5. Determinanty

5.1. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Postupujeme přímo podle definice. Rozmyslíme si, že $S_2 = \{\mathrm{Id}, (12)\}$. a proto $\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$. Obvyklá úvaha o počítání v tělesech $\mathbf{Z}_p$ nám umožní využít výsledku spočítaného v tělese reálných (či racionálních) čísel, který nakonec stačí upravit modulo p. To znamená, že $\det(\mathbf{A}) = (5)\mathrm{mod}5 = 0$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{A}) = (5)\mathrm{mod}7 = 5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. $\square$

5.2. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

I tentokrát budeme fakticky postupovat podle definice. Sudým permutacím Id, (123) a (132) z S_3 odpovídají po řadě součiny $1 \cdot 0 \cdot 1$, $2 \cdot 3 \cdot 2$ a $1 \cdot 4 \cdot 3$ (vždy bereme nejprve hodnotu z prvního řádku, poté z druhého a nakonec z třetího) a lichým permutacím (12), (13) a (23) odpovídají součiny $2 \cdot 4 \cdot 1$, $1 \cdot 0 \cdot 2$ a $1 \cdot 3 \cdot 3$, proto

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - (2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3).$$

Tedy $\det(\mathbf{B}) = 7$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{B}) = 2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{B}) = 0$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. $\square$

5.3. Rozhodněte, zda je nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ regulární matice:
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{A}^{555}$.

Díky Větě 8.4 stačí zjistit, zda jsou determinanty jednotlivých matic nenulové. Spočítejme nejprve determinanty matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = -5$$

nad $\mathbf{Q}$, $\det \mathbf{A} = 0$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det \mathbf{A} = 2$ nad $\mathbf{Z}_7$, což znamená, že je $\mathbf{A}$ regulární nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_7$ a $\mathbf{A}$ je singulární nad $\mathbf{Z}_5$. Podobně

$$\det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

nad $\mathbf{Q}$, $\det \mathbf{B} = 1$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det \mathbf{B} = 6$ nad $\mathbf{Z}_7$, tedy $\mathbf{B}$ jr regulární nad všemi tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$. Použijeme-li Větu 7.21, která říká, že $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$, pak vidíme, že $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$ právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$ a $\det \mathbf{B} \neq 0$. Tudíž matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je regulární nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_7$ a není regulární nad $\mathbf{Z}_5$. Konečně indukčním rozšířením Věty 7.21 dostaneme, že $\det(\mathbf{A}^{555}) = \det(\mathbf{A})^{555}$, a proto je matice $\mathbf{A}^{555}$ regulární právě nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_7$. $\square$

5.4. Určete nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinanty matic

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice $\mathbf{C}_1 = (c_{ij})$ můžeme opět spočítat podle definice, uvědomíme-li si, že pro každou neidentickou permutaci $\sigma \in S_5$ bude existovat aspoň jedno j, pro něž $j > \sigma(j)$, a proto $c_{j\sigma(j)} = 0$ a $c_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot c_{5\sigma(5)} = 0$. Tedy determinant Gaussovy čtvercové matice $\mathbf{C}_1$ je právě součin hodnot na hlavní diagonále, tj. $\det(\mathbf{C}_1) = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 48$ nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{C}_1) = (48)\mathrm{mod}5 = 3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{C}_1) = (48)\mathrm{mod}7 = 6$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$.

Nyní si všimněme, že matici $\mathbf{C}_2$ dostaneme z matice $\mathbf{C}_1$ výměnou 1. a 4. řádku. Proto podle Věty 6.4 je $\det(\mathbf{C}_2) = -\det(\mathbf{C}_1)$, tudíž $\det(\mathbf{C}_2) = -48$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{C}_2) = (-48)\mathrm{mod}5 = 2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{C}_2) = (-48)\mathrm{mod}7 = 1$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. $\square$

5.5. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Připomeňme, že Věta 6.4 nám říká, jak se změní determinant matice, provedeme-li některou z řádkových úprav. V předchozí úloze jsme si navíc uvědomili, že je velmi snadné určit determinant Gaussovy matice jako součin hodnot na hlavní diagonále. Budeme-li tedy standardními prostředky pomocí elementárních úprav řádků převádět matici $\mathbf{D}$ na její Gaussovu matici, budeme v každém kroku znát, jak jsme původní determinant změnili. Tedy upravujme a počítejme:

$$\det(\mathbf{D}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}) =$$

$$= \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5.$$

Tedy zjistili jsme, že $\det(\mathbf{D}) = 5$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{D}) = 0$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{D}) = 5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. $\square$

21./22.12.

5.6. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Tentokrát k výpočtu použijeme Větu 6.8 a budeme determinant rozvíjet podle 2. řádku:

$$\det(\mathbf{G}) = (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}) + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}) +$$

$$+(-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}) + (-1)^{2+4} \cdot 0 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}) =$$

$$= -3 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}) = -3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 2) = 18.$$

Tedy jako obvykle $\det(\mathbf{G}) = 18$ nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{G}) = 3$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{G}) = 4$ nad $\mathbf{Z}_7$. □

Poznamenejme, že jsme determinanty ani další členy rozvoje, které přísluší nulovému prvku z řádku, podle nějž determinant rozvíjíme, vůbec nemuseli psát. Navíc si uvědomme, že tato metoda je vhodná právě v případě, kdy některý z řádků nebo sloupců, využijeme-li pozorování obsahuje „hodně” nul.

