Zadání a řešení písemných testů z Matematiky II

FSV 1997-98

Miroslav Zelený

Oldřich John

Ondřej Kalenda

Jan Kolář

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad 1: Najděte řešení soustavy rovnic a spočtěte determinant soustavy.

$$\begin{array}{r} x+2y+3z+4t=1 \\ 2x-2y+3z-3t=-5 \\ x+\ \ y+\ \ z+\ \ t=5 \\ 4x+3y-5z+2t=3 \end{array}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0,1]$;

$$f(x,y)=\sqrt{y+\sin x}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy)+\cos(xy)=1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π. (10 bodů)

Příklad 4: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y)=x^4y \qquad M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^4+y^4\le 16, x\ge -1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5: Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z Matematiky II pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad A1: Gaussovou eliminací obdržíme řešení $x=-3$, $y=13$, $z=2$, $t=-7$. Spočtěme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 58.$$

Příklad A2: Funkce f je definována na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \sin x + y \geq 0\}$. V bodech, kde $y + \sin x > 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}}.$$

V bodech kde $y + \sin x = 0$ nemůže parciální derivace f podle y existovat. Parciální derivace podle x může existovat jen v bodech tvaru $[3\pi/2 + 2k\pi, 1], k \in \mathbb{Z}$. Zkusme počítat podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(3\pi/2 + 2k\pi, 1) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(3\pi/2 + 2k\pi + t, 1) - f(3\pi/2 + 2k\pi, 1)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(3\pi/2 + 2k\pi + t)}}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t}.\end{aligned}$$

Poslední limita neexistuje protože limita zleva $(-1/\sqrt{2})$ se nerovná limitě zprava $(1/\sqrt{2})$. Parciální derivace funkce f existují pouze na vnitřku množiny M a jsou tam spojité. Proto v bodě $[0, 1]$ existuje totální diferenciál, a tedy tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (y - 1).$$

Příklad A3: Položme
$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \cos(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(\pi, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) = 1,$$
$$\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) = 0,$$
$$-\sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$-\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) = 0.$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

Příklad A4: Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y];\ y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \qquad H_2 = \{[-1,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^4 + y^4 = 16, \tag{1}$$
$$4x^3y = \lambda 4x^3, \tag{2}$$
$$x^4 = \lambda 4y^3. \tag{3}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

Příklad A5: Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad dx = \frac{-2-2t^2}{4t^2}\, dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 \left(\frac{1-t^2}{2t}+t\right)} \cdot \frac{-2-2t^2}{4t^2}\, dt = \int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\, dt &= \int \frac{-1}{(1-t)^2}\, dt + \int \frac{1}{(1+t)^2}\, dt \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} = \frac{2}{t^2-1}.\end{aligned}$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{2}{(\sqrt{x^2+1}-x)^2-1}, \qquad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty).$$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad 1: Určete hodnost matice A a rozhodněte, zda platí $\det A = 0$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = |x^2 - y^2|. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Ukažte, že rovnice

$$2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = 2x + 4y \qquad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5: Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x + 1)(x^2 + x + 1)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z Matematiky II pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad B1: Převeďme matici A pomocí elementárních řádkových úprav na schodovitou matici:

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\
2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\
3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\
0 & -10 & -2 & 7 & 6
\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\
0 & 4 & 2 & -8 & -9 \\
0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\
0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\
0 & -10 & -2 & 7 & 6
\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\
0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\
0 & 0 & 4 & -9 & -11 \\
0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\
0 & 0 & 8 & -103 & -134
\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\
0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\
0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\
0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\
0 & 0 & 0 & 41 & 54,
\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\
0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\
0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\
0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63}
\end{pmatrix}.
$$

Matice A má hodnost 5, a je tedy regulární. Proto platí $\det A \neq 0$.

