PÍSEMKY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

Úloha 1 (16.10)**.** (cvičení od 12:20): Pomocí Euklidova algoritmu spočítejte hodnotu $\gcd(1157, 494)$ a nadjděte taková celá čísla x a y, aby $x > 0$ a $\gcd(1157, 494) = 494x + 1157y$.

(cvičení od 14:00): Pomocí Euklidova algoritmu najděte kladné řešení kongruence $513x \equiv 1 \pmod{1054}$.

Řešení.
(cvičení od 12:20):
Pro hodnoty 1157 a 494 a postupujeme Euklidovým algoritmem:
$169 = 1157 - 2 \cdot 494$,
$156 = 494 - 2 \cdot 169 = 494 - 2 \cdot = 2 \cdot (1157 - 2 \cdot 494) = 5 \cdot 494 - 2 \cdot 1157$,
$13 = 169 - 156 = (1157 - 2 \cdot 494) - (5 \cdot 494 - 2 \cdot 1157) = 3 \cdot 1157 - 7 \cdot 494$.
Protože $13|156$ máme $\gcd(1157, 494) = 13$. Našli jsme řešení $x = -7$ a $y = 3$, které nevyhovuje požadavku na kladnost x. Upravíme tedy rovnost

$$13 = 3 \cdot 1157 - 494 \cdot 1157 + 1157 \cdot 494 - 7 \cdot 494 = (3 - 494) \cdot 1157 + (1157 - 7) \cdot 30$$

dostáváme vyhovující řešení $x = 1150$ a $y = -491$.

(cvičení od 14:00):
Nejprve použijeme Euklidův algoritmus na hodnoty 1054 a 513
$28 = 1054 - 2 \cdot 513$,
$9 = 513 - 18 \cdot 28 = 513 - 18 \cdot (1054 - 2 \cdot 513) = 37 \cdot 513 - 18 \cdot 1054$,
$1 = 28 - 3 \cdot 9 = (1054 - 2 \cdot 513) - 3 \cdot (37 \cdot 513 - 18 \cdot 1054) = 55 \cdot 1054 - 113 \cdot 513$,
Zjistili jsme, že $513 \cdot (-113) \equiv 1 \pmod{1054}$. Protože $-113 \equiv 1054 - 113 \equiv 941 \pmod{1054}$, dostáváme, že $513 \cdot 941 \equiv 1 \pmod{1054}$, tedy hledaným řešením je například $x = 941$. □

Úloha 2 (23.10)**.** (cvičení od 12:20): Najděte všechna reálná rešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & & & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

(cvičení od 14:00): Najděte všechna reálná rešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 7y & + & 7z & = & -7 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

Řešení. V obou případech si soustavu nejprve zapíšeme do rozšířené matice a poté ji pomocí posloupnosti ekvivalentních úprav převedeme do odstupňovaného tvaru.

(cvičení od 12:20):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

Vidíme, že poslední tři rovnice určují stejné množiny řešení, stačí tedy nejprve najít jedno řešení nehomogenní soustavy a všechna řešení odpovídající homogenní soustavy s maticemi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix}$$

Zpětnou substitucí pro volbu $z = 0$ spočítáme $y = 2 - 3z = 2$ a $x = 1 - y + z = -1$, tedy trojice $(x, y, z)^T = (-1, 2, 0)^T$ je hledaným jedním řešením nehomogenní soustavy. Nyní opět zvolíme nenulovou hodnotu $z = 1$ a zpětnou substitucí dopočítáme tentokrát homogenní soustavu rovnic: $y = -3z = -3$ a $x = -y + z = 4$. Zjistili jsme, že množina $\{t \cdot (4, -3, 1)^T |\ t \in \mathbf{R}\}$ tvoří množinu všech reálných řešení homogenní soustavy. Proto je $(x, y, z)^T$ řešením zadané soustavy, právě když

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R}\} = \{ \begin{pmatrix} -1 + 4t \\ 2 - 3t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

(cvičení od 14:00):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 7 & -7 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 & -7 \\ 6 & 9 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & -11 \end{array}\right).$$

