6. Regulární matice

6.1. Rozhodněte, zda je nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ regulární matice:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ a } \mathbf{A}^{555}.$$

Díky Větě 8.4 stačí zjistit, zda jsou determinanty jednotlivých matic nenulové. Spočítejme nejprve determinanty matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = -5$$

nad $\mathbf{Q}$, $\det \mathbf{A} = 0$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det \mathbf{A} = 2$ nad $\mathbf{Z}_7$, což znamená, že je $\mathbf{A}$ regulární nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_7$ a $\mathbf{A}$ je singulární nad $\mathbf{Z}_5$. Podobně

$$\det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

nad $\mathbf{Q}$, $\det \mathbf{B} = 1$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det \mathbf{B} = 6$ nad $\mathbf{Z}_7$, tedy $\mathbf{B}$ jr regulární nad všemi tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$. Použijeme-li Větu 7.21, která říká, že $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$, pak vidíme, že $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$ právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$ a $\det \mathbf{B} \neq 0$. Tudíž matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je regulární nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_7$ a není regulární nad $\mathbf{Z}_5$. Konečně indukčním rozšířením Věty 7.21 dostaneme, že $\det(\mathbf{A}^{555}) = \det(\mathbf{A})^{555}$, a proto je matice $\mathbf{A}^{555}$ regulární právě nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_7$. □

6.2. Rozhodněte pro která reálná a jsou reálné matice $\mathbf{P}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q}(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{P}(a) \cdot \mathbf{Q}(a)$ regulární.

Nejprve spočítáme determinanty $\det(\mathbf{P}(a)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = a - a^2$, a

$$\det(\mathbf{Q}(a)) = \det \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - 2a.$$

Věta 8.4 z přednášky říká, že je matice regulární, právě když je její determinant nenulový. Determinaty matic $\mathbf{P}(a)$ a $\mathbf{Q}(a)$ už jsme spočítali, zbývá nám s využitím Věty 7.21 spočítat $\det(\mathbf{P}(a) \cdot \mathbf{Q}(a)) = \det(\mathbf{P}(a)) \cdot \det(\mathbf{Q}(a)) = a(1-a)(1-2a)$. Vidíme, že je matice $\mathbf{P}(a)$ regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, matice $\mathbf{Q}(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ a součin $\mathbf{P}(a) \cdot \mathbf{Q}(a)$ je regulární, právě když $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. □

6.3. Rozhodněte pro která $x \in \mathbf{Z}_5$ je matice $\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ singulární.

Opět nejprve spočítáme determinant matice $\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$, nejprve přičteme třetí sloupec k druhému a pak rozvedeme podle třetího řádku:

$$\det \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x & 3x+4 & 2x+1 \\ x+4 & 3x & 3 \\ x+1 & 0 & 4x \end{pmatrix} =$$

$$= (x+1)\cdot(4x^2+x+2) + 4x\cdot(3x^2+4x+4) = x^3+x^2+4x+2.$$

Stejně jako v předchozí úloze potřebujeme najít $x \in \mathbf{Z}_5$, pro něž je hodnota $\det(\mathbf{A}(x)) = x^3+x^2+4x+2 = 0$, což snadno zjistíme dosazováním jednotlivých prvků tělesa $\mathbf{Z}_5$:

$$\det(\mathbf{A}(0)) = 2,\ \det(\mathbf{A}(1)) = 1^3+1^2+4\cdot1+2 = 3,\ \det(\mathbf{A}(2)) = 2^3+2^2+4\cdot2+2 = 2,$$

$$\det(\mathbf{A}(3)) = 3^3+3^2+4\cdot3+2 = 0, \qquad \det(\mathbf{A}(4)) = 4^3+4^2+4\cdot4+2 = 3.$$

Zjistili jsme, že je matice $\mathbf{A}(x)$ singulární, právě když je $x = 3$. □

6.4. Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1,0,0)^T$ s reálným parametrem a, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

Pro počítání použijeme Cramerovo pravidlo. Nejdříve určíme $\det \mathbf{A} = 2a\cdot(a+1)$. To znamená, že Cramerovo pravidlo můžeme využít pro parametr $a \in \mathbf{R} \setminus \{0,-1\}$, t.j. je-li matice A regulární. Dále určíme determinant matic $\mathbf{A}_i$, které vzniknou z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran vektorem, tedy $(1,0,0)^T$: $\det \mathbf{A}_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a$, $\det \mathbf{A}_2 = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & 2a \\ a & 0 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a$ a $\det \mathbf{A}_3 = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2a$. Nyní pomocí Cramerova pravidla (Věta 8.13) spočítáme hodnotu i-té neznámé jako $x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$. Tedy $x_1 = x_2 = \frac{2a}{2a(a+1)} = \frac{1}{a+1}$ a $x_3 = \frac{-2a}{2a(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$.