Příklad B2: Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech, kde $y^2 \neq x^2$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2x, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2y.
\end{aligned}
$$

V bodech, kde $y^2 = x^2$, zkusme počítat parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle definice

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{|(x + t)^2 - y^2|}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{|2xt + t^2|}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} |2x + t|.
\end{aligned}
$$

Poslední limita existuje, jen když $x = 0$, a je rovna nule. Vzhledem k symetrii funkce f ($f(x, y) = f(y, x)$) totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$
z = 3 - 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2).
$$

Příklad B3: Položme

$$
F(x, y) = 2x^4 y + x^3 + y^3 + xy - 1.
$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= 8x^3y + 3x^2 + y,\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 2x^4 + 3y^2 + x.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{gathered}2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,\\ 8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,\\ 24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)\\ +\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad B4: Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned}H_1 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},\\ H_2 &= \{[0,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1\rangle\},\\ H_3 &= \{[x,0] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.\end{aligned}$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \tag{1}$$

$$2 = \lambda\frac{1}{4}x^{-3/4}, \tag{2}$$

$$4 = \lambda\frac{1}{4}y^{-3/4}. \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4}\right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0,y) = 4y, \qquad y \in \langle 0,1\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[0,1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x,0) = 2x, \qquad x \in \langle 0,1\rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[1,0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0,1]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad B5: Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Nyní integrujme jednotlivé parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+1}\,dx &\overset{c}{=} \log|x+1|,\\
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1}\\
&\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Dohromady tedy máme

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx \overset{c}{=} \log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (C)

LS 1997-98

Příklad 1: Spočtěte determinant matice A.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\log\left(\frac{x}{y}\right)}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Ukažte, že rovnice

$$\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2) \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1, |z| \le 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5: Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2 + x + 4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z Matematiky II pro FSV (C)

LS 1997-98

Příklad C1: Platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 29.$$

Příklad C2: Funkce f je definována na množině $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x>0,\ y>0\}\cup\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x<0,\ y<0\}$. V bodech $[x,y]\in\mathcal{D}(f)$, kde $x\neq y$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3}\cdot\frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3}\cdot\frac{1}{y}$$

V bodech z definičního oboru, kde $y=x$, zkusme počítat parciální derivace podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)&=\lim_{t\to0}\frac{f(x+t,x)-f(x,x)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{x+t}{x}\right)}}{t}\\&=\lim_{t\to0}\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}}\cdot\frac{\frac{t}{x}}{t^3}}=\begin{cases}+\infty&\text{pro } x>0,\\-\infty&\text{pro } x<0;\end{cases}\\\frac{\partial f}{\partial y}(y,y)&=\lim_{t\to0}\frac{f(y,y+t)-f(y,y)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{y}{y+t}\right)}}{t}\\&=\lim_{t\to0}-\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{y}\right)}{\frac{t}{y}}\cdot\frac{\frac{t}{y}}{t^3}}=\begin{cases}-\infty&\text{pro } y>0,\\+\infty&\text{pro } y<0.\end{cases}\end{aligned}$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z=-\sqrt[3]{\log 2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}}\cdot(x-1)-\frac{1}{6}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}}\cdot(y-2).$$

Příklad C3: Položme

$$F(x,y)=\log(x^2+y^2+\cos(xy))+y.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G=\mathbb{R}^2$) obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)}\cdot(2x-\sin(xy)\cdot y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)}\cdot(2y-\sin(xy)\cdot x)+1.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F\in\mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=1\neq0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$.

Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))+\varphi(x)=0,$$

$$\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))+\varphi'(x)=0,$$

$$\begin{aligned}\frac{-1}{(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))^2}&\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))^2\\ +\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}&\cdot(2+2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x)\\ -\cos(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2&-\sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x)+x\varphi''(x)))+\varphi''(x)=0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x=0$ a použijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=0$ a $\varphi''(0)=-2$.

Příklad C4: Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x,y,1)=f(x,y,-1)<f(x,y,z)<f(x,y,0),\qquad [x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ z\in(-1,1)\setminus\{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=0\}$ a minima na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=-1 \text{ nebo } z=1\}$. Položme $g(x,y)=x^2+xy+y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x,y)=x^2+y^2-1$. Platí $g,h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=2x,\qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=2y.$$

Pro každé $[x,y]\in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y),\frac{\partial h}{\partial y}(x,y))\neq(0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2+y^2=1, \tag{1}$$

$$2x+y=\lambda 2x, \tag{2}$$

$$x+2y=\lambda 2y. \tag{3}$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme

$$(3-2\lambda)(x+y)=0.$$

To znamená, že buď $x=-y$ nebo $\lambda=3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x=y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$ a maxima v bodech $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{}$

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},-1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},-1],\ [-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0].$$