5.7. Spočítejte determinant matice $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel.

V matici $\mathbf{H}$ sice žádný řádek ani sloupec neobsahuje větší počet nul, ovšem první a čtvrtý sloupec se liší jen na jedné pozici. Víme, že odečteme-li od jednoho z těchto sloupců druhý, nezmění se podle Tvrzení 6.2 a Věty 6.4 hodnota determinantu. Po této úpravě už ovšem můžeme použít metodu rozvoje podle sloupce (tedy Větu 6.8):

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}) =$$

$$= (-1) \cdot (-2) \cdot \det(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}).$$

Nyní odečteme od prvního řádku upravené matice trojnásobek druhého řádku. Na prvním řádku zůstanou dva nenulové prvky, podle nichž determinant rozvedeme a snadno dopočítáme:

$$\det(\mathbf{H}) = 2\cdot\det(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}) = 2\cdot\det(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}) =$$

$$= 2\cdot(-5)\cdot\det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}) - 2\cdot 1\cdot\det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}) =$$

$$= -10\cdot(14-1+3+14) - 2\cdot(4+1+12+4+4-3) = -344.$$

□

5.8. Najděte nad tělesem racionálních čísel rekurentní vzorec pro výpočet determinant obecné čtvercové matice $\mathbf{C}_n = (c_{ij})$ stupně n, kde $c_{ii} = 1$, $c_{ii+1} = -1$ a $c_{ii+1} = 1$ a jinde je $c_{ij} = 0$, tj. $\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rozvedeme-li matici $\mathbf{C}_n$ podle prvního řádku, dostaneme $\det\mathbf{C}_n = \det\mathbf{C}_{n-1} + \det\mathbf{A}_{n-1}$, kde matici $\mathbf{A}_{n-1}$ získáme z $\mathbf{C}_n$ vypuštěním prvního řádku a druhého sloupce. Rozvojem podle prvního sloupce matice $\mathbf{A}_{n-1}$ zjistíme, že $\det\mathbf{A}_{n-1} = \det\mathbf{C}_{n-2}$. Tedy platí rekurentní vzorec $\det\mathbf{C}_n = \det\mathbf{C}_{n-1} + \det\mathbf{C}_{n-2}$ a přímým výpočtem zjistíme, že $\det\mathbf{C}_1 = 1$ a že $\det\mathbf{C}_2 = 2$. Vidíme, že hodnota $\det\mathbf{C}_n$ je právě $n+2$. členem Fibonacciovy posloupnosti. □

5.9. Spočítejte nad tělesem racionálních čísel determinant čtvercové matice $\mathbf{D}_n = (d_{ij})$ stupně n, kde $d_{ii} = 1$, $d_{ii+1} = d_{i+1i} = 1$ a jinde je $d_{ij} = 0$, tj. $\mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Stejným postupem jako v předchozí úloze zjistíme, že $\det\mathbf{D}_n = \det\mathbf{D}_{n-1} - \det\mathbf{D}_{n-2}$. Dále snadno spočítáme hodnoty $\det\mathbf{D}_1 = 1$, $\det\mathbf{D}_2 = 0$ a poté pomocí rekurentního vzorce $\det\mathbf{D}_3 = -1$, $\det\mathbf{D}_4 = -1$, $\det\mathbf{D}_5 = 0$, $\det\mathbf{D}_6 = 1$, $\det\mathbf{D}_7 = 1$ a $\det\mathbf{D}_8 = 0$. Vidíme, že je posloupnost $\{\det\mathbf{D}_n\}_n$ periodická s periodou 6. Dodefinujeme-li $\det\mathbf{D}_0 = 1$, pak dostáváme vztah $\det\mathbf{D}_n = \det\mathbf{D}_{n\mathrm{mod}6}$. □

5.10. Spočítejte determinant matice $\mathbf{D}_{500}$ z předchozí úlohy.

Stačí použít nerekurentní vztah $\det\mathbf{D}_{500} = \det\mathbf{D}_{500\mathrm{mod}6} = \det\mathbf{D}_2 = 0$. □

5.11. Rozhodněte pro která reálná a jsou reálné matice $\mathbf{P}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q}(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}(a) \cdot \mathbf{Q}(a)$ a $\mathbf{P}(a)^{257} \cdot \mathbf{Q}(a)^{374}$ regulární.

Nejprve spočítáme determinanty $\det(\mathbf{P}(a)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = a - a^2$, a

$$\det(\mathbf{Q}(a)) = \det \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - 2a.$$

Věta 6.6 z přednášky říká, že je matice regulární, právě když je její determinant nenulový. Determinanty matic $\mathbf{P}(a)$ a $\mathbf{Q}(a)$ už jsme spočítali, zbývá nám s využitím Věty 6.7 spočítat $\det(\mathbf{P}(a) \cdot \mathbf{Q}(a)) = \det(\mathbf{P}(a)) \cdot \det(\mathbf{Q}(a)) = a(1-a)(1-2a)$. Vidíme, že je matice $\mathbf{P}(a)$ regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, matice $\mathbf{Q}(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ a součin $\mathbf{P}(a) \cdot \mathbf{Q}(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Konečně indukční aplikací Věty 6.7 dostáváme, že

$$\det(\mathbf{P}(a)^{257} \cdot \mathbf{Q}(a)^{374}) = \det(\mathbf{P}(a))^{257} \cdot \det(\mathbf{Q}(a))^{374} = a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}.$$

Protože polynom $a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}$ v proměnné a nemá jiné kořeny než 0, $\frac{1}{2}$, 1, vidíme, že je matice $\mathbf{P}(a)^{257} \cdot \mathbf{Q}(a)^{374}$ regulární opět právě tehdy, když $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. □

5.12. Rozhodněte pro která $x \in \mathbf{Z}_5$ je matice $\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ singulární.

