0. Vzpomínky na analytickou geometrii

0.1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ přímku p s parametrickým vyjádřením

$$p = \{(1,2) + t \cdot (1,1) |\ t \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Určete obecné vyjádření přímky p,
(b) najděte průsečíky přímky p s osou x a osou y,
(c) rozhodněte, které z bodů $(2,3)$, $(3,2)$ a $(-1,1)$ leží na p.

(a) Spočítáme normálový vektor $(1,-1)$, který je právě kolmý na směrový vektor přímky $(1,1)$. To znamená, že rovnice přímky má tvar $x - y = c$, a nyní dosazením bodu $(x,y) = (1,2)$ z parametrického zadání dostaneme $c = 1 - 2 = -1$, tedy dostáváme obecné vyjádření přímky $p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x - y = -1\}$. Poznamenejme, že vyjádření je určeno jednoznačně až na násobek celé rovnice nenulovým reálným číslem.

(b) Stačí dosadit za x a y nulu do rovnice obecného vyjádření. Pro $y = 0$ dostáváme $x - 0 = -1$ a pro $x = 0$ máme $0 - y = -1$, tudíž hledané průsečíky jsou $(-1,0)$ a $(0,1)$.

(c) Opět využijeme obecné vyjádření, abychom zjistili, že $2 - 3 = -1$, $3 - 2 \neq -1$ a $-1 - 1 \neq -1$, a proto bod $(2,3)$ na přímce leží, zatímco body $(3,2)$ a $(-1,1)$ nikoli. $\square$

0.2. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ přímku q s obecným vyjádřením

$$q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + 2y = 3\}.$$

(a) Určete parametrické vyjádření přímky q,
(b) najděte průsečík přímky q s přímkou p z předchozí úlohy.

(a) Tentokrát známe z obecného tvaru normálový vektor $(1,2)$ a snadno tedy určíme směrový vektor $(2,-1)$, který je na něj kolmý. Například dosazením $y = 0$ najdeme bod $(3,0)$ přímky q, proto je $q = \{(3,0) + t \cdot (2,-1) |\ t \in \mathbb{R}\}$ jedno z možných parametrických vyjádření přímky q.

(b) Řešíme soustavu rovnic o dvou neznámých $\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}$, kterou můžeme také zapsat maticově (to znamená pozičně bez přepisování symbolů, x a y) do matice soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$. Nyní některým ze známých způsobů upravíme jednu rovnici pomocí druhé tak, abychom jednu z proměnných odstranili. Vyberme si například odčítací metodu a odečtěme od první rovnice druhou. V maticovém zápisu to bude vypadat následovně:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array}\right),$$

kde symbol $\sim$ znamená, že soustava napravo i nalevo mají stejnou množinu řešení. Třetí úprava odpovídá tomu, že rovnici $-3y = -4$ vydělíme hodnotou -3 a získáme tak $y = \frac{4}{3}$. Nyní snadno například z původní druhé rovnice dopočítáme $x = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$. Hledaným průsečíkem přímek p a q je bod $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$. $\square$

0.3. Najděte všechna (a) reálná, (b) racionální, (c) komplexní řešení soustavy rovnic $\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & -1. \end{array}$

Všechna reálná řešení jsme našli v předchozí úloze. Díky geometrickému náhledu přitom bylo zjevné, že existuje právě jedno řešení soustavy $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

Nalezené řešení je zjevně racionální, tedy jde o jediné racionální řešení Navíc aritmetický postup z předchozí úlohy, který nezávisel na tom, zda počítáme v reálném či komplexním oboru (všechna zúčastněná čísla byla dokonce jen racionální), zajišťuje, že bod $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ je i jediným komplexním řešením dané soustavy. □

0.4. Najděte v $\mathbb{R}^2$ obecné i parametrické vyjádření přímky u obsahující body $(3, -1)$ a $(2, 1)$.

Nejprve snadno určíme vektor posunutí jednoho bodu do druhého, tedy například $(1, -2) = (3, -1) - (2, 1)$. Protože známe hned dva body přímky můžeme okamžitě napsat parametrické vyjádření $u = \{(2, 1) + t \cdot (1, -2) |\ t \in \mathbb{R}\}$.

Obecné vyjádření získáme stejně jako v úloze 0.1 z parametrického vyjádření pomocí normálového vektoru a dosazení: $u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x + y = 5\}$ □

0.5. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ rovinu r s obecným vyjádřením

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y - z = 1\}.$$

(a) Určete parametrické vyjádření roviny r,
(b) rozhodněte, které z bodů $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, 2)$ leží v rovině r.

(a) Postupujeme obdobně jako ve dvoudimenzionálním prostoru. Potřebujeme nejprve najít jeden bod roviny. Pro volbu $y = z = 0$ dopočítáme bod $(1, 0, 0)$. Nyní musíme najít dva vektory určující rovinu, tedy vektory, které jsou kolmé na normálový vektor $(1, 1, -1)$. Snadno spočítáme, že kolmé jsou například vektory $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$, proto dostáváme parametrické vyjádření roviny

$$r = \{(1, 0, 0) + s \cdot (1, 0, 1) + t \cdot (0, 1, 1) |\ s, t \in \mathbb{R}\}$$

.

(b) Stejně jako v 0.1(c) prostým dosazením do obecného vyjádření zjistíme, že bod $(1, 1, 1)$ leží a bod $(2, 2, 2)$ neleží v rovině r. □

0.6. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ rovinu v s parametrickým vyjádřením

$$v = \{(3, -1, 1) + s \cdot (1, 1, 2) + t \cdot (1, 0, -1) |\ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Určete obecné vyjádření roviny v,
(b) najděte parametrické vyjádření přímky dané průsečíkem roviny v s rovinou r z předchozího příkladu.

(a) Opět stačí najít normálový vektor kolmý na vektory $(1, 1, 2)$ a $(1, 0, -1)$, kterým je (až na nenulový reálný násobek právě) vektor $(1, -3, 1)$ a dosazením do výrazu $x - 3y + z$ bodu $(3, -1, 1)$ získat konstantu 7. Tedy hledané obecné vyjádření roviny má tvar$v = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 3y + z = 7\}$.

(b) Podobně jako 0.2(b) řešíme soustavu rovnic tentokrát o třech neznámých $\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & z & = & 7 \end{array}$, kterou si opět zapíšeme maticově a budeme ji odčítací metodou upravovat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Druhou rovnici jsme tedy nahradili rovnicí $-2y+z=3$ tak, že soustavy mají stejnou množinu řešení. Nyní jednak po volbě $y=0$ jednoznačně dopočítáme souřadnice bodu přímky $z=3$ a $x=7-0+3=10$ a dále najdeme směrový vektor, který musí být kolmý na normálové vektory $(1,1,-1)$ a $(0,2,-1)$, jímž je vektor $(1,1,2)$. Našli jsme parametrický popis přímky $r \cap v = \{(10,0,3)+t\cdot(1,1,2)|\ t\in\mathbb{R}\}$. □

0.7. Spočítejte v komplexních číslech $\mathbb{C}$ hodnotu výrazů:

(a) $1-2i+2+3i$,
(b) $\frac{1}{3+i}$ a $\frac{2+3i}{1-2i}$,
(c) $(1+i)^{50}$.

(a) Reálná a komplexní hodnota se po složkách sečtou: $1-2i+2+3i=3+i$.

(b) Obvyklým způsobem rozšíříme zlomky komplexně sdruženou hodnotou a dostaneme

$$\frac{1}{3+i}=\frac{1}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$$

a

$$\frac{2+3i}{1-2i}=\frac{2+3i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i.$$

(c) Využijeme goniometrický zápis komplexních čísel a Moivreovu větu:

$$(1+i)^{50}=(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))^{50}=2^{25}(\cos\frac{50\pi}{4}+i\sin\frac{50\pi}{4})=$$
$$=2^{25}(\cos(6\pi+\frac{\pi}{4})+i\sin(6\pi+\frac{\pi}{4}))=2^{25}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=2^{25}i.$$

□

9.10.