Příklad C5: Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{x^2+x+4}.$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Integrace prvních dvou parciálních zlomků je snadná. Integrujme

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+31}{x^2+x+4}\,dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx + 30 \int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 15/4}\,dx \\
&= \log(x^2+x+4) + 8 \int \frac{1}{\left((2x+1)/\sqrt{15}\right)^2 + 1}\,dx \\
&\overset{c}{=} \log(x^2+x+4) + 4\sqrt{15}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)
\end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx \overset{c}{=} -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{5}\log|x-2| \\
+ \frac{1}{5}\log(x^2+x+4) + \frac{4\sqrt{15}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)
\end{aligned}$$

pro $x \in (-\infty, 2)$ nebo $x \in (2, +\infty)$.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (D)

LS 1997-98

Příklad 1: Spočtěte determinant matice A.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = e^{x^2-y} + 7y + |xy|. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Ukažte, že rovnice

$$\log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M. Nakreslete množinu M.

$$f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3 \qquad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5: Spočtěte

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z Matematiky II pro FSV (D)

LS 1997-98

Příklad D1: Platí

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 32.$$

Příklad D2: Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x, y]$, kde $xy \neq 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2-y} \cdot 2x + \operatorname{sgn}(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^{x^2-y} + 7 + \operatorname{sgn}(xy) \cdot x.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $xy = 0$. Z věty o aritmetice limit plyne, že funkce f má parciální derivaci podle x (resp. podle y) v bodě $[x, y]$ právě tehdy, když ji tam má funkce $g : [x, y] \to |xy|$ (je totiž $f - g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$). Počítejme derivace funkce g v bodech $[x, 0]$, $x \in \mathbb{R}$, a $[0, y]$, $y \in \mathbb{R}$, podle definice:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x+t, 0) - g(x, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x, t) - g(x, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|xt|}{t} = \lim_{t\to 0} |x| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $x = 0$, a v tomto případě je nulová.

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0, y+t) - g(0, y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t, y) - g(0, y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|ty|}{t} = \lim_{t\to 0} |y| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $y = 0$, a v tomto případě je nulová.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, y];\ y \in \mathbb{R},\ y \neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x, 0];\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1/e + 16 + (2/e + 2) \cdot (x - 1) + (8 - 1/e) \cdot (y - 2).$$

Příklad D3: Položme

$$F(x, y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0, 0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1 + y^2} + x.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{gathered}
\log(x + \operatorname{arctg}\varphi(x) + 1) + x\varphi(x) = 0, \\
\frac{1}{x + \operatorname{arctg}\varphi(x) + 1} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0, \\
\frac{-1}{(x + \operatorname{arctg}\varphi(x) + 1)^2} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right)^2 \\
+\frac{1}{x + \operatorname{arctg}\varphi(x) + 1} \cdot \frac{\varphi''(x)(1 + \varphi(x)^2) - 2\varphi'(x)\varphi'(x)\varphi(x)}{(1 + \varphi(x)^2)^2} \\
+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0,
\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = 2$.

Příklad D4: Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech $[-1/2, 0]$, $[0,0]$. Pouze první bod však patří do vnitřku množiny M.

Hranici množiny M si rozdělíme na dvě části:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x = 0,\ y \in [-2,2]\}, \\
H_2 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4,\ x < 0\}.
\end{aligned}$$

Na množině H_1 má funkce f podezřelé body: $[0,2]$, $[0,-2]$, $[0,0]$, protože $f(0,y) = -y^2$. Podezřelé body na H_2 budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Na množině H_2 je vždy $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned}
&(1) & x^2 + y^2 &= 4, \\
&(2) & 2x + 4x^2 &= \lambda 2x, \\
&(3) & -2y &= \lambda 2y.
\end{aligned}$$

Z (3) dostaneme, že $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. První možnost spolu s (2) dává, že $x = 0$ nebo $x = -1$. Pomocí (1) dopočteme pro tato x příslušná y a dostaneme body

$$[0,2],\ [0,-2],\ [-1,\sqrt{3}],\ [-1,-\sqrt{3}].$$

První dva ovšem neleží v H_2. Pokud $y = 0$, pak z (1) dostáváme bod $[-2,0]$ a bod $[2,0]$, který ovšem neleží v H_2.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodě $[-1/2, 0]$ a minima v bodě $[-2, 0]$.