Opět nejprve spočítáme determinant matice $\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$, nejprve přičteme třetí sloupec k druhému a pak rozvedeme podle třetího řádku:

$$\det \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x & 3x+4 & 2x+1 \\ x+4 & 3x & 3 \\ x+1 & 0 & 4x \end{pmatrix} =$$

$$= (x+1) \cdot (4x^2 + x + 2) + 4x \cdot (3x^2 + 4x + 4) = x^3 + x^2 + 4x + 2.$$

Stejně jako v předchozí úloze potřebujeme najít $x \in \mathbf{Z}_5$, pro něž je hodnota $\det(\mathbf{A}(x)) = x^3 + x^2 + 4x + 2 = 0$, což snadno zjistíme dosazováním jednotlivých prvků tělesa $\mathbf{Z}_5$:

$$\det(\mathbf{A}(0)) = 2,\ \det(\mathbf{A}(1)) = 1^3 + 1^2 + 4 \cdot 1 + 2 = 3,\ \det(\mathbf{A}(2)) = 2^3 + 2^2 + 4 \cdot 2 + 2 = 2,$$

$$\det(\mathbf{A}(3)) = 3^3 + 3^2 + 4 \cdot 3 + 2 = 0, \quad \det(\mathbf{A}(4)) = 4^3 + 4^2 + 4 \cdot 4 + 2 = 3.$$

Zjistili jsme, že je matice $\mathbf{A}(x)$ singulární, právě když je $x = 3$. □

5.13. Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1,0,0)^T$ s reálným parametrem a, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

Pro počítání použijeme Cramerovo pravidlo, tedy Tvrzení 6.10 z přednášky. Nejdříve určíme $\det \mathbf{A} = 2a \cdot (a+1)$. To znamená, že Cramerovo pravidlo můžeme využít pro parametr $a \in \mathbf{R} \setminus \{0,-1\}$, t.j. je-li matice A regulární. Dále určíme determinant matic $\mathbf{A}_i$, které vzniknou z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran vektorem, tedy $(1,0,0)^T$:
$\det \mathbf{A}_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a$, $\det \mathbf{A}_2 = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & 2a \\ a & 0 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a$ a
$\det \mathbf{A}_3 = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2a$.

Nyní pomocí Tvrzení 6.10 spočítáme hodnotu i-té neznámé jako $x_i = (\det \mathbf{A})^{-1} \cdot \det \mathbf{A}_i$. Tedy $x_1 = x_2 = \frac{2a}{2a(a+1)} = \frac{1}{a+1}$ a $x_3 = \frac{-2a}{2a(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$. Konečně standardním postupem zjistíme, že soustava pro $a = -1$ nemá řešení a pro $a = 0$ leží všechna řešení v množině $(1,0,0) + \mathbf{L}((0,1,-1))$. □

5.14. Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ adjungovanou matici k maticím $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Postupujme nejprve podle definice, na i-tém řádku a v j-tém sloupci adjungované matice se nachází subdeterminant původní matice, v níž vyškrtneme j-tý řádek a i-tý sloupec, vynásobený hodnotou $(-1)^{i+j}$:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj}(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U poslední matice, pro niž už jsme (v úloze 1.13.) zjistili, že je regulární, a známe její inverz $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Nyní stačí abychom spočítali determinant $\det(\mathbf{D}) = 5$ a využili Tvrzení 6.9, které říká, že $\operatorname{adj}(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}^{-1}$, tedy $\operatorname{adj}(\mathbf{D}) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. □

5.15. Spočítejte adjungovanou matici ke čtvercové matici stupně 100, která má hodnost 98.

Uvážíme-li, že matice, kterou dostaneme z původní vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce má hodnost nejvýše 98, je taková matice singulární a má tedy determinant rovný nule. To znamená, že hledaná adjungovaná matice je nulová. □

4./5.1.

6. Skalární součin

6.1. Nechť $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ jsou reálné matice a uvažujme standardní skalární součin na reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$.

(a) Ověřte, že $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je ortonormální báze $\mathbf{R}^3$,

(b) spočítejte souřadnice vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ a $(1,2,3)^T$ vzhledem k ortonormální bázi B,

(c) ověřte, že $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}^T$ jsou ortonormální matice,

(d) dokažte, že $(\mathbf{M}\mathbf{b}_1, \mathbf{M}\mathbf{b}_2, \mathbf{M}\mathbf{b}_3)$ je opět ortonormální báze.

(a) Podle definice spočítáme

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 3 \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{6}})^2 = 1,$$

tedy zjistili jsme, že B je ortonormální, a proto lineárně nezávislá posloupnost. Protože jde o tříprvkovou lineárně nezávislou posloupnost ve vektorovém prostoru dimenze 3, musí jít o bázi. Seřadíme-li vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ do matice $\mathbf{N}$, mohli jsme otázku zformulovat maticově, konkrétně jsme měli zjistit (a zjistili), zda $\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} = \mathbf{I}_3$.