Konečně standardním postupem zjistíme, že soustava pro $a = -1$ nemá řešení a pro $a = 0$ leží všechna řešení v množině $(1,0,0) + \langle(0,1,-1)\rangle$. □

9.12.

6.5. Existuje-li, najděte inverzní matici k reálné matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Využijeme Větu 8.8 z přednášky a budeme elementárními úpravami upravovat matici $\mathbf{B}$ rozšířenou o jednotkovou matici, tedy matici $(\mathbf{B}|\mathbf{E})$ tak, abychom dostali matici $(\mathbf{E}|\mathbf{C})$. Podaří-li se nám to, bude matice $\mathbf{C}$ právě inverzní maticí k matici $\mathbf{B}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

6.6. Existuje-li, spočítejte nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladě:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right).$$

Dostali jsme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. □

6.7. Spočítejte součin reálných matic $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Označme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Rozšíříme-li matici $\mathbf{A}$ o matici $\mathbf{B}$ a budeme-li vzniklou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ upravovat stejně jako v předchozích dvou úlohách takovými elementárními úpravami, abychom vlevo obdrželi jednotkovou matici, snadno nahlédneme, že

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \sim \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}),$$

Tedy vpravo dostaneme hledaný součin $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Počítejme:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 5 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 & 7 \\ -3 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. □

6.8. Spočítejte součin reálných matic $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

Označme $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Uvědomíme-li si, že $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}^{-1})^T = (\mathbf{D}^{-1})^T \cdot \mathbf{C}^T = (\mathbf{D}^T)^{-1} \cdot \mathbf{C}^T$, můžemem postupovat stejným způsobem jako v minulém příkladu, ovšem pro součin transponovaných matic v obráceném pořadí:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 12 & 8 & 8 & -4 & 4 \\ 12 & 9 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & 18 & -27 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $(\mathbf{D}^T)^{-1} \cdot \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ -8 & 13 & 2 \end{pmatrix}$, a proto $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -9 & 13 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\square$

6.9. Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ adjungovanou matici k maticím $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Postupujme nejprve podle definice, na i-tém řádku a v j-tém sloupci adjungované matice se nachází subdeterminant původní matice, v níž vyškrtneme j-tý řádek a i-tý sloupec, vynásobený hodnotou $(-1)^{i+j}$:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj}(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U poslední matice, o níž z příkladu 6.6 víme, že je regulární, a známe její inverz, stačí abychom spočetli determinant $\det(\mathbf{D}) = 5$ a využili Věty 8.12, která říká, že $\mathbf{D} \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}$, proto $\operatorname{adj}(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}^{-1}$, tedy $\operatorname{adj}(\mathbf{D}) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\square$

16.12.

7. Homomorfismy vektorových prostorů

7.1. Uvažujme reálný vektorový prostor $\mathbf{R}[x]$ všech reálných polynomů. Dokažte, že první derivace $'$ tvoří homomorfismus $\mathbf{R}[x]$ do $\mathbf{R}[x]$. Jak vypadá jádro $\operatorname{Ker}(')$ a obraz $\operatorname{Im}(')$?

Tvrzení, že $(p+q)' = p' + q'$ a $(c.p)' = c.p'$ je dokázáno na přednášce matematické analýzy (nejen) pro všechny polynomy p a q a každou reálnou konstantu c. Tedy první derivace je homomorfismus. Snadno nahlédneme, že Ker($'$) obsahuje právě všechnny konstantní funkce a Im($'$) $= \mathbf{R}[x]$. $\square$

7.2. Je-li $n > 1$ přirozené číslo, dokažte, že n-tá derivace $^{(n)}$ tvoří endomorfismus na $\mathbf{R}[x]$ a popište jádro Ker($^{(n)}$) a obraz Im($^{(n)}$)?