Příklad D5: Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\langle 1, +\infty)$. Použijeme substituci $\sqrt{x-1} = t$. Dostaneme $x = t^2 + 1$ a $dx = 2t\,dt$. Nyní je třeba integrovat:

$$\int \frac{2t^2}{t^2+3}\,dt = \int \left(2 - \frac{6}{t^2+3}\right)\,dt = \int 2\,dt - \int \frac{2}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,dt$$
$$\stackrel{c}{=} 2t - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}.$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\,dx = 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3}}, \qquad x \in (1, +\infty).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\,dx = 2\sqrt{3}(1 - \pi/4).$$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad 1: Spočtěte determinant matice A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = \min\{x^2+y^2, 2-x^2-y^2\}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 2y$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = xy + yz \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5: Spočtěte

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z Matematiky II pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad E1: Platí:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

Příklad E2: Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro funkci f platí:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{pro } x^2+y^2 \le 1; \\ 2-x^2-y^2 & \text{pro } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

V bodech $[x,y]$, kde $x^2+y^2 \neq 1$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2x & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2y & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $x^2+y^2=1$. Uvažujme bod $[x_0,y_0]$ takový, že $x_0^2+y_0^2=1$. Počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{(x_0+t)^2+y_0^2, 2-(x_0+t)^2-y_0^2\}-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{1+2x_0t+t^2, 1-2x_0t-t^2\}-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{2x_0t+t^2, -2x_0t-t^2\}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} -|2x_0t+t^2|/t = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 = 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x_0 \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii funkce f lze parciální derivaci podle y počítat analogicky.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ x\neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ y\neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -3 - 2\cdot(x-1) - 4\cdot(y-2).$$

Příklad E3: Položme

$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$, která obsahuje bod $[1,1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad E4: Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, &&\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, &&\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z, &&\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, &&\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, &&\frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, &&\frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$y = \lambda_1 2x + \lambda_2, \tag{1}$$

$$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2, \tag{2}$$

$$y = \lambda_1 2z + \lambda_2, \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$

$$x + y + z = 1. \tag{5}$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$.

V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1-\sqrt{5})/4, 1/2, (1+\sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1+\sqrt{5})/4, 1/2, (1-\sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0, 1, 0], \qquad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

Příklad E5: Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x \, dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t + t^3} \, dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{-1}{t+t^3} \, dt &= \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} \, dt - \int \frac{1}{t} \, dt \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2} \log(1+t^2) - \log|t|, \qquad t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x} \, dx \overset{c}{=} \frac{1}{2} \log(1 + \cos^2 x) - \log|\cos x|, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x} \, dx = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2}.$$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (F)

LS 1997-98

Příklad 1: Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = x^{(y^x)}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Ukažte, že rovnice

$$y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \qquad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 4y^2 \le 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5: Spočtěte

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z Matematiky II pro FSV (F)

LS 1997-98

Příklad F1: Upravme matici A pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice:

$$h(A) = h\begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ x & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= h\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2x & 2+3x \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2x & 2+3x \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pokud $x \neq 0$, je hodnost matice rovna 3. V případě, že $x = 0$, je hodnost matice A rovna 2.

Příklad F2: Funkce f je definována na $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Pro funkci f platí:

$$f(x,y)=\exp(y^x\log x).$$

V bodech $[x,y]\in\mathcal{D}(f)$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\exp(y^x\log x)\cdot\left(y^x\cdot\log y\cdot\log x+y^x\cdot\frac{1}{x}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\exp(y^x\log x)\cdot\left(xy^{x-1}\cdot\log x\right).\end{aligned}$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z=1+2\cdot(x-1)+0\cdot(y-2).$$

Příklad F3: Položme

$$F(x,y)=y^3x^2+y^2x^2+\sin y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)&=2y^3x+2y^2x,\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)&=3y^2x^2+2yx^2+\cos y.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=1\neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3x^2+\varphi(x)^2x^2+\sin\varphi(x)=0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{gathered}3\varphi(x)^2\varphi'(x)x^2+2\varphi(x)^3x+2\varphi(x)\varphi'(x)x^2+2\varphi(x)^2x+\cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)=0,\\ 6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x)x^2+3\varphi(x)^2\varphi''(x)x^2+6\varphi(x)^2\varphi'(x)x+6\varphi(x)^2\varphi'(x)x\\ +2\varphi(x)^3+2\varphi'(x)\varphi'(x)x^2+2\varphi(x)\varphi''(x)x^2+4\varphi(x)\varphi'(x)x\\ +4\varphi(x)\varphi'(x)x+2\varphi(x)^2-\sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\varphi'(x)+\cos\varphi(x)\cdot\varphi''(x)=0.\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x=0$ a použijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=0$ a $\varphi''(0)=0$.

