## Domácí úkoly z lineární algebry ve čtvrtek od 12:20

*Nejsme-li domluveni jinak, odevzdávejte prosím domácí úkoly nejpozději na cvičení, které následuje po tom, na němž byl domácí úkol zadán (obvykle tedy za týden).*

13.10. Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou reálné čtvercové matice řádu $n$, kde $n$ je přirozené číslo, a nechť $\mathbf{A}$ není nulová matice. Dokažte, že existují reálné čtvercové matice $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ a $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n$ řádu $n$, pro které

$$\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_1 + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_2 + \ldots + \mathbf{X}_n \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_n = \mathbf{B}.$$

*(5%)*

20.10. Najděte všechny matice $\mathbf{X}$ s koeficienty v $\mathrm{GF}(2) = \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ (s obvyklým násobením a se sčítáním: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ a $0 + 1 = 1 + 0 = 1$), které s počítáním v GF(2) splňují rovnost

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*(4%)*

27.10. Najděte inverzní matici k reálné matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (za 2%) a dokažte pro každé přirozené $n$ a každou čtveřici čtvercových matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ $\mathbf{C}$, $\mathbf{0}$ řádu $n$, kde $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{n \times n}$ je nulová, že bloková čtvercová matice $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$ řádu $2n$ je regulární, právě když jsou regulární matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$ (za 3%).

*(5%)*

3.11. Existuje-li, spočítejte LU rozklad reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -6 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (za 3%) a rozhodněte (a rozhodnutí dokažte), zda existuje LU rozklad reálné matice $\mathbf{A}^T$ (za 1%).

*(4%)*

10.11. Uvažujme podmnožinu $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b \cdot \sqrt{2} |\ a, b \in \mathbf{Q}\}$ množiny reálných čísel, kde $\mathbf{Q}$ značí racionální čísla, a na ní obvyklé operacemi $+$ a $\cdot$ na reálných číslech. Dokažte, že je $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ s operacemi $+$ a $\cdot$ tělesem.

*(4%)*

24.11. Spočítejte dimenze řádkového, sloupcového, nulového a levého nulového prostoru matic nad tělesy $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}.$$

*(3%)*

1.12. Kolik nejméně prvků musí obsahovat podmnožina $X$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^6$, aby nutně obsahovala dvojici lineárně závislých vektorů? Své tvrzení dokažte.

*(4%)*

8.12. Kolik existuje permutací $\sigma \in S_5$, pro něž $\sigma \circ \sigma \circ \sigma = (123)$? Své tvrzení dokažte. Všechny permutace uvažujeme v $S_5$.

*(3%)*

22.12. Uvažujme konečné těleso $T$ charakteristiky různé od 2 a položme $q = |T|$. Určete v závislosti na $q$, kolik existuje čtvercových matic $\mathbf{A}$ stupně 4, pro něž $\det(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) = 1$. Své tvrzení dokažte.

*(4%)*

5.1. Nechť $\mathbf{A}$ je reálná matice typu $n \times m$. Jestliže je hodnost matice $\mathbf{A}$ rovna $m$, dokažte, že hodnost $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je také rovna $m$.

*(4%)*