(b) Připomeňme, že pro každou ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ tvoří souřadnice vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ vzhledem k bázi B jednoznačně určený aritmetický vektor $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$, pro který platí $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{b}_i$. Využijeme-li ortonormality bázi, vidíme, že

$$\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}_j^T \cdot \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{b}_i = x_j,$$

tedy souřadnice$\mathbf{v}$ jsou právě Fourierovy koeficienty. Konkrétně dostáváme, že

- $\mathbf{N}^T \cdot (0,0,1)^T = (1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \cdot 0, 1 \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}})^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, 0, -2)^T$ jsou souřadnice vektoru $(0,0,1)^T$ vzhledem k B,

- $\mathbf{N}^T \cdot (2,1,0)^T = (\frac{2+1}{\sqrt{3}}, \frac{2-1}{\sqrt{2}}, \frac{2+1}{\sqrt{6}})^T = (\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})^T$ jsou souřadnice vektoru $(2,1,0)^T$ vzhledem k B a

- $\mathbf{N}^T \cdot (1,2,3)^T = (\frac{1+2+3}{\sqrt{3}}, \frac{1-2}{\sqrt{2}}, \frac{1+2-3\cdot 2}{\sqrt{6}})^T = (2\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}})^T$ jsou souřadnice vektoru $(1,2,3)^T$ vzhledem k B.

(c)Máme zjistit, zda $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I}_3$, což snad ověříme přímým výpočtem. Protože je matice $\mathbf{M}$ ortogonální, víme z přednášky, že je ortogonální i matice $\mathbf{M}^T$.

(d) Protože matice $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ obsahuje ve svých sloupcích právě vektory $\mathbf{Mb}_1$, $\mathbf{Mb}_2$, $\mathbf{Mb}_3$, ptáme se, zda je tato matice ortogonální. Obě matice jsou ovšem ortogonální, tedy $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ je ortogonální podle tvrzení z přednášky. □

6.2. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ a nechť $V = \mathbf{L}((1,1,0)^T, (1,3,2)^T)$.

(a) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru V,
(b) najděte ortogonální bázi V obsahující vektor $(2,4,2)^T$,
(c) určete ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ prostoru $\mathbf{R}^3$, pro niž $V = \mathbf{L}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$.

(a) Budeme upravovat například bázi $((1,1,0)^T, (1,3,2)^T)$ Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací. Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|(1,1,0)^T\|}(1,1,0)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$. Dále hledáme vektor $\mathbf{u}_2$ ve tvaru $\mathbf{u}_2 = (1,3,2)^T + c \cdot \mathbf{v}_1$. Z podmínky $\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ dostáváme, že $c = -\mathbf{v}_1^T \cdot (1,3,2)^T = -\frac{4}{\sqrt{2}}$, proto $\mathbf{u}_2 = (-1,1,2)^T$. Nyní vektor $\mathbf{u}_2$ normalizujeme a dostaneme $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|(-1,1,2)^T\|}(-1,1,2)^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.

Hledanou ortonormální bází V je tedy posloupnost $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$.

(b) Postupujeme obdobně jako v (a) jen zvolíme bázi V začínající vektorem $(2,4,2)^T$, například bázi $((2,4,2)^T, (1,1,0)^T)$. Poznamenejme, že kdybychom našli postupem (a) ortonormální bázi, jednalo by se určitě i o bázi ortogonální. My nyní použijeme úvahu obdobnou jako v (a), tentokrát ovšem nebudeme (protože nemusíme) normalizovat:

Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = (2,4,2)^T$ a hledáme vektor $\mathbf{v}_2$ ve tvaru $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)^T + c \cdot \mathbf{v}_1$. Z podmínky $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ tentokrát dostáváme, že $c = -\frac{\mathbf{v}_1^T \cdot (1,1,0)^T}{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}$, proto $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)^T - \frac{1}{4} \cdot (2,4,2)^T = \frac{1}{2}(1,0,-1)^T$.

Hledanou ortogonální bází V je tedy posloupnost $((2,4,2)^T, \frac{1}{2}(1,0,-1)^T)$ nebo posloupnost $((2,4,2)^T, (1,0,-1)^T)$.

(c) V (a) jsme nalezli ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$. Připomeňme, že každý vektor kolmá na bázi podprostoru V je kolmý na jeho všechny vektory. Stačí nám tedy najít vektor $\mathbf{u}$, pro $(1,1,0)\,\mathbf{u} = 0$ a $(1,3,2)\,\mathbf{u} = 0$, tedy hledáme řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Snadno spočítáme, že takovým řešením je například vektor $(-1,1,-1)^T$. Stačí tedy tento vektor normalizovat, abychom našli poslední vektor hledané ortonormální báze. Tedy je-li $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$ $\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)^T$, dostáváme ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ požadovaných vlastností. □

6.3. Buď $M = ((1,1,0)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T)$ báze reálného vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte ortonormální takovou bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbf{R}^3$, aby $\mathbf{L}((1,1,0)^T) = \mathbf{L}(\mathbf{v}_1)$ a $\mathbf{L}((1,1,0)^T, (0,1,1)^T) = \mathbf{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Postupujme opět Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací.

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,1,0)^T}{\|(1,1,0)^T\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$.
2. $\mathbf{v}_2' = (0,1,1)^T - \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(0,1,1)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = \frac{1}{2}(-1,1,2)^T$. Proto $\| \mathbf{v}_2' \| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.
3. Předně $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(1,1,1)^T = \sqrt{2}$ a $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)(1,1,1)^T = \frac{2}{\sqrt{6}}$, proto $\mathbf{v}_3' = (1,1,1)^T - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(1,-1,1)^T$. Tedy $\| \mathbf{v}_3' \| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

Našli jsme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T, \frac{1}{3}(1,-1,1)^T)$.