Příklad F4: Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=2x\cdot e^{-(2x^2+y^2)}+(x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}\cdot(-4x),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=14y\cdot e^{-(2x^2+y^2)}+(x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}\cdot(-2y).\end{aligned}$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1-2(x^2+7y^2)) = 0,$$
$$2y(7-(x^2+7y^2)) = 0.$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0]$, $[1/\sqrt{2},0]$, $[-1/\sqrt{2},0]$, $[0,1]$, $[0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2+4y^2-1.$$

Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x,8y)$ je nulový, právě když $[x,y]=[0,0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$2x\cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}\cdot(-4x) = 2\lambda x, \tag{1}$$

$$14y\cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}\cdot(-2y) = 8\lambda y, \tag{2}$$

$$x^2+4y^2 = 1. \tag{3}$$

Z (1) vyplývá, že $x=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x=0$, pak podle (3) je $y=\pm 1/2$. Pokud $y=0$, pak podle (3) je $x=\pm 1$. V případě, že $x\neq 0$ a $y\neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2+7y^2) = -3$, což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0,0],\ [1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},0],\ [0,1/2],\ [0,-1/2],\ [1,0],\ [-1,0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0,1/2]$, $[0,-1/2]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad F5: Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}\setminus(\{\pi/2+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(2k+1)\pi;\ k\in\mathbb{Z}\})$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2,\pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x\,dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t+t^2}\,dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\int \frac{-1}{t+t^2}\,dt = \int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{t}\right)dt = \int\frac{1}{1+t}\,dt - \int\frac{1}{t}\,dt$$
$$\stackrel{c}{=} \log|1+t| - \log|t|, \qquad t\in(-\infty,-1) \text{ nebo } t\in(-1,0) \text{ nebo } t\in(0,+\infty).$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int\frac{\sin x}{\cos x+\cos^2 x}\,dx \stackrel{c}{=} \log|1+\cos x| - \log|\cos x|, \qquad x\in(-\pi/2,\pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x+\cos^2 x}\,dx = \log\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad 1: Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^4. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Ukažte, že rovnice

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = z + e^{xy} \qquad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5: Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x + 1)(x^2 + 2x + 4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z Matematiky II pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1: Standardním postupem obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 17 & 4 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 11 & 26 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Platí tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & 3 & 4 \\ -7 & -17 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad G2: Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x, y] \neq [0, 0]$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

V bodě $[0, 0]$ spočítáme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(\operatorname{arctg}(\sqrt{t^2}))^4}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(|t|)}{|t|} \right)^4 \cdot \frac{|t|^4}{t} = 0.$$

Vzhledem k symetrii funkce f platí také $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = (\operatorname{arctg} \sqrt{5})^4 + \frac{2}{3}(\operatorname{arctg} \sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x - 1) + \frac{4}{3}(\operatorname{arctg} \sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (y - 2).$$

Příklad G3: Položme

$$F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x + e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot y,\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot x - 2.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{gathered} e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)}\cos x\varphi(x)\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,\\ e^{\sin x^2}\cdot(\cos x^2\cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2}\cdot\sin x^2\cdot 4x^2\\ +e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)}(\cos x\varphi(x)\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x)))^2\\ -e^{\sin x\varphi(x)}\sin x\varphi(x)\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)}\cos x\varphi(x)\cdot(2\varphi'(x)+x\varphi''(x))\\ -2\varphi''(x) = 0.\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

Příklad G4: Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1, \qquad g_2(x,y,z) = x^2+y^2-z^2.$$

Funkce $f,\ g_1$ i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{xy}y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x,\\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{xy}x, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y,\\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = -2z.\end{aligned}$$