Vidíme, že poslední dvě rovnice jsou stejné, stačí tedy nejprve najít jedno řešení nehomogenní soustavy a všechna řešení odpovídající homogenní soustavy s maticemi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & -11 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{5} & 8 \end{pmatrix}$$

Zpětnou substitucí pro volbu $z = 0$ spočítáme $y = -\frac{11}{5}$ a $x = \frac{4+2\cdot\frac{11}{5}}{3} = \frac{42}{15} = \frac{14}{5}$, proto je trojice $(x, y, z)^T = (\frac{14}{5}, -\frac{11}{5}, 0)^T$ hledaným jedním řešením nehomogenní soustavy. Nyní zvolíme nenulovou hodnotu například $z = 5$ a zpětnou substitucí dopočítáme tentokrát homogenní soustavu rovnic: $y = -\frac{8z}{5} = -\frac{8\cdot 5}{5} = -8$ a $x = \frac{z-2y}{3} = \frac{5+2\cdot 8}{3} = \frac{21}{3} = 7$. Zjistili jsme, že množina $\{t \cdot (7, -8, 5)^T |\ t \in \mathbf{R}\}$ tvoří množinu všech reálných řešení homogenní soustavy. Proto je $(x, y, z)^T$ řešením zadané soustavy, právě když

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \{ \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{11}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R}\} = \{ \begin{pmatrix} \frac{14}{5} + 7t \\ -\frac{11}{5} - 8t \\ 5t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

$\square$

Úloha 3 (30.10)**.** (cvičení od 12:20): Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_{97}$ řešení rovnice

$$95 \cdot (57x + 64) = 88.$$

(cvičení od 14:00): Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ všechna řešení soustavy lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Řešení.

(cvičení od 12:20):

Postupně upravujeme rovnici (lze zvolit řadu různých efektivních cest, předvedeme jen jednu):

$$95 \cdot (57x + 64) = 88$$

$$-2 \cdot (57x + 64) = -9 \mid \cdot (-1)$$

$$2 \cdot (57x + 64) = 9$$

$$17x + 31 = 9 \mid -31$$

Nyní můžeme pomocí Euklidova algoritmu spočítat $17^{-1} = 40$, přenásobit touto hodnotou (nebo postupně například číslem 4 a pak 10) obě strany rovnice a dopočítat výsledek, nebo budeme dále upravovat:

$$17x = -22 \mid \cdot 6$$

$$5x = -35$$

$$5x = -5 \cdot 7$$

Nyní vykrátíme hodnotou 5 a dostaneme $x = -7 = 90$.

(cvičení od 14:00):

Nejprve upravíme matici posloupností elementárních úprav na odstupňovanou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Stačilo tedy přičíst čtyřnásobek prvního řádku k druhému a první řádek k třetímu. Nyní najdeme zpětnou substitucí jedno řešení $(3^{-1} \cdot 4, 0, 0, 0)^T = (6, 0, 0, 0)^T$ a poté spočítáme tři řešení soustavy:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3^{-1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -6 \cdot 3^{-1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \cdot 3^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítali jsme, že všechna řešením zadané soustavy tvoří množinü

$$\{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_2, t_3, t_4 \in \mathbf{Z}_7\}.$$

$\square$

Úloha 4 (6.11). (cvičení od 12:20): Definujme pro každé $a \in \mathbf{Z}_5$ zobrazení $f_a : \mathbf{Z}_5^2 \to \mathbf{Z}_5^2$ předpisem $f_a(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}$. Pro každé $a \in \mathbf{Z}_5$ rozhodněte, zda je f_a prosté, na a najděte všechny vektory, pro které a) $f_a(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a b) $f_a(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(cvičení od 14:00): Definujme pro každé $a \in \mathbf{Z}_{11}$ zobrazení $g_a : \mathbf{Z}_{11}^3 \to \mathbf{Z}_{11}^2$ předpisem $g_a(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 & a & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}$. Pro každé $a \in \mathbf{Z}_{11}$ rozhodněte, zda je g_a prosté, na a najděte všechny vektory, pro které $g_a(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Řešení.
(cvičení od 12:20):