Chceme-li vytvořit ortonormální bázi z báze $((1,1,0)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T)$ modifikovaným Gramovým-Schmidtovým algoritmem, dostáváme:

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\mathbf{v}_2' = (0,1,1)^T$ a $\mathbf{v}_3' = (1,1,1)^T$.
2. $\mathbf{v}_2' = \frac{1}{2}(-1,1,2)^T$, $\mathbf{v}_3' = (1,1,1)^T - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = (0,0,1)^T$ a normujeme $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.
3. $\mathbf{v}_3' = (0,0,1)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(1,-1,1)^T$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

Výsledek modifikovaného algoritmu je stejný jako v případě klasického algoritmu, změnili jsme jen uspořádání úprav. □

Připomeňme, že QR-rozkladem matice $\mathbf{A}$ nad reálným nebo komplexním tělesem rozumíme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, kde $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}$ je jednotková matice a $\mathbf{R}$ je regulární horní trojúhelníková matice s kladnými reálnými hodnotami na diagonále.

6.4. Najděte QR rozklady matic (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Uvažujme obecnou matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_m)$ s lineárně nezávislými sloupci. Připomeňme, že je-li $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ je posloupnost ortonormálních vektorů, kterou z posloupnosti $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ vytvoříme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací a položíme-li $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1 | \dots | \mathbf{q}_m)$ a $\mathbf{R} = (r_{ij})$, kde $r_{ij} = \mathbf{q}_i^T \cdot \mathbf{a}_j$, potom je $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ právě QR rozklad matice $\mathbf{A}$. Navíc poznamenejme, že $r_{ii} = \mathbf{q}_i^T \cdot \mathbf{a}_i = \|\mathbf{q}_i'\|$, tedy matice $\mathbf{Q}$ sestává z výsledných ortonormálních vektorů a matice $\mathbf{R}$ obsahuje právě všechny údaje, které při Gramově-Schmidtově ortogonalizaci spočítáme (tedy nad diagonálou všechny potřebné skalární součiny a na diagonále všechny potřebné normy).

(a) Protože jsou sloupce první matice právě první dva vektory z úlohy 6.3, využijeme prvních dvou kroků Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace z 6.3 a sepíšeme údaje do matic

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \|(1,1,0)^T\| & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(0,1,1)^T \\ 0 & \|\frac{1}{2}(-1,1,2)^T\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Tentokrát sepíšeme do matic údaje celé Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace z 6.3, první dva sloupce matic $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$ už známe (u prvních dvou sloupců

$\mathbf{R}$ přidáme nulový poslední řádek). Tedy dostáváme $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ a

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(1,1,1)^T \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)(1,1,1)^T \\ 0 & 0 & \|\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(c) Nyní budeme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací upravovat lineárně nezávislou posloupnost vektorů $(1,1,1,1)^T$, $(1,0,1,0)^T$, $(0,1,0,2)^T$ mezivýsledky sepsat do matic Q a R. Všimněme si, že $r_{ii} = \langle \mathbf{q}_i\, \mathbf{a}_i \rangle = \|\mathbf{q}_i'\|$.

1. $\mathbf{q}_1 = \frac{(1,1,1,1)^T}{\|(1,1,1,1)^T\|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ a $r_{11} = \|(1,1,1,1)^T\| = 2$.
2. $\mathbf{q}_2' = (1,0,1,0)^T - \langle \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T, (1,0,1,0)^T \rangle \cdot \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$. Proto $r_{12} = \langle \frac{1}{2}(1,1,1,1), (1,0,1,0)^T \rangle = 1$, $r_{22} = \|\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T\| = 1$ a $\mathbf{q}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
3. Konečně $r_{13} = \langle \mathbf{q}_1, (0,1,0,2)^T \rangle = \frac{3}{2}$, $r_{23} = \langle \mathbf{q}_2, (0,1,0,2)^T \rangle = -\frac{3}{2}$, proto $\mathbf{q}_3' = (0,1,0,2)^T - \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T + \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T = (0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$. Tedy $r_{33} = \|(0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\mathbf{q}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

Dostáváme QR rozklad $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. □

6.5. Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V = \mathbf{L}((1,1,-2,1)^T, (2,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T)$ reálného aritmetického vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ se standardním skalárním součinem.

Nejprve zvolíme vhodnou bázi prostoru V, kterou budeme ortogonalizovat pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace. Vektor $(2,0,1,0)^T$ je zřejmě kolmý na zbývající vektory, zvolme tedy bázi V, tak aby byl vektor $(2,0,1,0)^T$ na jejím prvním místě. Tedy vyjdeme například z báze $((2,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T, (1,1,-2,1)^T)$. Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci tentokrát mírně modifikujeme: najdeme nejprve ortogonální bázi a tu budeme normalizovat až na závěr.