Vektory $(2x,2y,2z),\ (2x,2y,-2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \tag{1}$$

$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \tag{2}$$

$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \tag{3}$$

$$x^2+y^2+z^2 = 1, \tag{4}$$

$$x^2+y^2-z^2 = 0. \tag{5}$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x - y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x - y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \qquad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \qquad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Příklad G5: Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Provedeme rozklad integrandu na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 4)}\, dx = \int \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x+1} + \frac{4x + 7}{x^2 + 2x + 4} \right) dx \\
&= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{2}{3} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4}\, dx + \frac{1}{3} \int \frac{3}{x^2 + 2x + 4}\, dx \\
&= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{2}{3} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4}\, dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{3})^2 + 1}\, dx \\
&\overset{c}{=} \frac{2}{3} \log|x+1| + \frac{2}{3} \log(x^2 + 2x + 4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}} \right), \\
&x \in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (-1, +\infty).
\end{aligned}$$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1: Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce f, určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x\cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x\sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5: Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z Matematiky II pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1: Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Pokud $x = 2$, pak $h(A) = 3$. V případě, že $x \neq 2$, pak lze číslem $x - 2$ dělit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{x-1}{x-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek je nulový, právě když $\frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} = 0$, tj. právě když $x = 7$.

Závěr: $h(A) = 2$ pro $x = 7$, $h(A) = 3$ pro $x \neq 7$.

Příklad H2: Okamžitě vidíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Pokud $x \neq 0$ lze v bodě $[x, y]$ počítat parciální derivace „podle vzorečků“.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \cos(x\cos y)\cdot\cos y & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x\sin y)\cdot\sin y & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \cos(x\cos y)\cdot(-x\sin y) & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x\sin y)\cdot(x\cos y) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V bodech tvaru $[0, y]$ budeme počítat parciální derivace „z definice“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,y) - f(t,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,y)}{t}$$

Tato limita ovšem neexistuje, protože limita zleva ($-\infty$) se nerovná limitě zprava ($\cos y$).

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{t\to y}\frac{f(0,t) - f(0,y)}{t-y} = \lim_{t\to y}\frac{0}{t-y} = 0.$$

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité, a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \cos(\cos 2)\cdot\cos 2\cdot(x-1) - \cos(\cos 2)\cdot\sin 2\cdot(y-2) + \sin(\cos 2).$$

Příklad H3: Položme

$$F(x,y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}.$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\arcsin(x+(\varphi(x))^2)+\pi/2-\arccos(\varphi(x)+x^2)=0,$$
$$\frac{1+2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1-(x+(\varphi(x))^2)^2}}+\frac{\varphi'(x)+2x}{\sqrt{1-(\varphi(x)+x^2)^2}}=0,$$
$$-\frac{1}{2}(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(x+(\varphi(x))^2))\cdot(1+2\varphi(x)\varphi'(x))^2$$
$$+(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x))$$
$$-\frac{1}{2}(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(\varphi(x)+x^2))\cdot(\varphi'(x)+2x)^2$$
$$+(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\varphi''(x)+2)=0.$$

Dosadíme-li $x=0$ a využijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=-1$ a $\varphi''(0)=-4$.

Příklad H4: Položme

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1, \qquad g_2(x,y,z)=x-y^2-z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)=2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)=1\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)=-2y\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y)=2x+1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y)=2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y)=-2z
\end{array}$$

Zkoumejme pro která $[x,y,z]\in M$ jsou vektory $(2x,2y,2z),\ (1,-2y,-2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z\\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z\\ 2x+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x=-\frac{1}{2}$ nebo $y=z=0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M.

Nyní řešme soustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1}$$

$$x = y^2 + z^2 \tag{2}$$

$$2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \tag{3}$$

$$2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \tag{4}$$

$$2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \tag{5}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$x = (\sqrt{5} - 1)/2. \tag{6}$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right], \qquad \left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

Příklad H5: Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1 - t^2}{2t - 1}, \qquad dx = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2}\, dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{2t-1} + 1}{\frac{1-t^2}{2t-1} + t} \cdot \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2}\, dt = \int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2}\, dt$$

Platí

$$\frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{4t + 1}{(2t - 1)^2}$$

Rozložíme-li druhý výraz na parciální zlomky dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2}\, dt &= \int \frac{1}{2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{3}{(2t - 1)^2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2t - 1}\, dt \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{3}{8t - 4} - \frac{1}{2}\log|2t - 1|, \quad t \in (-\infty, 1/2) \text{ nebo } t \in (1/2, +\infty). \end{aligned}$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx &= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \\ &+ \frac{3}{8(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) - 4} - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1|, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad 1: Řešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y - 1}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5: Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z Matematiky II pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad I1: Napišme si rozšířenou matici $(A|b)$ a proveďme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno spočteme: $x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -3$.