1. Řešení soustav lineárních rovnic

1.1. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Nejprve si soustavu zapíšeme do rozšířené matice a poté ji pomocí elementárních úprav upravujeme do odstupňovaného tvaru. Vše si budeme zapisovat pomocí maticového zápisu. Připomeňme, že soustava rovnic nalevo od symbolu $\sim$ má stejnou množinu řešeni jako soustava rovnic napravo od něj:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 9 \end{array}\right)$$

Druhý řádek první upravené matice, který odpovídá rovnici $5y+4z = 4$, jsme dostali přičtením dvojnásobku rovnice $x + 2y + z = 1$ k rovnici $-2x + y + 2z = 2$ (tedy přičtením dvojnásobku řádku $\left(1 \quad 2 \quad 1 \,\middle|\, 1\right)$ k řádku $\left(-2 \quad 1 \quad 2 \,\middle|\, 2\right)$) a podobně třetí řádek vznikl z původního třetího řádku odečtením prvního. V dalším kroku jsme jen přehodili řádky (tedy rovnice) a poté jsme odečetli pětinásobek druhého řádku od třetího. Nyní už výsledek získáme zpětnou substitucí. Z poslední rovnice $14z = 9$ okamžitě dostáváme $z = \frac{9}{14}$ a dále dopočítáme

$$y = -1 + 2z = -1 + \frac{9}{7} = \frac{2}{7} \quad \text{a} \quad x = 1 - 2y - z = 1 - \frac{4}{7} - \frac{9}{14} = -\frac{3}{14}.$$

Vidíme, že jediné řešení soustavy je $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{9}{14} \end{pmatrix}$.

Uvědomme si, že můžeme k výsledku dospět i v maticovém zápisu, tj. můžeme levou stranu matice posloupností elementárních úprav převést až na jednotkovou matici: :

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right).$$

□

1.2. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

Znovu si soustavu zapíšeme do matice a poté ji pomocí přičtení vhodného násobku jedné rovnice k rovnici druhé upravíme stejně jako v předchozí úloze:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{5} & 4 & 4 \end{array}\right),$$

Vidíme, že se pivoty (v druhé matici vyznačeny tučně) nachází v prvním a druhém sloupci a volná proměnná je tedy ta, která odpovídající třetímu sloupci. Nyní si snadno uvědomíme (a na přednášce byl tento fakt vysloven v pozorování 2.16), že dosadíme-li za z libovolnou hodnotu, pak jednoznačně dopočítáme y a x. Položíme-li například $z = 0$, pak z rovnice $5y + 4 \cdot 0 = 4$ dostáváme, že $y = \frac{4}{5}$ a z rovnice $x + 2 \cdot \frac{4}{5} + 0 = 1$ spočítáme, že $x = -\frac{3}{5}$. Našli jsme tedy jedno řešení dané soustavy, které můžeme zapsat do trojice $(x, y, z)^T = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T$. Dosadíme-li za z obecný reálný prvek t můžeme zpětnou substitucí dopočítat y:

$$5y + 4 \cdot t = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}t$$

a poté stejným způsobem i x:

$$x + 2 \cdot y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - 2 \cdot (\frac{4}{5} - \frac{4}{5}t) - t = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}t.$$

Obecné řešení má tedy tvar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}t \\ \frac{4}{5} - \frac{4}{5}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ a množina všech řešení soustavy je právě $\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Na závěr si připomeňme geometrický význam řešení dané soustavy: každou z rovnic chápeme jako rovinu v $\mathbb{R}^3$ (tvořenou všemi trojicemi (x, y, z), které rovnici řeší) a množina řešení celé soustavy je průnik těchto dvou rovin. Všimneme-li si navíc, že roviny zjevně nejsou rovnoběžné, musí množinu všech řešení tvořit přímka, jejíž jeden bod $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ už jsme našli a jejíž směr je dán vektorem $(3, -4, 5)$, který je právě o netriviální řešení soustav rovnic se stejnými levými a nulovými pravými stranami. Z geometrického náhledu tedy vidíme, že množin všechna řešení je přímka, kterou můžeme vyjádřit ve tvaru $\{(-\frac{3}{5} + 3t, \frac{4}{5} - 4t, 5t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$. $\square$

1.3. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_4 & = & 1 \\ x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}$$

Soustavu si opět můžeme zapsat do matice a poté ji (jedinou elementární řádkovou úpravou) upravíme na odstupňovanou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Nyní už snadno jednoznačně dopočítáme neznámé zpětnou substitucí. Z posledního řádku $5x_4 = 5$ dostáváme, že $x_4 = 1$, z předposledního řádku $-x_3 + 2x_4 = 0$ vidíme, že $-x_3 + 2 = 0$, tedy $x_3 = 2$. Dále z druhé rovnice $x_2 + x_3 + x_4 = 3$ obdržíme $x_2 = 0$ a konečně z rovnice $x_1 + x_2 - x_4 = 1$ dostaneme $x_1 = 2$. Vidíme, že existuje jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 0, 2, 1)^T$. $\square$

1.4. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic s maticí *a)* $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$,

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, *c)* $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Ve všech případech postupujeme standardně posloupností elementárních úprav:
a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

Vidíme, že původní soustava je ekvivalentní se soustavou požadující rovnost $0 = 2$, tedy množina řešení je prázdná.

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Obdrželi jsme matici hodnosti 3 s čtvrtým volným sloupcem (pivoty jsme opět vyznačili tučně). Zvolíme-li opět za čtvrtou neznámou u parametr libovolnou reálnou hodnotu t, dopočítáme zpětnou substitucí:

$$z = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}t,\ y = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}t,\ x = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}t$$

Zjistili jsme, že $\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ je množina všech řešení dané soustavy.

Protože čtveřice $(1, 0, 1, -1)^T$ rovněž řeší danou soustavu a vektor $(3, 1, 2, -5)$ řeší homogenní variantu naší soustavy, snadno můžeme nahlédnout, že množinu všech řešení také můžeme popsat ve tvaru $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

c)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Získali jsme odstupňovanou matici, v níž jsou bez pivotů 2., 4., 5. a 6. sloupec, tedy volné jsou jim odpovídající proměnné. Označíme-li si neznámé postupně $x_1, \ldots, x_6$, pak pro libovolná $t_2, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R}$ položíme

$$x_2 = t_2,\ x_4 = t_4,\ x_5 = t_5,\ x_6 = t_6$$

a zpětnou substitucí dopočítáme

$$x_3 = 1 + 2t_4 + 5t_5 - 3t_6 \text{ a poté } x_1 = 1 - t_2 - t_4 - 2t_5 + t_6.$$

Nyní obvyklým způsobem popíšeme množinu všech řešení soustavy:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mid t_2, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R}\}$$

$\square$

1.5. Najděte všechna racionální řešení soustavy rovnic z úlohy 1.2.

Stačí si rozmyslet, že z množiny řešení úlohy 1.2 musíme vybrat ta, která jsou ve všech složkách racionální. Není těžké nahlédnout, že součin, součet i rozdíl racionálních čísel je opět racionální, proto množina $M = \{(-\frac{3}{5} + 3t, \frac{4}{5} - 4t, 5t)^T |\ t \in \mathbb{Q}\}$ jistě obsahuje racionální řešení soustavy. Protože součin, součet a rozdíl nenulového racionálního a iracionálního čísla je zjevně iracionální, obsahuje vektor $(-\frac{3}{5} + 3t, \frac{4}{5} - 4t, 5t)^T$ pro každé iracionální t iracionální hodnoty, tudíž množina M je právě množinou všech racionálních řešení soustavy. $\square$

1.6. Najděte v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & a \\ 2x & - & ay & + & z & = & 1 \end{array}$$

Soustavu si nejprve napíšeme v maticovém tvaru a upravíme na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -a-2 & -5 & 1-2a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & a+2 & 5 & 2a-1 \end{array}\right).$$

Protože levá strana poslední rovnice je vždy nenulová, má soustava pro všechna a řešení. musí jen rozlišit situaci, kdy $a + 2 = 0$, tedy $a = -2$ a situaci, kdy $a \neq -2$.