Protože vztah $f_a(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ představuje soustavu lineárních rovnic s parametrem a, budeme rovnou pracovat s maticovým zápisem soustavy $f_a(\mathbf{v}) = (1,4)^T$, který upravíme na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & a & 1 \\ 1 & a+1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 4 \\ 2 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 4 \\ 0 & 4a+3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 4 \\ 0 & a+2 & 2 \end{array}\right).$$

Z levé stranu upravené, tedy odstupňované matice vidíme, že řešení pro libovolnou pravou stranu existuje, právě když $a + 2 \neq 0$ a to nastává právě tehdy, když je existující řešení pro danou pravou stranu jednoznačné (tj. právě když nemáme žádnou volnou proměnou). To znamená, že f_a je prosté, právě když je na a to platí, právě když $a \neq 3$.

Dále spočítáme, že pro $a = 3$ je $f_3(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, právě když $\mathbf{v} \in \{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{Z}_5\}$ a zjevně žádné $\mathbf{v}$ splňující $f_3(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\}$ neexistuje (což odpovídá rovnici $0 = 2$).

Nechť $a \neq 3$. Pak $f_a(\mathbf{v}) = (0,0)^T$ splňuje právě $\mathbf{v} = (0,0)^T$ a $f_a(\mathbf{v}) = (1,4)^T$ má rovněž jediné řešení, které najdeme zpětnou substitucí $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (2a+1) \cdot (a+2)^{-1} \\ 2 \cdot (a+2)^{-1} \end{pmatrix}$.

(cvičení od 14:00):

Protože vztah $g_a(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ můžeme chápat jako soustavu lineárních rovnic s parametrem a, budeme pracovat se zápisem soustavy $g_a(\mathbf{v}) = (1,0)^T$ do rozšířené matice, který upravíme na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & a & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & a & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & a+5 & a+2 & 1 \end{array}\right).$$

Z levé stranu upravené matice vidíme, že řešení pro libovolnou pravou stranu existuje, prtotože v odstupňovaném tvaru má matice homogenní soustavy oba řádky nenulové. Zároveň vidíme, že není pro žádné a jednoznačně určené, neboť máme k dispozici vždy volnou proměnou (buď druhou nebo třetí v závislosti na a). Tudíž g_a není nikdy prosté a je vždy na.

Pokud $a \in \mathbf{Z}_{11} \setminus \{6\}$, je volnou proměnnou třetí neznámá a snadno tedy najdeme zpětnou substitucí partikulární řešení $(9 \cdot (a+5)^{-1}, (a+5)^{-1}, 0)^T$ a jedno řešení homogenní soustavy $(a, 2+a, 6-a)^T$

Jestliže je $a = 6$, pak řešíme soustavu s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{array}\right)$, opět najdeme zpětnou substitucí partikulární řešení $(1,0,7)^T$ i řešení homogenní soustavy $(9,1,0)^T$

Zjistili jsme, že $g_a(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, právě když $\mathbf{v} \in \{ \begin{pmatrix} \frac{9}{a+5} \\ \frac{1}{a+5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2+a \\ 6-a \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{Z}_{11} \}$ v případě, že $a \neq 6$, a právě když $\mathbf{v} \in \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{Z}_{11} \}$ v případě $a = 6$. $\square$

Úloha 5 (13.11)**.** (cvičení od 12:20): Je-li $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, spočítejte $\mathbf{M}^{-1}$ a $(\mathbf{M}^T)^{-1}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

(cvičení od 14:00): Je-li $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, spočítejte $\mathbf{N}^{-1}$ a $(\mathbf{N}^T)^{-1}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

Řešení.
(cvičení od 12:20):
Vytvoříme rozšířenou matici $(\mathbf{M}|\mathbf{I}_3)$, kterou posloupností elementárních řádkových úprav převedeme na matici s jednotkovou pravou částí: $(\mathbf{M}|\mathbf{I}_3) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Dostali jsme $\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ a $(\mathbf{M}^T)^{-1} = (\mathbf{M}^{-1})^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(cvičení od 14:00):
Vytvoříme rozšířenou matici $(\mathbf{N}|\mathbf{I}_3)$ a tu posloupností elementárních řádkových úprav převedeme na matici, v jejíž pravé části je jednotková matice: $(\mathbf{N}|\mathbf{I}_3) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Dostali jsme $\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a $(\mathbf{N}^T)^{-1} = (\mathbf{N}^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. $\square$