Příklad I2: Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x+y=1\}$. Pro parciální derivace platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{xy - x - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad & [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{xy - x^2 - y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad & [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\}. \end{aligned}$$

V bodě $[0,0]$ počítejme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{t^2}}{t-1}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{(t-1)t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sgn} t}{t-1}.$$

Poslední limita neexistuje, protože limita zleva je rovna 1 a zprava je rovna -1. To znamená, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje. Naprosto stejným postupem lze ukázat, že ani $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje.

V bodě $[1,2]$ jsou obě parciální derivace spojité a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \frac{-3}{4\sqrt{5}} \cdot (x-1) - \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot (y-2) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Příklad I3: Položme

$$F(x,y) = \operatorname{arctg}(y^2+xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}y - \sin x, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y+x}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\operatorname{arctg}((\varphi(x))^2 + x\varphi(x)) - e^{x\varphi(x)} + \cos x - \varphi(x) = 0.$$

$$\frac{2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x)}{1+((\varphi(x))^2+x\varphi(x))^2} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))e^{x\varphi(x)} - \sin x - \varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{gathered} \frac{-2((\varphi(x))^2+x\varphi(x))}{(1+((\varphi(x))^2+x\varphi(x))^2)^2} \cdot (2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x))^2 \\ + \frac{2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x)}{1+((\varphi(x))^2+x\varphi(x))^2} \\ -(\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x))e^{x\varphi(x)} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 e^{x\varphi(x)} \\ - \cos x - \varphi''(x) = 0. \end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -1$.

Příklad I4: Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a proto musí nabývat maxima i minima na množině M. Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x,0];\ x \in \langle 0,1\rangle\}, \\ H_2 &= \{[0,y];\ y \in \langle 0,1\rangle\}, \\ H_3 &= \{[x,y];\ x > 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Je-li $[x,y] \in H_1$, platí $f(x,y) = \operatorname{arctg} x$. Funkce arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0,0]$ a $[1,0]$. Podobně je tomu na množině H_2. Tam dostáváme podezřelé body $[0,0]$ a $[0,1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Vidíme, že $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Vektor $(2x,2y)$ je nulový, právě když $[x,y] = [0,0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3. Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x \tag{2}$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$\lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2). \tag{4}$$

Z (2) vyplývá, že $\lambda \neq 0$. Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Platí tedy buď $x = y$ nebo $-1 = x^2+xy+y^2$. Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z H_3 mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Nalezli jsme tyto podezřelé body:

$$[0,0], \qquad [0,1], \qquad [1,0], \qquad [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}].$$

Porovnáním funkčních hodnot funkce f v uvedených bodech (proveďte podrobně) zjistíme, že f nabývá svého minima v bodě $[0,0]$ a maxima v bodě $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Příklad I5: Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+2x+4} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{t^2-4}{2(1-t)}, \qquad dx = \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\, dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{\frac{t^2-4}{2(1-t)}}{\frac{t^2-4}{2(1-t)}+t} \cdot \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\, dt = \int \frac{t^2-4}{2t^2-4t+2}\, dt$$

Platí

$$\frac{t^2-4}{2t^2-4t+2} = \frac{1}{2} + \frac{2t-5}{2t^2-4t+2}$$

Rozložíme-li poslední výraz na parciální zlomky dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2-4}{2t^2-4t+2}\, dt &= \int \frac{1}{2}\, dt + \int \frac{1}{t-1}\, dt - \int \frac{3}{2(t-1)^2}\, dt \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2}t + \log|t-1| + \frac{3}{2(t-1)}, \qquad t \in (-\infty, 1) \text{ nebo } t \in (1, +\infty).\end{aligned}$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\, dx &= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+2x+4} - x) \\ &+ \log|\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1| + \frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1)}, \qquad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$