Uvážíme-li, že je n-tá derivace složením n prvních derivací, je $^{(n)}$ homorfismus díky Větě 9.5. Protože je první derivace epimorfismus a složení epimorfismů je opět epimorfismus podle Věty 9.7, dostáváme, že Im($^{(n)}$) $= \mathbf{R}[x]$. Konečně analytické pozorování říká, že n-tá derivace polynomu je nulová, právě když jde o polynom stupně menšího jak n, proto, že Ker($^{(n)}$) obsahuje právě všechnny polynomy stupně menšího jak n. $\square$

7.3. Nechť $f : \mathbf{Z}_5^3 \to \mathbf{Z}_5^2$ je zobrazení dané předpisem $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Rozhodněte, zda jde o homomorfismus.

Podle Věty 4.7 z přednášky zobrazení dané násobením sloupcového vektoru (tedy matice typu $(n, 1)$) maticí splňuje axiomy homomorfismu, tedy $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ a $(r \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} = r \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{A})$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_5^3$ a $r \in \mathbf{Z}_5$. $\square$

7.4. Pro homomorfismus f z předchozího příkladu popište podprostory Ker$f$ a Imf.

Připomeňme, že Ker$f = \{\mathbf{v} | \ f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{v} | \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}\}$. Tedy Ker$f$ je právě množina všech řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$. Snadno spočítáme, že Ker$f = \langle (2, 0, 1) \rangle$.

Vezmeme-li libovolnou generující množinu G vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ (například kanonickou bázi), potom $f(G)$ tvoří generující množinu podprostoru Im$f = f(\mathbf{Z}_5^3)$. Vidíme, že $f((1, 0, 0)) = (4, 1)$, $f((0, 1, 0)) = (1, 2)$ a $f((0, 0, 1)) = (2, 3)$ (tj. obrazy vektorů kanonické báze tvoří právě sloupce matice $\mathbf{A}$). Zbývá si všimnout, že $\langle (4, 1), (1, 2), (2, 3) \rangle = \mathbf{Z}_5^2$. $\square$

Označujme K_n kanonickou bázi libovolného aritmetického vektorového prostoru T^n nad tělesem T a její i-tý vektor $\mathbf{e}_i$.

7.5. Najděte matici homomorfismus f z předchozí úlohy vzhledem ke kanonickým bázím.

Podle definice nejprve potřebujeme zjistit souřadnice vektorů $f(\mathbf{e}_i)$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbf{Z}_5^2$: $\{f(\mathbf{e}_1)\}_{K_2} = \{(4, 1)\}_{K_2} = (4, 1)$, $\{f(\mathbf{e}_2)\}_{K_2} = \{(1, 2)\}_{K_2} = (1, 2)$, $\{f(\mathbf{e}_3)\}_{K_2} = \{(2, 3)\}_{K_2} = (2, 3)$.

Nyní zbývá souřadnicové vektory uspořádat do sloupců matice homomorfismu vzhledem ke kanonickým bázím $[f]_{K_3 K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\square$

7.6. Nechť $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ je zobrazení určené předpisem $g((x_1, x_2)) = (x_1 + 2x_2, 4x_1 - x_2, 2x_2)$. Dokažte, že se jedná o homomorfismus.

Snadno zjistíme, že lze předpis definující zobrazení g vyjádřit jako součin matice a aritmetického vektoru: $g((x_1, x_2)) = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Proto jde podle Věty 4.7 o homomorfismus. $\square$

7.7. Najděte matici vzhledem ke kanonickým bázím homomorfismu g z předchozího příkladu.

Postupujeme stejně jako v Příkladu 7.5. Stačí tedy dosadit vektory kanonické báze do g a seřadíme je do sloupců matice $[g]_{K_2K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\square$

7.8. Mějme $A = ((1, 4), (3, 1))$ bázi prostoru $\mathbf{Z}_7^2$ a $B = ((1, 1, 2), (1, 0, 3), (6, 0, 5))$ bázi prostoru $\mathbf{Z}_7^3$. Najděte matici homomorfismu $h : \mathbf{Z}_7^2 \to \mathbf{Z}_7^3$ vzhledem k bázím A a B, známe-li matici h vzhledem ke kanonickým bázím $[h]_{K_2K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Dvojí aplikací Věty 10.6 můžeme vyjádřit hledanou matici $[h]_{AB}$ jakou součin matic:

$$[h]_{AB} = [1_{\mathbf{Z}_7^3}]_{K_3B} \cdot [h]_{AK_3} = [1_{\mathbf{Z}_7^3}]_{K_3B} \cdot [h]_{K_2K_3} \cdot [1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{AK_2}.$$