Úloha 6 (20.11)**.** (cvičení od 12:20): Rozhodněte, pro která reálná a je matice $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 2a & a+1 \\ a & a+2 \end{pmatrix}$ regulární a pro tato a spočítejte matici $\mathbf{A}_a^{-1}$.

(cvičení od 14:00): Rozhodněte, pro která komplexní a je matice $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 2 & a+3 \\ a & a+1 \end{pmatrix}$ regulární a pro tato a spočítejte matici $\mathbf{A}_a^{-1}$.

Řešení.
(cvičení od 12:20):
Budeme pomocí elementárních úprav upravovat rozšířenou matici $(\mathbf{A}_a|\mathbf{I}_2)$ a budeme se ji snažit převést na matici s jednotkovou pravou částí. Přitom zároveň zjistíme, pro která a to provést nejde, tedy kdy $\mathbf{A}_a$ není regulární:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2a & a+1 & 1 & 0 \\ a & a+2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & a+2 & 0 & 1 \\ 2a & a+1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & a+2 & 0 & 1 \\ 0 & -a-3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Nyní vidíme, že je matice $\mathbf{A}_a$ regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, -3\}$. Další úpravy budeme tedy dělat jen pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, -3\}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & a+2 & 0 & 1 \\ 0 & -a-3 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & a+2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a+3} & \frac{2}{a+3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{a+2}{a+3} & \frac{-a-1}{a+3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a+3} & \frac{2}{a+3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a+2}{a(a+3)} & \frac{-a-1}{a(a+3)} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a+3} & \frac{2}{a+3} \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $\mathbf{A}_a^{-1} = \frac{1}{a(a+3)} \cdot \begin{pmatrix} a+2 & -a-1 \\ -a & 2a \end{pmatrix}$, jestliže $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, -3\}$.

(cvičení od 14:00):
Pomocí elementárních úprav upravujeme rozšířenou matici $(\mathbf{A}_a|\mathbf{I}_2)$, kterou se budeme snažit převést na matici s jednotkovou pravou částí. Přitom zároveň zjistíme, pro která a to provést nejde, tedy kdy $\mathbf{A}_a$ není regulární:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & a+3 & 1 & 0 \\ a & a+1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & a+3 & 1 & 0 \\ -2a & -2a-2 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & a+3 & 1 & 0 \\ 0 & a^2+a-2 & a & -2 \end{array}\right).$$

Vidíme, že je matice $\mathbf{A}_a$ regulární, právě když $a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1) = 0$, což nastává, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$. Další úpravy proto budeme dělat jen pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & a+3 & 1 & 0 \\ 0 & a^2+a-2 & a & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & a+3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{a^2+a-2} & \frac{-2}{a^2+a-2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{-2(a+1)}{a^2+a-2} & \frac{2(a+3)}{a^2+a-2} \\ 0 & 1 & \frac{a}{a^2+a-2} & \frac{-2}{a^2+a-2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-a-1}{a^2+a-2} & \frac{a+3}{a^2+a-2} \\ 0 & 1 & \frac{a}{a^2+a-2} & \frac{-2}{a^2+a-2} \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $\mathbf{A}_a^{-1} = \frac{1}{(a+2)(a-1)} \cdot \begin{pmatrix} -a-1 & a+3 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, jestliže $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$. $\square$

Úloha 7 (27.11). (cvičení od 12:20): Najděte nějakou bázi podprostoru $U = \langle \begin{pmatrix}5\\6\\4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\4\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\5\\1\\6\end{pmatrix} \rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^5$ nad nad tělesem $\mathbf{Z}_7$.