Nechť nejprve $\mathbf{a} = -\mathbf{2}$. Pak je y volná proměnná a řešíme soustavu s maticí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

Položíme tedy $y = 0$ a dopočítáme $z = -1$ a $x = -2 - 3 \cdot (-1) = 1$. Pro $y = 1$ a dopočítáme hodnoty homogenní soustavy $z = 0$ a $x = -1$, tedy množina všech řešení je tvaru $\{(1, 0, -1)^T + t(-1, 1, 0)^T |\ t \in \mathbb{R}\}$

Nyní nechť $\mathbf{a} \neq -\mathbf{2}$. Potom je volná proměnná z a řešíme soustavu s maticí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & a+2 & 5 & 2a-1 \end{array}\right)$$

Položíme tedy $z = 0$ a dopočítáme $y = \frac{2a-1}{a+2}$ a $x = a - \frac{2a-1}{a+2} = \frac{a^2+1}{a+2}$. Konečně dopočítáme-li pro $z = 1$ hodnoty řešení homogenní soustavy $y = -\frac{5}{a+2}$ a $x = -(3 - \frac{5}{a+2}) = -\frac{3a+1}{a+2}$ a množina všech řešení je proto tvaru

$$\{ \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a-1}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3a+1}{a+2} \\ -\frac{5}{a+2} \\ 1 \end{pmatrix} |\ t \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a-1}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 5 \\ -a-2 \end{pmatrix} |\ t \in \mathbb{R}\}$$

$\square$

16.10.

2. Soustavy rovnic nad obecnými tělesy

Sčítání a násobení v tělese $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ pro prvočíslo p budeme vždy zapisovat obvyklými symboly $+$ a $\cdot$.

2.1. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_1 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Uvědomíme si, že počítání v tělese obsahující jen (ve všech tělesech přítomné) prvky 0 a 1 je velmi snadné, soustavu zapíšeme do matice a s počítáním v $\mathbb{Z}_2$ ji budeme přímočaře upravovat posloupností elementárních úprav:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Nejprve jsme přehodili první a třetí řádek, a poté přičetli (nový) první řádek k druhému a čtvrtému. Dále jsme třetí řádek přičetli ke čtvrtému, pak druhý k třetímu a nakonec jsme zpřeházeli řádku a dostali jsme jediné řešení soustavy $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ a $x_4 = 0$.

Poznamenejme, že jsme ke stejnému výsledku mohli dospět i jinou posloupností elementárních úprav, například standardním použitím Gaussovy eliminace a zpětné substituce. □

2.2. Spočítejte v tělesech:

(a) $\mathbb{Z}_3$ hodnoty 1^{-1}, 2^{-1} a $2^{-1} \cdot (2+2)$,
(b) $\mathbb{Z}_5$ hodnoty 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot ((2+4) \cdot (4+4)^{-1}) + 3$,
(c) $\mathbb{Z}_7$ hodnoty 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, 5^{-1},6^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot ((2+4) \cdot (4+4)^{-1}) + 3$,
(d) $\mathbb{Z}_p$ pro liché prvočíslo p hodnoty 2^{-1} a $(p-1)^{-1}$.

(a) Stačí uvážit definice operací na $\mathbb{Z}_3$ (tedy modulo 3). Protože $1 \cdot 1 = 1$ a $2 \cdot 2 = 1$, dostáváme $1^{-1} = 1$ a $2^{-1} = 2$. Podobně snadno spočteme, že

$$2^{-1} \cdot (2+2) = 2 \cdot 1 = 2.$$

(b) Uvažujeme stejně jako v (a). Vidíme, že v $\mathbb{Z}_5$ máme $2 \cdot 3 = 1$, proto $2^{-1} = 3$ a $3^{-1} = 2$, a ¨protože $4 \cdot 4 = 1$, vidíme, že $4^{-1} = 4$. Dále

$$(-2)^{-1} \cdot ((2+4) \cdot (4+4)^{-1}) + 3 = 3^{-1} \cdot (1 \cdot 3^{-1}) + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 2.$$

(c) Podobně dostáváme nad $\mathbb{Z}_7$, že $2^{-1} = 4$, $3^{-1} = 5$, $4^{-1} = 2$, $5^{-1} = 3$ a $6^{-1} = 6$, neboť $2 \cdot 4 = 3 \cdot 5 = 6 \cdot 6 = 1$ a dále

$$(-2)^{-1} \cdot ((2+4) \cdot (4+4)^{-1}) + 3 = 5^{-1} \cdot (6 \cdot 1^{-1}) + 3 = 3 \cdot 6 + 3 = 0.$$

(d) Protože je p liché , vidíme, že $\frac{p+1}{2} \in \mathbb{Z}_p$ a v tělese $\mathbb{Z}_p$ platí, že $2 \cdot \frac{p+1}{2} = 1$, tudíž $2^{-1} = \frac{p+1}{2}$.

Víme z přednášky, že v jakémkoli tělese je $(-1) \cdot (-1) = 1$, tedy $(-1)^{-1} = (-1)$. Protože v tělese $\mathbb{Z}_p$ máme $(p-1)+1 = 0$, je $p-1$ číslo opačné k číslu 1. To znamená, že $-1 = p-1$ a podle předchozí úvahy tedy $(p-1)^{-1} = p-1$. □

2.3. Najděte v tělese $\mathbb{Z}_5$:

(a) x splňující rovnici $3x+4=1$,

(b) všechna x a y splňující rovnici $4x-3y+1=2$.

(a) Budeme způsobem, na nějž jsme zvyklí například z tělese reálných čísel upravovat rovnici ekvivalentním úpravami. Nejprve od obou stran odečteme hodnotu 4, což v $\mathbb{Z}_5$ znamená přičíst hodnotu 1 (vždyť $-4=1$) a dostaneme ekvivalentní rovnici $3x=2$. Nyní vydělíme trojkou tj. vynásobíme číslem $\frac{1}{3}=3^{-1}=2$ a dostaneme jediné řešení $x=4$.

(b) Postupujeme jako v úloze (a). Nejprve odečteme od obou stran 1 a uvědomíme si, že $-3=2$. Obdržíme rovnici $4x+2y=1$, kde vezmeme $y=s\in\mathbb{Z}_5$ libovolně a zpětnou substitucí za dalšího využití ekvivalentních úprav dopočítáme

$$4x=1-2s=1+3s\Rightarrow x=4^{-1}(1+3s)=4(1+3s)=4+2s.$$

Množina všech řešení je pětiprvková tvaru

$$\{\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\mid s\in\mathbb{Z}_5\}=\{\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\}.$$

□

2.4. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\text{a)}\ \left(\begin{array}{cccc|c}3&1&5&2&1\\3&2&4&6&1\\2&5&6&0&1\end{array}\right),\qquad \text{b)}\ \left(\begin{array}{cccc|c}3&1&5&2&1\\3&2&4&6&2\\2&5&6&0&5\end{array}\right).$$

Opět upravíme rozšířené matici soustavy na odstupňované matici.

a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&5&2&1\\3&2&4&6&1\\2&5&6&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&5&2&1\\0&1&6&4&0\\0&2&5&1&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&5&2&1\\0&1&6&4&0\\0&0&0&0&5\end{array}\right)$$

Protože poslední řádek představuje rovnici $0=5$, která neplatí pro žádný vektor neznámých, je množina všech řešení soustavy prázdná.

