

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali).

Časový limit je 120 minut a spolu s body za d.ú. (max.15 bodů) je třeba získat aspoň 60 bodů.

1. (4 body) Definujte dvěma způsoby pojem normální podgrupy (přes rozklady, pomocí konjugace). Uveďte příklad grupy \mathbf{G} , její normální podgrupy \mathbf{N} a její nenormální podgrupy \mathbf{H} .

2. (4 body) Definujte pojem algebraicky uzavřeného tělesa. Uveďte aspoň dvě algebraicky uzavřená podtělesa tělesa \mathbb{C} .

3. (6 bodů) Formulujte větu, která dává do souvislosti konstruovatelnost pravítkem a kružítkem se stupněm jistých tělesových rozšíření. Uveďte všechny předpoklady a pečlivě vysvětlete značení!

4. (6 bodů) Spočítejte stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/3}) : \mathbb{Q}]$?

5. (7 bodů) Spočítejte minimální polynom prvku $\frac{1}{2\sqrt{3}-2}$ nad \mathbb{Q} .

6. (6 bodů) Pro která n je zobrazení $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}^*$, $x \mapsto i^x$, homomorfismus těchto grup?

7. (8 bodů) Uveďte nějaké kořenové nadtěleso \mathbf{S} polynomu $f = x^3 - x + 1$ nad tělesem \mathbb{Z}_3 . Kolik má toto nadtěleso prvků?

8. (12 bodů) Bud' $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ tělesa a $a \in S$ prvek algebraický nad \mathbf{T} . Dokažte, že $\mathbf{T}(a) = \mathbf{T}[a]$. Vycházejte z faktu, že $T[a] = \{f(a) : f \in T[x]\}$.

9. (16 bodů) Dokažte, že faktorokruh komutativního okruhu s jednotkou podle maximálního ideálu je těleso. Formulujte všechna tvrzení, která používáte.

10. (16 bodů) Bud' $\mathbf{T} \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{U}$ tělesa taková, že \mathbf{S} i \mathbf{U} jsou rozkladovým nadtělesem nějakých polynomů nad \mathbf{T} . Dokažte, že $\mathbf{Gal}(\mathbf{U}/\mathbf{S}) \trianglelefteq \mathbf{Gal}(\mathbf{U}/\mathbf{T})$ a $\mathbf{Gal}(\mathbf{U}/\mathbf{T}) / \mathbf{Gal}(\mathbf{U}/\mathbf{S}) \simeq \mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbf{T})$.