(cvičení od 14:00): Najděte bázi podprostoru $U = \langle \begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\2\\0\end{pmatrix} \rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^4$ nad nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

Řešení.
(cvičení od 12:20):
Seřadíme si vektory generující podprostor U do řádků matice a tu upravíme na odstupňovanou:

$$\begin{pmatrix}5&6&4&2&1\\3&4&4&0&5\\3&6&5&1&6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}5&6&4&2&1\\0&6&3&3&3\\0&1&4&4&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}5&6&4&2&1\\0&6&3&3&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Nenulové řádky matice tvoří lineárně nezávislou generující posloupnost, tedy bázi podprostoru U. Hledanou bázi proto tvoří posloupnost $((5,6,4,2,1)^T, (0,6,3,3,3)^T)$.

(cvičení od 14:00):
Seřadíme si vektory generující podprostor U do řádků matice a tu upravíme na odstupňovanou:

$$\begin{pmatrix}2&3&4&1\\3&4&2&2\\1&1&3&1\\2&4&2&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2&3&4&1\\0&2&1&3\\0&2&1&3\\0&1&3&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2&3&4&1\\0&2&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

V nenulové řádcích máme bázi podprostoru U. Vidíme, že bázi U tvoří například posloupnost $((2,3,4,1)^T, (0,2,1,3)^T)$. □

Úloha 8 (4.12). (cvičení od 12:20): Určete nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3&4&3&1&1\\1&2&1&0&3\\2&2&2&1&3\end{pmatrix}$ a matice $\mathbf{A}^T$ a dimenze prostorů $\mathrm{Im}\mathbf{A}$, $\mathrm{Im}\mathbf{A}^T$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}^T$. Najděte dále nějakou bázi $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$ a doplňte ji na bázi $\mathbf{Z}_5^5$.

(cvičení od 14:00): Určete nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3&4&3&6\\2&1&1&3\\1&3&2&3\end{pmatrix}$ a matice $\mathbf{A}^T$ a dimenze prostorů $\mathrm{Im}\mathbf{A}$, $\mathrm{Im}\mathbf{A}^T$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}^T$. Najděte dále nějakou bázi $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$ a doplňte ji na bázi $\mathbf{Z}_7^4$.

Řešení.
(cvičení od 12:20):
Nejprve upravíme matici posloupností elementárních úprav:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud díky tvrzení z přednášky a definice hodnosti vidíme, že $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$, a proto $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^T) = \dim \operatorname{Im}\mathbf{A} = \dim \operatorname{Im}\mathbf{A}^T = \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$. Díky větě z přednášky máme $\operatorname{Ker}\mathbf{A} = 5 - \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 5 - 2 = 3$ a podobně $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^T = 3 - \operatorname{rank}(\mathbf{A}^T) = 3 - 2 = 1$. Z nalezené matice snadno dopočítáme bázi řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$: $M = ((4,0,1,0,0)^T,\ (4,3,0,1,0)^T,\ (0,1,0,0,1)^T)$. Nyní vidíme, že vektory $(1,0,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0,0)^T$ doplňují M na bázi $\mathbf{Z}_5^5$, protože $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 5$.

(cvičení od 14:00):
Nejprve upravíme matici posloupností elementárních úprav:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odtud díky větě z přednášky a definice hodnosti vidíme, že $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$, proto $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^T) = \dim \operatorname{Im}\mathbf{A} = \dim \operatorname{Im}\mathbf{A}^T = \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$. Podle tvrzení z přednášky máme $\operatorname{Ker}\mathbf{A} = 4 - \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$ a podobně $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^T = 3 - \operatorname{rank}(\mathbf{A}^T) = 3 - 2 = 1$. Z nalezené matice snadno dopočítáme bázi řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$: $M = ((4,5,1,0)^T,\ (3,5,0,1)^T$. Vidíme, že například vektory $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$ doplňují M na bázi $\mathbf{Z}_7^4$, protože $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$. □

Úloha 9 (11.12)**.** (cvičení od 12:20): Nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ uvažujme podprostory $U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ a $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^4$. Spočítejte $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U+V)$ a $\dim(U \cap V)$ a rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U + V$.