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&5&2&1\\3&2&4&6&2\\2&5&6&0&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&5&2&1\\0&1&6&4&1\\0&2&5&1&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&5&2&1\\0&1&6&4&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Tentokrát řešení soustavy existuje a my ho obvyklým způsobem nalezneme zpětnou substitucí pro volbu za volné proměnné $x_3=r$ a $x_4=s$:

$$x_2+6x_3+4x_4=1\Rightarrow x_2=1+x_3+3x_4=1+r+3s,$$

$$\begin{aligned}3x_1+x_2+5x_3+2x_4=1\Rightarrow x_1&=3^{-1}(1+6x_2+2x_3+5x_4)=\\&=5(1+6(1+r+3s)+2r+5s)=5(r+2s)=5r+3s\end{aligned}$$

Našli jsme množinu všech řešení soustavy:

$$\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\0\\1\end{pmatrix}\mid r,s\in\mathbb{Z}_7\}.$$

□

2.5. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Postupujeme stejně jako v předchozích úlohách. Nejprve rozšířenou matici stejnými elementárními úpravami upravíme na odstupňovanou matici a poté najdeme všechna řešení zpětnou substitucí:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Položíme za volné proměnné $x_2 = s$ a $x_5 = t$, kde $s, t \in$ a obvyklým způsobem dopočítáme $x_4 = 1 + 3t$, $x_3 = 3 + 2t$ a $x_1 = 2 + 3s + t$. Nyní zbývá shrnout množinu všech dvaceti pěti řešení soustavy do množiny

$$\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \}$$

□

2.6. Najděte nad tělesem komplexních čísel množinu všech řešení soustavy s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & i & 0 & i-1 \\ 1 & 1-i & 2 & i \end{array}\right).$$

I tentokrát nejprve převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & i & 0 & i-1 \\ 1 & 1-i & 2 & i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 2 & i \\ 1+i & i & 0 & i-1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 2 & i \\ 0 & i-2 & -2-2i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 2 & i \\ 0 & 5 & 2+6i & 0 \end{array}\right).$$

Pro volnou proměnnou $z = t \in \mathbb{C}$ dostáváme $y = -(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i)t$ a

$$x = i - (1-i)y - 2z = i + (1-i)(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i)t - 2t = i + (-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i)t$$

Spočítali jsme, že množina všech řešení soustavy je právě

$$\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C} \} = \{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2+4i \\ -2-6i \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C} \}.$$

□

2.7. Najděte v závislosti na parametru a nad tělesem a) $\mathbb{Z}_5$, b) $\mathbb{Z}_7$ c) $\mathbb{Z}_{11}$ řešení soustavy rovnic z úlohy 1.6.

Stejně jako v úloze 1.6 převedeme soustavu do ekvivalentního odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & a+2 & 5 & 2a-1 \end{array}\right)$$

a provedeme obdobnou diskusi.

Nechť $\mathbf{a} = -\mathbf{2}$. Pak je y volná proměnná a řešíme soustavu s maticí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

V případech b) a c), kdy pracujeme s tělesem charakteristiky různé od pěti je postup stejný jako v 1.6, proto je množina všech řešení opět tvaru $\{(1,0,-1)^T + t(-1,1,0)^T | \; t \in \mathbf{T}\}$ pro těleso $\mathbf{T} = \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}$. V případě a), kdy pracujeme s tělesem $\mathbb{Z}_5$ se nám modulo 5 druhý řádek soustavy vynuluje:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Výše spočítané partikulární řešení po úpravě modulo 5 zůstává v platnosti (a bude tedy tvaru $(1,0,4)^T$), snadno lze ovšem také najít kanonické partikulární řešení pro nulové hodnoty obou volných proměnných $(3,0,0)^T$. Při výpočtu řešení homogenní soustavy máme dvě volné proměnné x_2 a x_3. Obvyklým postupem nyní najdeme nad $\mathbb{Z}_5$ dvě řešení $(4,1,0)^T$ a $(2,0,1)^T$ (jednočlenné) homogenní soustavy, všechna řešení jsou tedy tvaru

$$(1,0,4)^T + t \cdot (4,1,0)^T + s \cdot (2,0,1)^T \qquad \text{pro} \quad s,t \in \mathbb{Z}_5.$$

Zjistili jsme , že všechna řešení tvoří pro $a = -2$ množina:

$$\text{a)}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5\},$$

$$\text{b)}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_7\}, \qquad \text{c)}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_{11}\}.$$

V případě $\mathbf{a} \neq -\mathbf{2}$, je volná proměnná z a stačí využít výsledky úlohy 1.6:

$$\text{a)}\{\begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a+4}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 0 \\ 4a+3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\}, \quad \text{b)}\{\begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a+6}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 5 \\ 6a+5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_7\},$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{a+2} \\ \frac{2a-1}{a+2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 5 \\ 10a+9 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_{11}\}$$

Závěrem poznamenejme, že symbol $\frac{c}{d}$ je v tělese $\mathbb{Z}_p$ výraz, který je třeba dopočítat, tedy že $\frac{c}{d} = c \cdot d^{-1}$. □

23.10.

3. Počítání s maticemi

3.1. Uvažujme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{11}$.

(a) Spočítejte součty $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{C} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$.
(b) Spočítejte součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}$ a $5 \cdot \mathbf{C} \cdot$.
(c) Spočítejte $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T)^T - \mathbf{A}$.

Ve všech případech úlohu vyřešíme nejprve v tělese charakteristiky 0, tedy v reálných číslech a poté, obdobně jako tomu bylo v Příkladu 1.6 výsledek pouze upravíme modulu příslušné prvočíslo.

(a) Postupujeme nejprve přímo podle definice součtu matic:

$$\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&0\\3&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&0+2&-1+0\\1+3&2+5&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&7&2\end{pmatrix}.$$

Na přednášce bylo ukázáno, že je sčítání matic komutativní, nemusíme samozřejmě druhý součet počítat a přímo vidíme, že $\mathbf{C}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&7&2\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ a

$$\mathbf{C}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&2&6\\4&0&2\end{pmatrix}\text{ nad }\mathbb{Z}_7\ \text{ a }\ \mathbf{C}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&2&10\\4&7&2\end{pmatrix}\text{ nad }\mathbb{Z}_{11}.$$

Podobně bylo na přednášce ověřeno, že $\mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T=(\mathbf{B}+\mathbf{C})^T$, tedy nám stačí jen bez dalšího počítání transponovat matici $\mathbf{B}+\mathbf{C}$, abychom dostali $\mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}2&4\\2&7\\-1&2\end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel,

$$\mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}2&4\\2&0\\6&2\end{pmatrix}\text{ nad }\mathbb{Z}_7,\quad\text{a}\quad\mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}2&4\\2&7\\10&2\end{pmatrix}\text{ nad }\mathbb{Z}_{11}.$$

(b) Opět nejprve postupujme bezprostředně podle definice, tentokrát se jedná o definici násobení matic: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1&1\cdot0+2\cdot2&-1\cdot1+2\cdot1\\3\cdot1+5\cdot1&3\cdot0+5\cdot2&-3\cdot1+5\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&1\\8&10&2\end{pmatrix}.$$

Protože bylo na přednášce ověřeno, že $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$, vidíme, že

$$\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}3&4&1\\8&10&2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3&8\\4&10\\1&2\end{pmatrix}.$$

To nám ovšem nepomůže pro výpočet $\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}$, který opět provedeme podle definice:

$$\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&7\\6&10\\2&3\end{pmatrix}.$$

Při výpočtu součinu $\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{C}$ nám pomůže rozklad matice $\mathbf{C}$ na dva bloky $\mathbf{C}=(\mathbf{A}|\mathbf{S})$, kde $\mathbf{A}$ je matice s kterou pracujeme a $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Výpočet nám usnadní jednak to, že jsme již spočítali součin $\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}$ a dále pozorování, že součin $\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{S}$ právě vybere z matice $\mathbf{B}^T$ druhý sloupec:

$$\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{C}=(\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}|\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{S})=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\3&5&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}4&7&1\\6&10&2\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

Konečně $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{B}^T)^T = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C})^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a

$$5 \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 0 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot 5 & 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 15 & 25 & 5 \end{pmatrix}.$$

Našli jsme výsledky v tělese reálných čísel a nyní je upravíme nad oběma konečnými tělesy:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

a $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $5 \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ vše nad tělesem $\mathbb{Z}_7$. Obdobně

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } 5 \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ vše nad tělesem } \mathbb{Z}_{11}.$$

(c) Využijeme početních pravidel a nejprve upravíme:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T)^T - \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T + (\mathbf{A}^T)^T \cdot (\mathbf{B}^T)^T \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{A} =$$

$$= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2).$$

Nyní snadno dopočítáme

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{R}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \quad \text{a} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{11}.$$

□

3.2. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechny matice $\mathbf{X}$ splňující rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, jestliže

$$\text{(a)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(a) Hledaná matice $\mathbf{X}$ musí být zřejmě typu 2×2 tvaru $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pro dva sloupcové vektory, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_7^2$. Užitím definice násobení matic snadno nahlédneme, že pro $\mathbf{X}$ platí, že splňuje rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, právě tehdy když