Už jsme všimli, že $((2,0,1,0)^T \cdot (0,1,0,1)^T = 0$, tedy máme první dva (zatím jen ortogonální, nikoli ortonormální) vektory hledané báze: $\mathbf{v}_1' = (2,0,1,0)^T$, $\mathbf{v}_2' = (0,1,0,1)^T$. Nyní budeme hledat třetí bazický vektor ve tvaru $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1)^T - c_1\,\mathbf{v}_1' - c_2\,\mathbf{v}_2'$. Přitom má splňovat podmínky, že $\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_3' = 0$ pro $i = 1,2$, z čehož využitím linearity skalárního součinu v druhé složce dostáváme, že

$$c_1 = \frac{(1,1,-2,1) \cdot (2,0,1,0)^T}{(2,0,1,0) \cdot (2,0,1,0)^T} = 0, \quad c_2 = \frac{(1,1,-2,1) \cdot (0,1,0,1)^T}{(0,1,0,1) \cdot (0,1,0,1)^T} = -1.$$

Všimněme si, že koeficient je roven 0 díky volbě vektoru $\mathbf{v}_1'$ kolmého na všechny následující vektory, proto nám stačilo hledat ortogonální bázi podprostoru $\mathbf{L}((1,1,-2,1)^T, (0,1,0,1)^T)$, která musí být kolmá na vektor $(2,0,1,0)^T$. Tedy $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1)^T - (0,1,0,1)^T = (1,0,-2,0)^T$ je posledním hledaným kolmým vektorem. Posloupnost vektorů $((2,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T, (1,0,-2,0)^T)$ tvoří zřejmě ortogonální bázi prostoru V. Zbývá nám jednotlivé vektory normalizovat: $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_1'}{\|\mathbf{v}_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)^T$,

$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T$, $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{v}_3'}{\|\mathbf{v}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)^T$, Ortonormální bází je tedy například posloupnost vektorů $(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)^T$. □

11./12.1.

6.6. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$. Najděte bázi ortogonálního doplňku podprostoru $U = \mathbf{L}((1,2,1,1,1)^T, (0,-1,1,1,2)^T)$.

Připomeňme, že

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^5 | \, \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = 0 \forall \, \mathbf{u} \in U\} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^5 | \, \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = 0 \forall \, \mathbf{u} \in B\},$$

kde B je nějaká báze U. Snadno uvážíme, že potřebujeme najít právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Tedy bázi $U^\perp$ tvoří například vektory $(-3,1,1,0,0)^T, (-3,1,0,1,0)^T, (-5,2,0,0,1)^T$. □

6.7. Spočítejte ortogonální projekci vektoru $(2,2,-1)^T$ do podprostoru V a bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$, kde V je z příkladu 6.2.

Podobně jako v úloze 6.1 lze souřadnice ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ na podprostor V vzhledem k ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ spočítat jako Fourierovy koeficienty, tj. označíme-li $\mathbf{v_u} \in V$ ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ na V a $\mathbf{v_u} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2$, pak $(a_1, a_2) = (\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{v}\rangle, \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{v}\rangle)$, kde $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$ je ortonormální báze nalezená v úloze 6.2. Tedy

$$(a_1, a_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \cdot (2,2,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) \cdot (2,2,-1)^T) = (\frac{4}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T,$$

a proto

$$\mathbf{v_u} = \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(7,5,-2)^T.$$

Na závěr si zkontrolujme, že $\mathbf{u} - \mathbf{v_u}$ leží v ortogonálním doplňku V, tedy, že je vektor $(2,2,-1)^T - \frac{1}{3}(7,5,-2)^T = \frac{1}{3}(-1,1,-1)^T$ kolmý na všechny (bazické) vektory prostoru V. □

6.8. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$.

(a) najděte nějakou ortogonální bázi podprostoru $U = \mathbf{L}((1,1,0,1)^T, (1,0,1,1)^T)$,
(b) najděte nějakou ortogonální bázi ortogonálního doplňku $U^\perp$,
(c) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(-1,1,0,4)^T$ do podprostoru $W = \mathbf{L}((1,2,1,-1)^T, \ (1,1,0,1)^T)$.

(a), (b) Můžeme postupovat několika způsoby. Jednak můžeme doplnit vektory $(1,1,0,1)^T, (1,0,1,1)^T$ na bázi celého prostoru $\mathbf{R}^4$ (například vektory $(1,0,0,0)^T$ a $(0,1,0,0)^T$) a tuto bázi upravit Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. První dva vektory ortogonalizované báze budou přitom tvořit ortogonální bázi U, další dva vektory budou tvořit ortogonální bázi doplňku $U^\perp$.

Rovněž nám stačí najít libovolnou bázi $U^\perp$ (například týmž postupem z 6.6) a obě báze ortogonalizovat. Postupujme druhým způsobem: Bázi $U^\perp$ tvoří například posloupnost $(-1,1,1,0)^T$, $(0,1,1,-1)^T$. Vektor $(0,1,1,-1)^T$ můžeme upravit jedním krokem Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

$$(0,1,1,-1)^T - \frac{(-1,1,1,0)\cdot(0,1,1,-1)^T}{3}(-1,1,1,0)^T = \frac{1}{3}(2,1,1,-3)^T,$$

a proto posloupnost $(-1,1,1,0)^T, (2,1,1,-3)^T$ tvoří ortogonální bázi $U^\perp$. Obdobně zjistíme, že $((1,1,0,1)^T,\ (1,-2,3,1)^T)$ tvoří ortogonální bázi U.

