Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)
LS 1998-1999

Příklad A1 : Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0\\ 5x_1+6x_2+7x_3+8x_4&=-8\\ x_2+2x_3+2x_4&=1\\ x_1+2x_2+\ x_3+\ x_4&=-3 \end{aligned}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0,2]$.

$$f(x,y)=\sqrt[3]{y^2-\cos x} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A3 : Ukažte, že rovnice

$$\sin(\sin y)+\cos(\sin x)=\sin(\cos x)+\cos(\cos y)$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi/2,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\pi/2$. (10 bodů)

Příklad A4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z)=x+2y+3z \quad M=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ y+z=2,\ x^2+y^2+z^2\le 4\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad A5 : Nalezněte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence).

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)
LS 1998-1999

Příklad B1 : Spočtěte matici inverzní k matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ -6 & -4 & -2 & 12 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$.

$$f(x, y) = (x + y + 1)^{|xy|} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B3 : Ukažte, že rovnice

$$\arcsin(x + y) + \arccos(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{2}$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad B4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = -y + xz, \quad M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z^2 + y^2 = 1\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad B5 : Spočtěte určitý integrál.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{cotg} x}{1 - \sin^2 x}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)
LS 1998-1999

Příklad C1 : Určete hodnost matice $\mathbb{A}$ v závislosti na parametru x, pokud

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2+|x| & x^2 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, \pi]$.

$$f(x,y) = \max(x - \cos y, x + \cos^2 y) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C3 : Ukažte, že rovnice

$$x^3 + y^3 = \log \frac{x^2 + y^2}{2}$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, -1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad C4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = x + yz, \quad M = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \le 1, x^2 + z^2 \le 1\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad C5 : Spočtěte primitivní funkci.

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 5x + 4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)
LS 1998-1999

Příklad D1 : Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -6 \\ 9 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[\frac{\pi}{3}, \pi]$.

$$f(x, y) = x\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{2x+7y} - \log(1 + x^2 + y^2) = 1 + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad D4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = x^2 + z^2, \quad M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y - z = 2\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad D5 : Spočtěte primitivní funkci.

$$\int \frac{e^{2x} + e^x - 7}{e^{3x} + 3e^{2x} + e^x + 3}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)
LS 1998-1999

Příklad E1 : Spočtěte matici inverzní k matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -9 & -2 \\ 14 & -4 & 18 & 0 \\ 12 & -4 & 16 & 0 \\ 9 & -2 & 15 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0, -\pi]$.

$$f(x,y) = \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E3 : Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(x + y^2 + \cos(x + y)) - \sin(x + y) = \frac{\pi}{4}$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad E4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad M = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x + y + z = 1,\ xy = 1\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad E5 : Spočtěte určitý integrál.

$$\int_3^{20} \frac{x + \sqrt{5x - 4}}{15x + 9}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (F)
LS 1998-1999

Příklad F1 : Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1+5x_2+x_4&=1,\\ 2x_1+6x_2+x_3+x_4&=3,\\ 3x_1+7x_2+2x_3+x_4&=5,\\ 4x_1+8x_2+2x_3+x_4&=6. \end{aligned} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[3,4]$.

$$f(x,y)=|x^2-2y^2-xy-x-y| \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F3 : Ukažte, že rovnice

$$x^3+y^7=e^{xy^2}-\sin y$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad F4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z)=xyz, \quad M=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=4,\ x+y+z=1\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad F5 : Spočtěte určitý integrál.

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x}{2\sin^4 x+7}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)
LS 1998-1999

Příklad G1 : Určete hodnost matice $\mathbb{A}$ a rozhodněte, zda platí $\det \mathbb{A} = 0$, pokud

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 1 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ 10 & 11 & 10 & 9 & 20 \\ 9 & 2 & 7 & 2 & 19 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad G2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0, e]$.

$$f(x,y) = \sqrt[3]{\log(x+y^3} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad G3 : Ukažte, že rovnice

$$\sin^2\left(e^{x+y}\right) + \cos^2\left(e^{2y-x}\right) = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad G4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2, \quad M = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2yz = 1\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad G5 : Spočtěte primitivní funkci.

$$\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-2x+8}}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$