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Protože mají obě soustavy touž matici levých stran, můžeme soustavy zapsat do jedné matice s oběma vektory pravých stran vpravo a levé strany upravíme posloupností elementárních úprav na odstupňovanou matici:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dostali jsme tedy dvě soustavy s rozšířenými maticemi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní snadno obvyklým způsobem dopočítáme, že první soustavu řeší právě vektory $c \cdot (4,1)^T$ pro všechna $c \in \mathbb{Z}_7$ druhou soustavu řeší právě vektory $(2,0)^T + d \cdot (4,1)^T$ pro všechna $d \in \mathbb{Z}_7$. Zbývá všechna řešení soustav sepsat do řešení maticové rovnice. Tedy $\mathbf{X}$ je řešením maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, právě když $\mathbf{X}$ leží v množině $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \exists c, d \in \mathbb{Z}_7 : \mathbf{x} = c \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} d \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\} =$

$$= \{\begin{pmatrix} 4c & 2+4d \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{Z}_7\}.$$

(b) I tentokrát nejprve snadno zjistíme, že hledaná matice je typu 2×3, sestává ze tří sloupcových vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_7^2$ tak, že $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ a platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stejně jako v (a) budeme hledat řešení všech soustav najednou:

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 5 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 5 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

Matici levých stran se nám postupně podařilo upravit na jednotkovou matici, z níž okamžitě odečteme řešení jednotlivých neznámých:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že existuje právě jedno řešení rovnice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. □

3.3. Uvažujme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a definujme zobrazení $f_\mathbf{A} : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ a $f_\mathbf{B} : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ předpisy $f_\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ a $f_\mathbf{B}(\mathbf{v}) = \mathbf{B}\mathbf{v}$

(a) Rozhodněte, zda je $f_\mathbf{A}$ či $f_\mathbf{B}$ prosté zobrazení.
(b) Rozhodněte, zda je $f_\mathbf{A}$ či $f_\mathbf{B}$ zobrazení na.
(c) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_\mathbf{B}(\mathbf{v}) = (0,0)^T$
(d) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_\mathbf{B}(\mathbf{v}) = (1,2)^T$

(a) Připomeňme, že je zobrazení $f_\mathbf{A}$ prosté, jestliže $f_\mathbf{A}(\mathbf{u}) = f_\mathbf{A}(\mathbf{v}) \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Protože $f_\mathbf{A}(\mathbf{u}) = f_\mathbf{A}(\mathbf{v})$, právě když $f_\mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = f_\mathbf{A}(\mathbf{u}) - f_\mathbf{A}(\mathbf{v}) = 0$, lze ekvivalentně prostotu zobrazení $f_\mathbf{A}$ vyjádřit podmínkou $f_\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0 \Longrightarrow \mathbf{u} = 0$. Tedy nám stačí zjistit, zda mají soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = (0,0)^T$ a $\mathbf{B}\mathbf{x} = (0,0)^T$ nějaké nenulové řešení. V obou případech po jediné ekvivalentní úpravě vidíme, že nenulové řešení existují, v prvním případě například $f_\mathbf{A}((3,1)^T) = (0,0)^T = f_\mathbf{A}((0,0)^T)$ a v druhém příkladě například $f_\mathbf{B}((4,1,1)^T) = (0,0)^T = f_\mathbf{B}((0,0,0)^T)$, proto zobrazení $f_\mathbf{A}$ ani $f_\mathbf{B}$ není podle definice prosté.

(b) Opět se úloha redukuje na otázku řešení soustavy rovnic s danou maticí. Tentokrát se ptáme, zda pro každou pravou stranu existuje řešení. V prvním případě vidíme, že nikoli, například pro pravou stranu $(1,0)^T$ vidíme, že řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = (1,0)^T$ neexistuje. V druhém případě vidíme, že odstupňovaný tvar matice

$\mathbf{B}$ nemá žádný nulový řádek, tedy pivoty každé soustavy s maticí levých stran $\mathbf{B}$ leží v části matice odpovídající levým stranám, proto řešení vždy existuje. Tedy $f_{\mathbf{A}}$ není na, zatímco $f_{\mathbf{B}}$ je zobrazení na $\mathbb{Z}_5^2$.

(c) Stačí, abychom obvyklým způsobem vyřešili homogenní soustavu rovnic s maticí

$$\mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Obvyklým způsobem zjistíme, že vektor $\mathbf{v}$ splňuje $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = (0,0)^T$, právě když leží v množině $\{t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$.

(d) Tentokrát standardně řešíme soustavu rovnic tvaru $\mathbf{Bx} = (1,2)^T$ s maticovým zápisem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Spočítáme jedno partikulární řešení $(1,1,0)^T$ a využijeme výsledku (c), vidíme, že $\mathbf{v}$ splňuje $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = (0,0)^T$, právě když leží v množině $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$. $\square$

30.10.

3.4. Definujme zobrazení $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ předpisem $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ pro racionální matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Spočítejte jádro matice $\mathbf{A}$,
(b) dokažte, že je $f_{\mathbf{A}}$ bijekce,
(c) existuje-li, najděte racionální matici $\mathbf{X}$, pro níž $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_2$,
(d) existuje-li, najděte matici $\mathbf{B}$, pro niž platí $f_{\mathbf{B}} \circ f_{\mathbf{A}} = f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}} = \mathrm{Id}$, tedy $f_{\mathbf{B}} = f_{\mathbf{A}}^{-1}$, kde je $f_{\mathbf{B}}$ definováno předpisem $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = \mathbf{Bv}$.
(e) spočítejte součin $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$.

(a) Jádro matice je právě množina všech řešení homogenní soustavy rovnic s danou maticí, tj. $\operatorname{Ker} \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^2 | \ \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Standardním postupem v jediném kroku upravíme matici $\mathbf{A}$ na odstupňovanou

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

a vidíme, že matice levých stran neobsahuje žádný sloupec odpovídající volné proměnné, tudíž jediné řešení soustavy je triviální a $\operatorname{Ker} \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$.

(b) Máme dokázat, že je zobrazení dané maticí $\mathbf{A}$ prosté a na, tedy máme ukázat, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^2$, pro který $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{v}$. Opět tedy řešíme soustavy rovnic. Uvědomíme-li si, že podle Věty 4.33 z přednášky je každé řešení soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$ tvaru $\mathbf{u} + \operatorname{Ker} \mathbf{A}$ pro nějaké partikulární řešení, stačí pro ověření prostoty zobrazení zjistit, zda je jádro $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$ jednoprvkové. To jsme ovšem už spočítali v úloze (a). Navíc jsme v (a) zjistili, že odstupňovaný tvar matice $\mathbf{A}$ neobsahuje žádný nulový řádek, tedy pro každou pravou stranu $\mathbf{v}$ umíme soustavu $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{v}$ vyřešit. Tím máme ověřeno, že je zobrazení $f_{\mathbf{A}}$ prosté i na.

(c) Budeme postupovat stejně jako v úloze 3.2, tj řešíme dvě soustavy rovnic se stejnou maticí levých stran

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}\,\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a hledanou maticí (existují-li obě řešení) sestavíme ze sloupců $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Obě soustavy přitom upravujeme společně v jedné rozšířené matici.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Postupně jsme odčítali druhý řádek od prvního, přičítali trojnásobek prvního řádku ke druhému, vynásobili první řádek hodnotou -1 a odečetli druhý řádek od prvního, abychom zjistili, že $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Všimněme si, že upravením levé strany matice na jednotkovou znamená, že už nemusíme dopočítávat sloupce matice $\mathbf{X}$, protože se na levé straně upravené matice hledaná matice $\mathbf{X}$ objeví.