(c) Potřebujeme nejprve určit souřadnice x_1, x_2 ortogonální projekce $\mathbf{u} = x_1 \cdot (1,2,1,-1)^T + x_2 \cdot (1,1,0,1)^T$, aniž budeme hledat ortogonální bázi W, jak jsme činili v 6.7. Řešíme tedy nehomogenní soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1,2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix} & (1,2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} & (1,2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix} \\ (1,1,0,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix} & (1,1,0,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} & (1,1,0,1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, proto $\mathbf{u} = (1,0,-1,3)^T$.

Pro kontrolu ještě ověřme, zda je vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (-2,1,1,1)^T$ skutečně kolmý na podprostor U. Zřejmě $(-2,1,1,1)\cdot(1,2,1,-1)^T = 0$ a $(-2,1,1,1)\cdot(1,1,0,1)^T = 0$. □

6.9. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$, U podprostor $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Najděte vektor $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,

(a) je-li $U = \mathbf{L}((1,3,-2)^T, (1,1,-1)^T)$ a $\mathbf{v} = (2,4,3)^T$,
(b) je-li $U = \mathbf{L}((1,2,1)^T, (2,1,-1)^T)$ a $\mathbf{v} = (1,2,4)^T$,
(c) je-li $U = \mathbf{L}((1,2,1)^T, (2,1,-1)^T)$ a $\mathbf{v} = (4,2,1)^T$.

Postupujme obdobně jako v 6.8(d), tj. hledáme takovou lineární kombinaci vektorů $a(1,3,-2)^T + b(1,1,-1)^T$, aby byl vektor $(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T$ kolmý na prostor U. To můžeme ekvivalentně vyjádřit tak, že vektor $(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T$ je kolmý na vektor $(1,3,-2)^T$ i $(1,1,-1)^T$ a odtud dostáváme soustavu rovnic

$$(1,3,-2)\cdot[(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T] = 0,$$

$$(1,1,-1)\cdot[(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T] = 0.$$

Tuto soustavu upravíme na nehomogenní soustavu lineárních rovnic, sepíšeme do (Gramovy) matice a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $a = 1$ a $b = -1$, ortogonální projekce vektoru $(2,4,3)^T$ na podprostor U je $\mathbf{u} = (1,3,-2)^T - (1,1,-1)^T = (0,2,-1)^T$ a $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (2,4,3)^T - (0,2,-1)^T = (2,2,4)^T$.

(b) I tentokrát standardně najdeme Gramovu matici $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$ vyjadřující podmínku, že $(1,2,4)^T - x(1,2,1)^T - y.(2,1,-1)^T$ je kolmé na podprostor U a dopočítáme $x = 2$ a $y = -1$. Ortogonální projekce vektoru $(1,2,4)^T$ na podprostor U je tedy $\mathbf{u} = 2\cdot(1,2,1)^T - 1\cdot(2,1,-1)^T = (0,3,3)^T$ a $\mathbf{u}^\perp = (1,2,4)^T - (0,3,3)^T = (1,-1,1)^T$.

(c) Všimněme si, že počítáme-li stejně jako v (b), dostaneme Gramovu matic se stejnými levými stranami, tj. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$ a dopočítáme $x = 1$ a $y = 1$, proto $\mathbf{u} = \cdot(1,2,1)^T + (2,1,-1)^T = (3,3,0)^T$ a $\mathbf{u}^\perp = (4,2,1)^T - (3,3,0)^T = (1,-1,1)^T$. □

6.10. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{C}^3$, tj. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \overline{\mathbf{u}}^T\,\mathbf{v}$.

(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $U = \mathbf{L}((1,i,1-i)^T, (i,2+i,-1)^T)$,
(b) najděte bázi ortogonálního doplňku U^T,
(c) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(1,0,-i)^T$ do podprostoru U.

(a) Využijeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci provedenou na posloupnost $\mathbf{u}_1 = (1,i,1-i)^T$, $\mathbf{u}_2 = (i,2+i,-1)^T$. Nejprve určíme $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,i,1-i)^T}{\|(1,i,1-i)^T\|} = \frac{1}{2}(1,i,1-i)^T$. Poté spočítáme $c = \mathbf{v}_1\cdot(i,2+i,-1)^T = \frac{1}{2}(1,-i,1+i)\cdot(i,2+i,-1)^T = \frac{-2i}{2} = -i$ a dále $\mathbf{v}_2' = \mathbf{u}_2 - c\,\mathbf{v}_1 = (i,2+i,-1)^T + \frac{i}{2}(1,i,1-i)^T = \frac{1}{2}(3i,3+2i,-1+i)^T$, proto $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{24}}(3i,3+2i,-1+i)^T$.

(b) $\mathbf{u}_1\cdot(1,-1,0,0,1)^T = 0$, $\mathbf{u}_1\cdot(1,-1,0,0,1)^T = 0$ Protože potřebujeme najít nenulový vektor $\mathbf{v}$ kolmý na vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, tj. má platit, že $(1,i,1-i)^T\cdot\mathbf{v} = (1,-i,1+i)^T\cdot\mathbf{v} = 0$ a $(i,2+i,-1)^T\cdot\mathbf{v} = (-i,2-i,-1)^T\cdot\mathbf{v}^T = 0$, což snadno zformulujeme maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 2-i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 & -1+i \\ -i & 2-i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ 0 & 3-i & -2+i \end{pmatrix}.$$

tedy vidíme, že bází řešení soustavy i bází $U^\perp$ je vektor $(-3-3i, 3+i, 4+2i)^T$.