Snadno určíme přímo podle definice matice přechodu od kanonické báze k bázi A resp. B, tj. do sloupečků sepíšeme bázi A resp. B:

$$[1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{AK_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad [1_{\mathbf{Z}_7^3}]_{BK_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Konečně zbývá uvážit, že $[1_{\mathbf{Z}_7^3}]_{BK_3} \cdot [1_{\mathbf{Z}_7^3}]_{K_3B} = [1_{\mathbf{Z}_7^3}]_{K_3K_3} = \mathbf{E}$, tedy $[1_{\mathbf{Z}_7^3}]_{K_3B} = [1_{\mathbf{Z}_7^3}]_{BK_3}^{-1}$. Dokončení úlohy je už jen rutinním počítáním s maticemi:

$$[h]_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hledaný součin matic dopočítáme způsobem prezentovaným v 6.7:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $[h]_{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. $\square$

7.9. Buď $A = ((1,1,1),(1,0,1)(1,1,0))$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^3$ a $B = ((1,2),(1,1))$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^2$. Najděte maticí homomorfismu $\psi : \mathbf{Z}_3^3 \to \mathbf{Z}_3^2$ vzhledem ke kanonickým bázím, má-li matici $[\psi]_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k bazím A a B.

Postupujeme standardní cestou s využitím Věty 10.6 (či speciální Věty 10.13):

$$[\psi]_{K_3K_2} = [1_{\mathbf{Z}_3^2}]_{BK_2} \cdot [\psi]_{AB} \cdot [1_{\mathbf{Z}_3^3}]_{K_3A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

a některým ze známých způsobů dopočítáme $[\psi]_{K_3K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

7.10. Najděte matici endomorfismus φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi, víte-li, že $\varphi((1,2)) = (3,0)$ a $\varphi((2,1)) = (3,3)$.

Protože $B = ((1,2),(2,1))$ tvoří bázi $\mathbf{R}^2$, zaručuje nám Věta 9.22, že daná podmínka určuje homomorfismus f jednoznačně, a bezprostředně z definice dostaneme matici $[\varphi]_{BK_3} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dále postupujeme obvyklým způsobem:

$$[\varphi]_{K_2} = [\varphi]_{K_2K_2} = [\varphi]_{BK_2} \cdot [1_{\mathbf{R}^2}]_{K_2B} = [\varphi]_{BK_2} \cdot [1_{\mathbf{R}^2}]_{BK_2}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

6.1.

7.11. Najděte ve vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_3^2$ matici přechodu od báze $M = ((2,1),(1,1))$ k bázi $N = ((1,1),(0,1))$.

Uvědomíme si, že matice přechodu od báze M k bázi N je právě maticí $[1_{\mathbf{Z}_3}]_{NM}$ identického homomorfismu vzhledem k bázím N a M. Nyní opět použíjeme Větu 5.6, abychom dostali:

$$[1_{\mathbf{Z}_3}]_{NM} = [1_{\mathbf{Z}_3}]_{K_2M} \cdot [1_{\mathbf{Z}_3}]_{NK_2} = [1_{\mathbf{Z}_3}]_{MK_2}^{-1} \cdot [1_{\mathbf{Z}_3}]_{NK_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

7.12. Je-li $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ matice homomorfismu $f : \mathbf{Z}_7^4 \to \mathbf{Z}_7^3$ vzhledem k bazím $M = ((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0))$ a $N = ((3,1,4),(3,3,0),(2,1,6))$. Určete dimenze jádra $\mathrm{Ker} f$ a obrazu $\mathrm{Im} f$.

Nejprve spočítáme hodnost matice $[f]_{MN} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, obvyklým způsobem zjistíme, že $h([f]_{MN}) = 2$. Nyní využijeme Větu 10.19, která říká, že $\dim(\mathrm{Im} f) =$

$h([f]_{MN}) = 2$ a Větu 9.27, která říká, že $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(\mathbf{Z}_7^4) = 4$, a proto $\dim(\mathrm{Ker} f) = 4 - \dim(\mathrm{Im} f) = 2$. □

13.1.

8. Lineární formy

8.1. Dokažte, že je zobrazení $f : \mathbf{Z}_7^4 \to \mathbf{Z}_7$ definované předpisem $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_4$ lineární forma a najděte souřadnice f vzhledem ke kanonické bázi K_4 a vzhledem k bázi $B = ((1,1,1,1),(2,0,2,2),(1,1,0,1),(4,4,4,0))$.

Vidíme, že hodnotu $f(\mathbf{v})$ dostaneme jako součin vektoru $\mathbf{v}$a sloupcového vektoru $(2,3,0,4)^T$, jde tedy o homomorfismus vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^4$ do $\mathbf{Z}_7$, tj. jde podle definice o lineární formu na prostoru Z74.