(cvičení od 14:00): Mějme množiny vektorů $X = \{\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\}$ a $Y = \{\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\}$ a nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ uvažujme podprostory $U = \langle X\rangle$ $V = \langle Y\rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^3$. Spočítejte $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U+V)$ a $\dim(U\cap V)$ a vyberte z množiny $X \cup Y$ bázi $U+V$.

Řešení.
(cvičení od 12:20):
Nejprve spočítáme pomocí Gaussovy eliminace dimenze (a vlastně i báze) U a V:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3&4&1&3\\1&2&1&2\\1&1&0&3\\2&1&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&1&4\\0&1&1&4\\0&4&1&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&1&4\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}1&3&4&2\\3&4&2&1\\1&1&0&2\\2&0&1&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&4&2\\0&0&0&0\\0&3&1&0\\0&4&3&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&4&2\\0&3&1&0\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Protože $U = \mathrm{Im}\ \mathbf{A}$ a $V = \mathrm{Im}\ \mathbf{B}$, vidíme, že $\dim(U) = \dim(V) = 3$. Dále, protože $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix} \in U+V$ a $\mathrm{Im}A \subseteq U+V$, máme $\mathbf{Z}_5^4 = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&1&4\\0&0&2&4\\0&0&0&4\end{pmatrix} \subseteq U+V \subseteq \mathbf{Z}_5^4$. Tedy $U+V = \mathbf{Z}_5^4$, a proto $\dim(U+V) = 4$. Nyní podle Věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů je $\dim(U\cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 3+3-4 = 2$. Konečně $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in U+V$, neboť $U+V = \mathbf{Z}_5^4$.

(cvičení od 14:00):
Obvyklým způsobem spočítáme pomocí Gaussovy eliminace dimenze (a vlastně i báze) U a V. Nejprve seřadíme do řádků matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ vektory z množin X a Y, aby $U = \mathrm{Im}\ \mathbf{A}$ a $V = \mathrm{Im}\ \mathbf{B}$ a spočítáme jejich hodnost:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0&4&1\\3&1&5\\2&3&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&1&5\\0&4&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix}0&3&2\\1&3&6\\2&1&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&6\\0&3&2\\0&2&6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&6\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Vidíme, že proto $\dim(U) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 2$ a $\dim(V) = \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = 2$. Dále

$$\dim(U+V) = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix}3&1&5\\0&4&1\\1&3&6\\0&3&2\end{pmatrix}) = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix}3&1&5\\0&4&1\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}) = 3$$

podle Věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů je $\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1$. Protože určitě $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ je báze U, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ je báze V a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$, Musí být posloupnost $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ lineárně nezávislá, tudíž jde o (vybranou) bázi $U + V = \mathbf{Z}_7^3$. □

Úloha 10 (18.12). (cvičení od 12:20): Nechť $p = (14379)(265)$ a $q = (18)(247)(953)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočítejte cyklický zápis permutací $p \circ q$ a p^{-1} a napište p jako složení transpozic. Dále určete znaménka permutací p^{-1}, q, $q \circ q \circ p^{-1}$ a $q \circ p \circ q \circ p \circ q^{-1}$.

(cvičení od 14:00): Nechť $p = (19)(2654)(37)$ a $q = (1824)(53679)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočítejte cyklický zápis permutací $p \circ q \circ p^{-1}$ a q^{-1} a napište q jako složení transpozic. Dále určete znaménka permutací p, q, $q \circ q \circ p^{-1}$ a $q \circ p \circ q \circ p \circ q^{-1}$.

Řešení.

(cvičení od 12:20): Nejprve složíme a invertujeme

$$p \circ q = (14379)(265) \circ (18)(247)(953) = (184923)(576) \quad p^{-1} = (97341)(562).$$

Dále vyjádříme

$$p = (14379)(265) = (14) \circ (43) \circ (37) \circ (79) \circ (26) \circ (65).$$

Nyní sgn $p = 1$, protože p obsahuje nula cyklů sudé délky, a sgn $q = -1$, protože p obsahuje jeden cyklus sudé délky. Konečně využijeme větu o znaménku složení permutací:

$$\operatorname{sgn}(q \circ q \circ p^{-1}) = \operatorname{sgn} q \cdot \operatorname{sgn} q \cdot \operatorname{sgn} p^{-1} = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1,$$
$$\operatorname{sgn}(q \circ p \circ q \circ p \circ q^{-1}) = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