(d) Využitím definice zobrazení $f_{\mathbf{A}}$ a $f_{\mathbf{B}}$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2$ dostaneme

$$f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{A}}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}\,.$$

položíme-li tedy $\mathbf{B} = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, tj. vezmeme matici nalezenou v úloze (c), obdržíme pro každé $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^2$

$$f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\,.$$

Tím jsme dokázali, že $f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}} = \mathrm{Id}$. Protože je $f_{\mathbf{A}}$ bijekce, víme že existuje $f_{\mathbf{A}}^{-1}$, proto

$$f_{\mathbf{A}}^{-1} = f_{\mathbf{A}}^{-1} \circ \mathrm{Id} = f_{\mathbf{A}}^{-1} \circ (f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}}) = (f_{\mathbf{A}}^{-1} \circ f_{\mathbf{A}}) \circ f_{\mathbf{B}} = \mathrm{Id} \circ f_{\mathbf{B}} = f_{\mathbf{B}},$$

proto i $f_{\mathbf{B}} \circ f_{\mathbf{A}} = \mathrm{Id}$.

(e) Přímým výpočtem lze snadno zjistit, že $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$. Stejný závěr ovšem plyne také z pozorování úlohy (d), že $f_{\mathbf{B}} \circ f_{\mathbf{A}} = \mathrm{Id}$. $\square$

3.5. Uvažujme matici $\mathbf{B}$ a zobrazení $f_{\mathbf{B}} : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ z úlohy 3.3. nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a definujme zobrazení $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ a $f_{\mathbf{B}} : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ předpisy $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ a $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = \mathbf{B}\mathbf{v}$

(a) Najděte všechny matice $\mathbf{X}$ nad $\mathbb{Z}_5$, pro níž $\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{I}_2$,
(b) najděte všechny matice $\mathbf{Y}$ nad $\mathbb{Z}_5$, pro níž $\mathbf{Y}\mathbf{B} = \mathbf{I}_3$.

(a) Postupujeme obdobně jako v předchozí úloze. Nejprve řešíme soustavy rovnic se společnou maticí levých stran $\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}\,\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Zpětnou substitucí pro hodnotu třetí proměnné 0 získáme dvě partikulární řešení soustav, které umístíme do sloupců matice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Využijeme-li jádro

$$\operatorname{Ker} \mathbf{B} = \{t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$$

nalezené v úloze 3.3, snadno popíšeme množinu všech matic $\mathbf{X}$ splňující $\mathbf{BX} = \mathbf{I}_2$:

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4s & 4t \\ s & t \\ s & t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5\} = \{\begin{pmatrix} 4s+1 & 4t \\ s+4 & t+1 \\ s & t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5\}$$

(b) Tentokrát můžeme buď pomocí transpozice a řešení soustav rovnic přímočaře, byť poněkud těžkopádně spočítat, že požadované matice $\mathbf{Y}$ žádná neexistuje, nebo lze zopakovat úvahu úlohy 3.4(d). Kdyby totiž matice $\mathbf{Y}$ existovala, muselo by pro indukované zobrazení $f_{\mathbf{Y}}$ platit, že $f_{\mathbf{Y}} \circ f_{\mathbf{B}} = \mathrm{Id}$. Zobrazení $f_{\mathbf{B}}$ ovšem není prosté, tedy žádné zobrazení g splňující $g \circ f_{\mathbf{B}} = \mathrm{Id}$ nemůže existovat, tedy množina všech matic $\mathbf{Y}$ je prázdná $\square$

3.6. Existuje-li, najděte matici $\mathbf{X}$ splňující

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_3$ nad tělesem racionálních čísel,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$.

(a) Počítáme obdobně jako v úloze 3.4:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vidíme, že $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Opět upravujeme řádky rozšířené matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Postupně jsme 1) přičetli 1. řádek ke 2. (protože $-3 = 2$ v $\mathbb{Z}_5$), 2) vynásobili 1. řádek číslem 3 a 2. řádek číslem 2 (protože $2^{-1} = 3$ a $3^{-1} = 2$ v $\mathbb{Z}_5$), 3) odečetli

2. řádek od 1. nebo ekvivalentně řečeno přičetli 4-násobek 2. řádku k 1. (protože $-4 = 1$ v $\mathbb{Z}_5$).

Nyní vidíme, že $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

(c) Postupujeme standardně, přičemž nejprve přičteme všechny níže položené řádky k prvnímu a poté první řádek přičteme k níže položeným řádkům:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

13.11.

3.7. Rozhodněte, které z následujících matic jsou regulární. K regulárním maticím najděte jejich inverzní matice.

(a) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel,

(b) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel a nad tělesem $\mathbb{Z}_5$,

(c) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}$ nad tělesem komplexních čísel.

(f) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$,

(g) $\mathbf{G}^T$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$

Potřebujeme nejprve zjistit, zda odstupňovaná matice každé ze uvedených čtvercových matic obsahuje či neobsahuje nulový řádek. V prvním případě jde o singulární a v druhém o regulární matici. Inverzní matice potom počítáme stejně jako v příkladu 3.6.

(a) Jedinou úpravou dostaneme $\mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tudíž matice $\mathbf{B}$ není regulární.

(b) Opět jedinou elementární úpravou dostaneme, že $\mathbf{C} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel, což znamená, že je matice regulární. Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ matici upravíme modulo 5, tedy $\mathbf{C} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a matice $\mathbf{C}$ je nad $\mathbb{Z}_5$ singulární. Zbývá najít inverzní matici $\mathbf{C}$ nad $\mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \sim$$

Dostali jsme, že $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Postupujeme jako v (b) s využitím aritmetiky komplexních čísel, během výpočtu přitom zjistíme, že inverz existuje:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3-i & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1+i & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1-2i}{2} & \frac{i-1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Spočítali jsme, že $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{2} & \frac{i-1}{4} \\ \frac{i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2-4i & i-1 \\ 2i-2 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) Počítáme tentokrát nad $\mathbb{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right).$$

Dostali jsme $\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) Tentokrát pouze využijeme předchozí výsledek a tvrzení z přednášky, které říká, že $(\mathbf{G}^T)^{-1} = (\mathbf{G}^{-1})^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. □

3.8. Napište všechny regulární matice z předchozí úlohy jako součin elementárních matic.

Využijeme postup důkazu Věty 4.66. Stačí nám tedy zaznamenat inverzní elementární úpravy k těm, které jsme prováděli při převodu matice na inverzní, do elementárních matic:

Matici $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel jsme převedli na jednotkovou tak, že jsme nejprve odečetli trojnásobek prvního řádku k druhému, poté vydělili druhý řádek číslem -5 a nakonec odečetli dvojnásobek druhého řádku od prvního. To znamená, že

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

proto hledané elementární matice dostáváme přenásobením rovnosti zleva příslušnými inverzními elementárními maticemi, které jsou samozřejmě také elementární:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

V případě matice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}$ nad tělesem komplexních čísel jsme postupně upravovali: 1) $(1-i)$-násobek prvního řádku jsme odečetli od druhého, 2) prvního řádek jsme vynásobili hodnotou $\frac{1}{1+i}$ a druhý řádek hodnotou $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1-i}{2}$-násobek druhého řádku jsme odečetli od prvního. Nyní zbývá elementární matice opačných elementárních úprav sepsat do matic

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně pro matici $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ stačí zaznamenat provedené elementární úpravy do inverzních elementárních matic $\mathbf{G} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konečně pro matici transponovanou ke $\mathbf{G}$ stačí transponovat celý součin elementárních matic, tedy $\mathbf{G}^T =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

3.9. Rozhodněte, pro která a z tělesa je matice $\mathbf{A}_a$ regulární a pro tato a spočítejte matici $\mathbf{A}_a^{-1}$.

(a) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$,

(b) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2a-1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$,

(c) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Budeme obvyklým způsobem počítat inverzní matice a přitom zároveň provedeme diskusi, pro která a inverzní matice existuje.

