1. Vrstevnice funkce, otevřené a uzavřené množiny

1. Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice funkcí:

$$f_1(x,y) = x + \sqrt{y}, \qquad f_2(x,y) = \frac{y}{x}, \qquad f_3(x,y) = x^2 + y^2,$$
$$f_4(x,y) = x^2 - y^2, \qquad f_5(x,y) = \sqrt{xy},$$
$$f_6(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad f_7(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}},$$
$$f_8(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}, \qquad f_9(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)},$$
$$f_{10}(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y), \qquad f_{11}(x,y) = |x| + y.$$

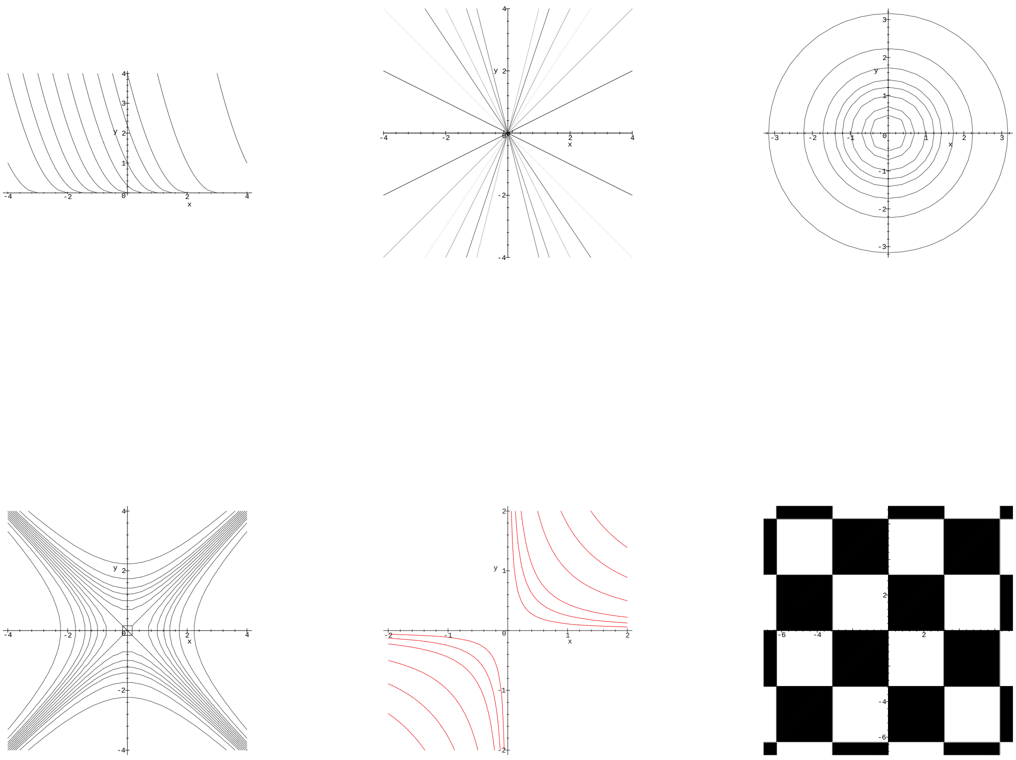
2. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené eventuálně uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici.

$$A_1 = \mathbb{Q}, \qquad A_2 = \mathbb{N}, \qquad A_3 = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$A_4 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x > 0,\ y \le 0\}, \qquad A_5 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\},$$
$$A_6 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \ge 1\}, \qquad A_7 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + e^y > 17\},$$
$$A_8 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 + 2xy = 5\},$$
$$A_9 = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x \ge 0, y > 0, x + y = 2, z \le 0\}.$$

3. Určete uzávěr, hranici a vnitřek množiny $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ |x+y| - x - y > 0\}$.

Výsledky

1. Vrstevnice funkcí f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, a f_{10}:



2. A_1 není ani otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_1 = \emptyset$, $\overline{A_1} = \mathbf{R}$, $H(A_1) = \mathbf{R}$; A_2 je uzavřená a není otevřená, $\operatorname{int} A_2 = \emptyset$, $\overline{A_2} = \mathbb{N}$, $H(A_2) = \mathbb{N}$; A_3 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_3 = \emptyset$, $\overline{A_3} = A_3 \cup \{0\}$, $H(A_3) = A_3 \cup \{0\}$; A_4 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_4 = (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$, $\overline{A_4} = \langle 0, +\infty) \times (-\infty, 0\rangle$, $H(A_4) = \{0\} \times (-\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty) \times \{0\}$; A_5 je otevřená a není uzavřená, $\operatorname{int} A_5 = A_5$, $\overline{A_5} = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, $H(A_5) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$; A_6 není otevřená a je uzavřená, $\operatorname{int} A_6 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 > 1\}$, $\overline{A_6} = A_6$, $H(A_6) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$; A_7 je otevřená a není uzavřená, $\operatorname{int} A_7 = A_7$, $\overline{A_7} = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + e^y \geq 17\}$, $H(A_7) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + e^y = 17\}$; A_8 není otevřená a je uzavřená, $\operatorname{int} A_8 = \emptyset$, $\overline{A_8} = A_8$, $H(A_8) = A_8$; A_9 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_9 = \emptyset$, $\overline{A_9} = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$, $H(A_9) = \overline{A_9}$.

4. $\operatorname{int} M = M$, $\overline{M} = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x + y \leq 0\}$, $H(M) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x + y = 0\}$