Souřadnice f vzhledem k jakékoli bázi dostaneme dosazením jednotlivých bázických vektorů a jejich seřazením do řádku (v případě lineárních forem na aritmetickém vektorovém prostoru jde zřejmě právě o matici homomotrfismu f), tedy $\{f\}_{K_4} = [f]_{K_4 1} = (2,3,0,4)$ a $\{f\}_B = [f]_{B1} = (2,5,2,6)$. □

8.2. Nechť $\{g\}_B = (3,4,2,1)$ jsou souřadnice lineární formy $g : \mathbf{Z}_7^4 \to \mathbf{Z}_7$ vzhledem k bázi $B = ((1,1,1,1),(2,0,2,2),(1,1,0,1),(4,4,4,0))$. Najděte souřadnice a analytické vyjádření g vzhledem ke kanonické bázi K_4 a

Hledáme-li vektor $\{g\}_{K_4}$ stačí si uvědomit, že vlastně jedná o matici homomorfismu, a poté využít Větu 10.6, protože

$$\{g\}_{K_4} = [g]_{K_4 1} = [g]_{B1} \cdot [1_{\mathbf{Z}_7^4}]_{K_4 B} = (3,4,2,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Vidíme, že nám stačí vyřešit nehomogenní soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Standardním postupem tedy najdeme vektor $(0,1,1,1)$, který je právě hledaným souřadnicovým vektorem $\{g\}_{K_4}$ □

8.3. Najděte souřadnice lineární formy f chápané jako vektor duálního vektorového prostoru vzhledem duální bázi ke kanonické bazi a vzhledem k duální bázi k bázi B, kde f a B bereme z Příkladu 8.1.

□

Označme (f_1, f_2, f_3, f_4) hledanou duální bázi. Z definice víme, že $f_i(\mathbf{e}_j) = 0$, je-li $i \neq j$, a $f_i(\mathbf{e}_i) = 0$. To přímo podle definice znamená, že $\{f_i\}_{K_4} = \mathbf{e}_i$, a proto $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_i$.

Označme $\tilde{K_4}$, respektive $\tilde{B}$ duální báze k bázím K_4 a B. Nejprve přímo podle definice a předchozí úlohy vidíme, že $\{f\}_{\tilde{K_4}} = (2,3,0,4)$. Využijeme-li dále Větu 11.7 z přednášky, pak snadno určíme souřadnice lineární formy vzhledem k duální bázi $\tilde{B}$ bez toho, že bychom $\tilde{B}$ museli hledat, neboť platí $\{f\}_{\tilde{B}} = \{f\}_B = (2,5,2,6)$. □

8.4. Mějme bázi $B = ((1,0,1),(3,2,2),(2,0,4))$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^3$. Určete analytické vyjádření lineárních forem duální báze k bázi B.

Potřebujeme najít souřadnice linárních forem duální báze vzhledem ke kanonické bázi, z nichž už snadno dostaneme analytický tvar. Označme $\tilde{B} = (f_1, f_2, f_3)$ duální bázi k bázi B a souřadnice forem: $\{f_i\}_{K_3} = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ pro $i = 1,2,3$. Uvědomme si, že požadavek na duální bazi lze v maticovém zápisu vyjádřit následovně:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hledáme tedy obvyklým způsobem inverzní matici ke známé matici, snadno, teedy spočítáme, že

$$\begin{pmatrix} \{f_1\}_{K_3} \\ \{f_2\}_{K_3} \\ \{f_3\}_{K_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zbývá sepsat analytické vyjádření forem: $f_1(x,y,z) = 2x+3y+4z$, $f_2(x,y,z) = 3y$, $f_3(x,y,z) = 2x + 4y + 3z$. □

8.5. Uvažujme bázi $M = ((1,-1),(-1,2))$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$. Najděte souřadnice vzhledem k M a vzhledem ke kanonické bázi lineárních forem duální báze k bázi M.