(c) Podobně jako v příkladu 6.7(c) stačí, abychom spočítali souřadnice ortogonální projekce vzhledem k ortonormální bázi U, tedy hodnoty

$$a_1 = \mathbf{v}_1\cdot(1,0,-i)^T = \frac{1}{2}(1,-i,1+i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1+(1+i)\cdot(-i)}{2} = \frac{2-i}{2},$$

$$a_2 = \mathbf{v}_2\cdot(1,0,-i)^T = \frac{1}{\sqrt{24}}(-3i,3-2i,-1-i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{-3i+i-1}{\sqrt{24}} = \frac{-1-2i}{\sqrt{24}}.$$

Tedy ortogonální projekce je vektor

$$\frac{2-i}{4}(1,i,1-i)^T + \frac{-1-2i}{24}(3i,3+2i,-1+i)^T = \frac{1}{24}(18-9i, 7+4i, 21+5i)^T.$$

□

6.11. Najděte přibližné řešení metodou nejmenších čtverců soustavy rovnic

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 10 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 7 \\ & x_2 & -x_3 & = 3 \end{array}$$

Snadno nahlédneme, že soustava nemá řešení. Budeme tedy hledat jen přibližné řešení. Máme vektor pravých stran $\mathbf{y} = (1, 4, 6, 2, -1)^T$ a vektory levých stran $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, 1, 0)^T$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, -2, 2, 1)^T$ a $\mathbf{a}_3 = (0, 2, 1, 2, -1)^T$. Hledáme x_i tak, aby $\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{a}_i$ byla právě ortogonální projekce vektoru pravých stran do podprostoru $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. To vede stejně jako v případě ortogonální projekce k soustavě rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{a}_3^T \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3^T \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3^T \cdot \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3^T \cdot \mathbf{y} \end{array}\right).$$

Dosadíme a hledáme řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 7 & 17 \\ 4 & 14 & 3 & -3 \\ 7 & 3 & 10 & 21 \end{array}\right).$$

Zbývá nám dopočítat, že $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ a $x_3 = 1$. □

6.12. Najděte přibližné řešení metodou nejmenších čtverců soustavy rovnic

$$\begin{array}{cccc} x & + & y & = 2 \\ 3x & + & y & = 4 \\ -2x & - & y & = 3 \end{array}$$

Položíme-li $\mathbf{v}_1 = (1, 3, -2)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1)^T$ a $\mathbf{y} = (2, 4, 3)^T$ a uvažujme-li stejně jako v příkladu 6.11 potřebujme vyřešit nehomogenní soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{y} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Tuto soustavu už jsme vyřešili v úloze 6.9, tedy $(x, y) = (1, -1)$ je přibližné řešení soustavy metodou nejmenších čtverců. □

Další úlohy

(1) Spočítejte determinant matic $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$.

(2) Najděte pro libovolná $a \in \mathbf{Q}$ nad $\mathbf{Q}$ rekurentní vzorec pro výpočet determinant čtvercové matice $\mathbf{G}_n = (g_{ij})$ stupně n, kde $g_{ii} = 1$, $g_{ii+1} = a$ a $g_{i+1i} = b$ a jinde je $g_{ij} = 0$.

(3) Najděte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ adjungované matice k maticím $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}^3$.

(4) Rozhodněte, pro která $a \in \mathbf{Z}_7$ je nad $\mathbf{Z}_7$ matice $\begin{pmatrix} a & 2+a & 1 \\ 3a+2 & 1 & a \\ 2a^2 & a+6 & 2+a \end{pmatrix}$ regulární.

(5) Najděte pro všechna $a \in \mathbf{Z}_7$, pro něž je to možné, inverzní matici k matici z předchozí úlohy.

(6) Buď $\cdot$ je standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$.
   (a) Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V = \mathbf{L}((1,3,-2,1,1)^T, (2,0,1,1,0)^T, (1,3,1,2,-1)^T)$,
   (b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
   (c) určete ortogonální projekci vektoru $(2,1,-1,0,4)^T$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,
   (d) je-li $U = \mathbf{L}((2,1,0,1,-1)^T, (1,1,0,-1,3)^T, (4,-1,-1,-2,3)^T)$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1,1,0,0,-2)^T = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,
   (e) najděte ortonormální báze podprostorů $U+V$, $U^\perp + V$, $U + V^\perp$, $U^\perp + V^\perp$, $U \cap V$, $U^\perp \cap V$, $U \cap V^\perp$ a $U^\perp \cap V^\perp$.

(7) Mějme komplexní vektorový prostor $\mathbf{C}^4$ se standardním skalárním součinem.
   (a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $V = \mathbf{L}((1, 1-i, 1+i, 2-3i)^T, (i+1, -1, 1+2i, 2-i)^T)$,
   (b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
   (c) určete ortogonální projekci vektoru $(1+3i, 2-i, -1, 2i)^T$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,
   (d) je-li $U = \mathbf{L}((i, -i, 2+i, 1-3i)^T, (1, 1, i, 2+3i)^T)$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1+i, 1, i, 2-i)^T = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,

(8) Najděte přibližné řešení metodou nejmenších čtverců soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ nad $\mathbf{R}$, jestliže
   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = (1,0,1,1,2)^T$
   (b) $\mathbf{A}$ je jako v (a) a $\mathbf{y} = (2,1,0,2,1)^T$,
   (c) $\mathbf{A}$ je jako v (a) a $\mathbf{y} = (2,1,0,2,0)^T$,
   (d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = (2,3,0)^T$.