice $\begin{pmatrix} a & 2+a & 1 \\ 3a+2 & 1 & a \\ 2a^2 & a+6 & 2+a \end{pmatrix}$ regulární.

(22) Najděte pro všechna $a \in \mathbb{Z}_7$, pro něž je to možné, inverzní matici k matici z předchozí úlohy.

(23) Spočítejte $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix})^{-1}$ nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$.