Označme $\tilde{M} = (g_1, g_2)$ duální bázi k bázi M. Okamžitě z definice vidíme, že $\{g_1\}_M = (1,0)$ a $\{g_2\}_M == (0,1)$, tedy souřadnice jsou právě vektory kanonické báze. Při hledání souřadnic giK2 můžeme postupovat stejně jako v předchozím příkladu nebo podle Věty 11.9. V obou případech nám zbývá najít inverzní matici:

$$\begin{pmatrix} \{g_1\}_{K_2} \\ \{g_2\}_{K_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\{g_1\}_{K_2} = (2,1)$ a $\{g_2\}_{K_2} = (1,1)$. □

8.6. Uvažujme $h_1(x) = 4x2 + 4x3$, $h_2(x) = 4x1 + 2x2 + x3$ a $h_3(x) = 3x1 + 3x2$ lineární formy na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^3$. Ověřte, že (h_1, h_2, h_3) tvoří bázi duálního vektorového prostoru, a najděte bázi B prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ tak, aby (h_1, h_2, h_3) byla duální bází k bázi B.

Řešíme duální úlohu k předchozím dvěma příkladům. Známe tentokrát souřadnice lineárních forem vzhledem ke kanonické bázi a potřebujeme najít vektory $\mathbf{u}_i$ tak, aby součin $\mathbf{u}_i\{g_j\}_{K_3}^T = \delta_{ij}$, což snadno vyjádříme pomocí matic:

$$\begin{pmatrix} \{\mathbf{u}_1\}_{K_3} \\ \{\mathbf{u}_2\}_{K_3} \\ \{\mathbf{u}_3\}_{K_3} \end{pmatrix} \cdot (\{g_1\}_{K_3}^T, \{g_2\}_{K_3}^T, \{g_3\}_{K_3}^T) = \mathbf{E}$$

Tedy opět se úkol redukuje na nalezení inverzní matice. Navíc teprve při hledání inverzní matice můžeme zodpovědět otázku existence báze B. Jestliže by neexistovala inverzní matice k dané matici (tj. pokud by souřadnice lineárních forem hi byly lineárně závislé), pak by lineární formy h_i netvořili bázi, v opačném případě bází budou. Dopočítáme tedy:

$$\begin{pmatrix} \{\mathbf{u}_1\}_{K_3} \\ \{\mathbf{u}_2\}_{K_3} \\ \{\mathbf{u}_3\}_{K_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $\mathbf{u}_1 = (2,3,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3,2)$ a $\mathbf{u}_3 = (1,1,4)$ a (h_1, h_2, h_3) je duální bází vzhledem k bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. □

Další úlohy

(1) Rozhodněte, zda jsou nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ regulární matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}^3$.

(2) Najděte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ adjungované matice k maticím z předchozí úlohy.

(3) Rozhodněte, pro která $a \in \mathbf{Z}_7$ je nad $\mathbf{Z}_7$ matice $\begin{pmatrix} a & 2+a & 1 \\ 3a+2 & 1 & a \\ 2a^2 & a+6 & 2+a \end{pmatrix}$ regulární.

(4) Najděte pro všechna $a \in \mathbf{Z}_7$, pro něž je to možné, inverzní matici k matici z předchozí úlohy.

(5) Spočítejte součin $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$ nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$.

(6) Uvažujme zobrazení $f, g, h : \mathbf{Z}_7^4 \to Z_7^3$ vektorových prostrorů nad tělesem $\mathbf{Z}_7$, kde f je určené předpisem $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_2 + 3x_3 + 5x_4, 4x_1 + x_3, x_1 + 6x_3 + x_4)$, dále g je určené svou maticí vzhledem ke kanonickým bázím $[g]_{K_4K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ a h je určené předpisem $h(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + 3 \cdot g(\mathbf{v})$ pro každé $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}_7^4$.

a) Dokažte, že je h homomorfismus.

b) Najděte matice g a h vzhledem ke kanonickým bazím.

c) Najděte matice f, g a h vzhledem k bazím $M = ((1,1,2,3), (1,1,1,0), (5,0,1,0), (4,0,2,0))$ a $N = ((3,1,2), (1,2,0), (6,6,0))$.

d) Určete jádro a obraz homomorfismů f, g a h.

e) Rozhodněte, zda existuje $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}_7^4$, pro které $f(\mathbf{v}) = (1,0,3)$.

f) Rozhodněte, zda existuje $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}_7^4$, pro které $f(\mathbf{v}) = (1,0,3)$.

g) Najděte matice $\psi \circ f$, $\psi \circ g$ a $\psi \circ h$ vzhledem ke kanonickým bazím je-li ψ endomorfismus daný maticí $[\psi]_{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázím $A = ((0,1,2), (2,0,1)(1,2,0))$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^3$ a $B = ((2,5), (1,2))$.

(7) Dokažte, že je endomorfismus φ z Příkladu 7.10 izomorfismus a najděte matice φ^{-1} vzhledem ke kanonické bázi.