(a)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & a & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & a & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Vidíme, že $\mathbf{A}_a$ regulární, právě když $a \neq 0$ a tehdy $\mathbf{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ a^{-1} & 4a^{-1} \end{pmatrix}$

(b) Postupujeme stejně jako v (a):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 2a-1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 2a-1-a^2 & -a & 1 \end{array}\right)$$

Tentokrát je zřejmě matice $\mathbf{A}_a$ regulární, právě když $2a-1-a^2 = -(a-1)^2 \neq 1$, tedy právě když $a \neq 1$. Pro $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ pokračujeme v úpravách:

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{(a-1)^2} & \frac{-1}{(a-1)^2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1-2a}{(a-1)^2} & \frac{a}{(a-1)^2} \\ 0 & 1 & \frac{a}{(a-1)^2} & \frac{-1}{(a-1)^2} \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $\mathbf{A}_a^{-1} = \frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} 1-2a & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Nejprve si všimněme, že pro $a = 0$ je poslední sloupec matice nulový, tedy matice $\mathbf{A}_0$ je singulární. Dále uvažujme jen $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4a^2 & 1 & 4a & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4a^2 & 1 & 4a+3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a^{-1} & 3a^{-1} & 2a^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4a^2 & 1 & 4a+3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

Nyní snadno dopočítáme, že $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a^{-1} & 3a^{-1} & 2a^{-1} \\ 0 & 2 & 3 \\ \frac{4}{a^2} & \frac{a+2}{a^2} & \frac{3}{a^2} \end{pmatrix}$ pro $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$. □

3.10. Spočítejte součiny reálných matic

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

(a) Označme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Rozšíříme-li matici $\mathbf{A}$ o matici $\mathbf{B}$ a budeme-li vzniklou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ upravovat stejně jako v předchozích úlohách takovými elementárními úpravami, abychom vlevo obdrželi jednotkovou matici, snadno nahlédneme, že

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \sim \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (\mathbf{I}_2|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}),$$

Tedy vpravo dostaneme hledaný součin $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Počítejme:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 5 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 & 7 \\ -3 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. □

(b) Označme $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Využijeme-li Tvrzení 4.20 a 4.65, dostaneme $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}^{-1})^T = (\mathbf{D}^{-1})^T \cdot \mathbf{C}^T = (\mathbf{D}^T)^{-1} \cdot \mathbf{C}^T$, a proto můžeme postupovat stejným způsobem jako v bodu (a), ovšem pro součin transponovaných matic v obráceném pořadí:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 12 & 8 & 8 & -4 & 4 \\ 12 & 9 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & 18 & -27 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $(\mathbf{D}^T)^{-1} \cdot \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ -8 & 13 & 2 \end{pmatrix}$, a proto $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -9 & 13 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. □

3.11. Existuje-li, najděte LU rozklad reálné matice:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Všimněme si, že stačí provést jedinou elementární úpravu třetího typu, abychom z matice $\mathbf{A}$ dostali odstupňovanou matici $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, což můžeme zapsat v maticové podobě pomocí násobení zleva příslušnou elementární maticí:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Uvědomíme-li si, že inverzní matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ je rovněž dolní trojúhelníková s jednotkami na diagonále a přenásobíme-li výše uvedenou rovnost zleva maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},$$

odkud vidíme, že LU rozklad matice $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) I tentokrát budeme matici $\mathbf{B}$ upravovat elementárními úpravami. Příslušné úpravy si budeme pamatovat a poté si je přepíšeme v maticovém zápisu jako součin elementárních matic:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = \mathbf{U}.$$

Při upravování jsme nepotřebovali přehazovat řádky (ani násobit řádek nenulovým skalárem), tedy dostali jsme $\mathbf{L}_k \dots \mathbf{L}_1 \mathbf{B} = \mathbf{U}$, kde $\mathbf{L}_i$ jsou všechno elementární transformační matice odpovídající přičtení výše položeného řádku k řádku níže položenému:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{L}_i$ jsou zřejmě dolní trojúhelníkové s jednotkami na diagonále a okamžitě vidíme, že součin $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1} \dots \mathbf{L}_k^{-1}$ rovněž dolní trojúhelníková matice s jednotkami na diagonále. Navíc $\mathbf{B} = \mathbf{LU}$. Tudíž jsme našli LU rozklad matice $\mathbf{B}$. Vidíme, že součin matic $\mathbf{L}_1^{-1} \dots \mathbf{L}_k^{-1}$ obsahuje na příslušných pozicích hodnoty jednotlivých elementárních matic (tj. i-tý řádek a j-tý sloupec, $i > j$, obsahuje hodnotu c_{ij}, právě když jsme během Gaussovy eliminace odečítali od i-tého řádku matice $\mathbf{B}$ a

c_{ij}-násobek jejího j-tého řádku):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Našli jsme tedy (jednoznačně určený) LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že výsledná matice $\mathbf{L}$ obsahuje na i-tém řádku a j-tém sloupci právě opačnou hodnotu k násobku, jímž jsme násobili j-tý řádek při jeho přičítání k i-tému sloupci během elementárních úprav (tedy během Gaussovy eliminace). To, že se jedná o obecný způsob, jak nalézt dolní trojúhelníkovou matici LU rozkladu matice ukazuje důkazu Věty 4.69 z přednášky a na témže místě je ukázáno, že horní trojúhelníková matice LU rozkladu je právě odstupňovaná matice, kterou získáme Gaussovou eliminací.

(c) Tentokrát budeme postupovat jako v důkazu Věty 4.69, tedy stačí gaussovsky upravovat matici $\mathbf{C}$ a příslušné (opačné) hodnoty sestavovat do matice $\mathbf{L}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

kde jsme postupně odečetli 1) -1-násobek 1. řádku od 2., 2) 1-násobek 1. řádku od 3. a 3) 2-násobek 2. řádku od 3. Tedy dostáváme tedy LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Opět upravujeme gaussovou eliminací matici $\mathbf{D}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Provedené úpravy zaznamenáme do matice $\mathbf{L}$ a dostaneme hledaný LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

20.11.

3.12. Pomocí LU rozkladu reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ spočítejte všechna řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}$ pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)$.

Máme-li LU rozklad matice $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ a uvažujeme-li nehomogenní soustavu rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}$, potom můžeme úlohu rozdělit na dva jednodušší úkoly, najít nejprve řešení soustavy $\mathbf{L}\mathbf{z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}$ a poté soustavy $\mathbf{U}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{z}^{\mathrm{T}}$. V obou případech počítáme s trojúhelníkovými maticemi, takže při výpočtu už jen dosazujeme, aniž musíme matice jakkoli dále gaussovsky upravovat.

LU rozklad matice jsme už spočítali: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Potom pro pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)$ spočítáme neznámé $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ přímou substitucí $z_1 = y_1 = -3$, dále $-1z_1 + z_2 = 3 + z_2 = y_2 = 2$, tedy $z_2 = -1$ a konečně $z_3 = -1 - 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) = 4$.

Nyní počítáme soustavu $\mathbf{U}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{z}^{\mathrm{T}}$ a tentokrát tedy postupujeme zpětnou substitucí: $2x_3 = z_3$, tedy $x_3 = 2$, dále $x_2 = \frac{-1-1\cdot 2}{3} = -1$ a $x_1 = \frac{-3-1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2} = 1$. □

3.13. Existuje-li, najděte LU rozklad matic:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$, (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$,

(c) $\mathbf{B}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$,

Postupujeme v 3.11 s počítáním v tělesech $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$, tedy gaussovsky upravíme matici na matici $\mathbf{U}$ a příslušné hodnoty sepíšeme do matice $\mathbf{L}$:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a dostáváme LU rozklad $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítali jsme LU rozklad matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítali jsme nad $\mathbf{Z}_7$ LU rozklad matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

3.14. Pro reálnou matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ověřte, že nemá LU-rozklad, najděte permutační matici $\mathbf{P}$ tak, aby matice $\mathbf{PA}$ měla LU rozklad a ten spočítejte.

Budeme matici postupně upravovat Gaussovu eliminaci, tj. budeme kanonickým způsobem, používat pouze přehazování řádků a přičítání násobku výše položeného k níže položenému řádku. Oba typy úprav budeme zaznamenávat (pravý sloupec jen čísluje řádky):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & \mathit{1} \\ -1 & -1 & -2 & 1 & \mathit{2} \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \mathit{3} \\ 2 & 2 & -1 & 1 & \mathit{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & \mathit{1} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \mathit{2} \\ 0 & -1 & -4 & -3 & \mathit{3} \\ 0 & 0 & -5 & -3 & \mathit{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & \mathit{1} \\ 0 & -1 & -4 & -3 & \mathit{3} \\ 0 & 0 & -5 & -3 & \mathit{4} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \mathit{2} \end{array}\right).$$

Tedy permutační matice, kterou potřebujeme změnit původní matici $\mathbf{A}$, odpovídá permutaci řádků zachycené v pravém sloupci, čili $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Původním transformacím typu přičtení výše položeného řádku k níže položenému odpovídala matice $\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, my ale musíme adekvátně matici $\mathbf{P}$, jako jsme to udělali i v průběhu důkazu Věty 5.4, změnit polohu upravovaných řádků, takže dostáváme LU rozklad matice $\mathbf{PA}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

3.15. Existuje-li, najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_3$ všechny matice $\mathbf{X}$ splňující

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_2$,

(b) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3$.