(cvičení od 14:00): Nejprve pomocí pozorování $p \circ q \circ p^{-1}(a) = b$, jestliže $q(a) = b$, spočítáme

$$p \circ q \circ p^{-1} = (p(1)p(8)p(2)p(4))\ (p(5)p(3)p(6)p(7)p(9)) = (9862)(47531).$$

Dále snadno určíme $q^{-1} = (4281)(97635)$ a

$$q = (1824)(53679) = (18) \circ (82) \circ (24) \circ (53) \circ (36) \circ (67) \circ (79).$$

Nyní sgn $p = -1$, protože p obsahuje tři cykly sudé délky, a sgn $q = -1$, protože p obsahuje jeden cyklus sudé délky (nebo proto, že ve výše spočítaném vyjádření máme sudý počet transpozic). Zbývá využít větu o znaménku složení permutací:

$$\operatorname{sgn}(q \circ q \circ p^{-1}) = \operatorname{sgn} q \cdot \operatorname{sgn} q \cdot \operatorname{sgn} p^{-1} = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = -1,$$
$$\operatorname{sgn}(q \circ p \circ q \circ p \circ q^{-1}) = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

□

Úloha 11 (18.12). (cvičení od 12:20): Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant parametrické matice $\mathbf{G}_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & a & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a determinant matice $\mathbf{G}_a^3$. Rozhodněte, pro která a je matice $\mathbf{G}_a$ regulární.

(cvičení od 14:00): Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant parametrické matice $\mathbf{G}_a = \begin{pmatrix} a & 2a & a & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a \\ 3 & 4 & 1 & 3a \end{pmatrix}$ a rozhodněte, pro která a existuje matice $\mathbf{G}_a^{-1}$ a spočítejte $\det \mathbf{G}_a^{-1}$.

Řešení.

(cvičení od 12:20): Budeme nejprve počítat nad tělesem charakteristiky 0, nejprve odečteme dvojnásobek prvního řádku od třetího a podle třetího řádku rozvedeme:

$$\det(\mathbf{G}_a) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a-4) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

nyní odečteme první sloupec od druhého a rozvedeme podle prvního sloupce

$$= (a-4) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (a-4) \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2(4-a).$$

Tedy $\det(\mathbf{G}_a) = 2(4-a)$, $\det(\mathbf{G}_a^3) = 8(4-a)^3$ nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, dále $\det(\mathbf{G}_a) = 3(a{+}1)$, $\det(\mathbf{G}_a^3) = 2(a{+}1)^3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{G}_a) = 5a{+}1$, $\det(\mathbf{G}_a^3) = (5a{+}1)^3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. Konečně matice $\mathbf{G}_a$ je regulární, právě když $T \setminus \{4\}$, pro všechna tělesa $T = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$.

(cvičení od 14:00): Budeme nejprve počítat nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, nejprve vytkneme z prvního řádku a posledního sloupce hopdnotu a:

$$\det(\mathbf{G}_a) = \det \begin{pmatrix} a & 2a & a & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a \\ 3 & 4 & 1 & 3a \end{pmatrix} a^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

nyní od prvního sloupce odečteme poslední sloupec a poté stačí odečíst od posledního řádky druhý řádek a spočítat determinant horní trojúhelníkové matice:

$$= a^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = a^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 8a^2$$

Tedy matice $\mathbf{G}_a$ je regulární, právě když $T \setminus \{0\}$ pro všechna tělesa $T = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$, $\det(\mathbf{G}_a) = 8a^2$ a $\det(\mathbf{G}_a^{-1}) = \frac{1}{8a^2}$ nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, dále $\det(\mathbf{G}_a) = 3a^2$ a $\det(\mathbf{G}_a^{-1}) = 2a^{-2}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{G}_a) = a^2$ a $\det(\mathbf{G}_a^{-1}) = a^{-2}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. □