(a) Počítáme obdobně jako v úlohách 3.2 a 3.6:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Nyní zpětnou substitucí snando zjistíme, že $\mathbf{X} \in \{ \begin{pmatrix} 2+2s & 2+2t \\ 1 & 2 \\ s & t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_3 \}$.

(b) Nyní buď můžeme zjistit, že hledaná matice $\mathbf{X}$ neexistuje, stejnými prostředky jako v předchozí úloze, nebo si všimneme, že otázka je ekvivalentní podmínce

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in f_{\mathbf{A}^T}(\mathbb{Z}_3^2)$$

kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a zobrazení $f_{\mathbf{A}^T} : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^3$ je dáno předpisem $f_{\mathbf{A}^T}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}^T \mathbf{v}$. Ovšem $f_{\mathbf{A}^T}(\mathbb{Z}_3^2)$ je právě řádkový vekltorový prostor matice $\mathbf{A}$, tedy má (nejvýše) devět prvků, zatímco podprostor, který by obsahoval všechny vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ by musel obsahovat všechny jejich lineární kombinace, tedy všechny vektory lineárního prostoru $\mathbb{Z}_3^3$, tedy 27 různých vektorů, což není možné. Požadovaná matice tudíž neexistuje. $\square$

3.16. Najděte čtvercovou matici $\mathbf{A}$ nad tělesem T řádu n splňující podmínky $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n$ a $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}_n$, jestliže

(a) $n = 1$ a $T = \mathbb{R}$,
(b) $n = 2$ a $T = \mathbb{R}$,
(c) $n = 2$ a $T = \mathbb{Z}_5$,
(d) $n = 3$ a $T = \mathbb{R}$,
(e) $n = 4$ a $T = \mathbb{Z}_2$.

(a) Čtvercové matice řádu 1 odpovídají prvkům těles, tedy se ptáme, kdy $a^2 = 1$ a $a \neq 1$ nad reálnými čísly. Okamžitě vidíme, že podmínku splňuje pouze matice (-1).

(b) V úloze nám může pomoct geometrický náhled. Uvážíme-li matici zobrazení $f_{\mathbf{A}}$, hledáme taková zobrazení, která jsou sama k sobě inverzní. Ta ovšem snadno najdeme mezi symetriemi, například osová souměrnost podle osy x či y nebo souměrnost podle průsečíku os jsou zobrazení sama k sobě inverzní. Nyní stačí nahlédnout, že $\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je maticí souměrnosti podle osy x, $\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je maticí souměrnosti podle osy y a $\mathbf{A}_o = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je maticí souměrnosti podle počátku souřadnic, a že $\mathbf{A}_x^2 = \mathbf{A}_y^2 = \mathbf{A}_o^2 = \mathbf{I}_2$.

(c) V tomto případě nám sice geometrická představa chybí, ale algebraické důvody ukazují, že předchozí příklady matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ splňují podmínku $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$. Poznamenejme ovšem, že existují i další matice splňují $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$ například matice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) Tentokrát můžeme použít geometrickou úvahu z (b), abychom si uvědomili, že osové souměrnosti s maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

symetrie podle rovin určených dvojicí os s maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

stejně jako středová symetrie s maticí $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ naši podmínku splňují.

(e) Nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ platí, že $-1 = 1$, tedy úvahu z (b) využít nemůžeme. Přesto například matice $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ z úlohy 3.7(h) podmínku $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}_4$ splňuje.

$\square$

Další úlohy

(1) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

(a) $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & u & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4u & = & 0 \\ x & + & 4y & & & & & = & 0 \end{array}$

(2) Najděte nad tělesy $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ aspoň všechna soustavy rovnic:
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & u & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4u & = & 0 \\ x & + & 4y & & & & & = & 0 \end{array}$$

(3) Existuje-li, najděte nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbf{C}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení soustavy rovnic:
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}$$

(4) Vyřešte v tělese $\mathbb{Z}_7$ rovnici $5 \cdot x + 3 = 4^{-1} + 4$.

(5) Najděte pro parametr a nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

(6) Najděte nad tělesy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

(7) Uvažujme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesy T: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$. Pro každé těleso uvažujme zobrazení $\varphi_A : T^3 \to T^2$, $\psi_A : T^2 \to T^3$, $\varphi_B : T^4 \to T^3$, $\psi_B : T^3 \to T^4$ dané předpisy $\varphi_A(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$, $\psi_A(\mathbf{v}) = \mathbf{A}^T\mathbf{v}$, $\varphi_B(\mathbf{v}) = \mathbf{B}\mathbf{v}$, $\psi_B(\mathbf{v}) = \mathbf{B}^T\mathbf{v}$.
   (a) Rozhodněte, která ze zobrazení φ_A, ψ_A, φ_B, ψ_B, $\varphi_A\varphi_B$, $\psi_B\psi_A$ jsou prostá.
   (b) Rozhodněte, která ze zobrazení φ_A, ψ_A, φ_B, ψ_B, $\varphi_A\varphi_B$, $\psi_B\psi_A$ jsou na.
   (c) Najděte u zobrazení φ_A, ψ_A, φ_B, ψ_B, $\varphi_A\varphi_B$, $\psi_B\psi_A$ všechny vektory, které se zobrazí na nulový vektor.

(8) Pro komplexní matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 3-i & 1 \\ 2-i & -i & 1+i \\ 1 & 1+2i & 1-2i \end{pmatrix}$,
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-3i & 2+3i & 1 \\ 2+i & 1+2i & i \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1-4i & 3 & 0 \\ -i & i & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) spočítejte $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T$,

(b) existuje-li, najděte matici $\mathbf{X}$ splňující rovnost $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C}$.
(c) existuje-li, najděte matici inverzní k matici $\mathbf{A}$ a k matici $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T$,
(d) dokažte, že matice $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$ není regulární,

(9) Rozhodněte, zda jsou nad tělesy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ regulární matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

(10) Tam, kde je to možné, najděte inverzní matice, rozklad na součin elementárních matic a LU rozklad k maticím z předchozí úlohy.

(11) Spočítejte $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)^{-1}$ nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$.

(12) Existují-li najděte inverzní matice, rozklady na součin elementárních matic a LU rozklady k maticím $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 15 & 16 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \\ 12 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ nad tělesy $\mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_{19}$, $\mathbb{Z}_{53}$ a $\mathbb{Z}_{103}$.

(13) Rozhodněte, pro která $a \in \mathbf{C}$ je matice $\mathbf{A}_a$ regulární, a pro tato a spočítejte matici $\mathbf{A}_a^{-1}$:
(a) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 \end{pmatrix}$,
(b) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a-1 & 3 \\ a+1 & 2a \end{pmatrix}$,
(c) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
(d) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a-1 & a & a+2 \\ 3a & 1 & a-1 \\ a+1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$,

(14) Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ je matice $\mathbf{A}_a$ regulární, a pro tato a spočítejte matici $\mathbf{A}_a^{-1}$:

(a) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 2a & 3a \\ 4a & a+2 \end{pmatrix}$, (c) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ a & 1 & a \\ 2a & 3a & 6 \end{pmatrix}$,

(d) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+2 & a \\ a & a & a+3 \end{pmatrix}$, (e) $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{pmatrix}$.

(15) Rozhodněte, pro která $a, b, c \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbf{A}_{a,b,c}$ regulární, a pro tato a spočítejte matici $\mathbf{A}_{a,b,c}^{-1}$:

(a) $\mathbf{A}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ c & b \end{pmatrix}$, (c) $\mathbf{A}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.