5. Průběh funkce

1. Vyšetřete průběhy funkcí (v prvních dvou příkladech nemusíte vyšetřovat konvexitu)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}, \qquad f(x) = (\cos x) e^{\frac{2}{3}\sin x},$$
$$f(x) = (\log|x|)^3 - 3\log|x|, \qquad f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right).$$

2. Vyšetřete průběh funkcí:

$$\sin^3 x + \cos^2 x, \qquad \sqrt[3]{x^2(1-x^2)}, \qquad \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-1}, \qquad \arcsin\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}\right).$$

Výsledky

1.1. Definičním oborem funkce f je množina $\mathbf{R}\setminus\{\frac{\pi}{4}+k\pi/2;\ k\in\mathbf{Z}\}$; f je sudá a 2π-periodická. Zkoumejme tedy f **pouze** na intervalech $(-\pi/4,\pi/4)$, $(\pi/4,3\pi/4)$, $(3\pi/4,5\pi/4)$ a $(5\pi/4,7\pi/4)$. Spočtěme limity v „krajních bodech“:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\pi/4+} f(x) &= +\infty, & \lim_{x\to\pi/4-} f(x) &= +\infty,\\
\lim_{x\to\pi/4+} f(x) &= -\infty, & \lim_{x\to3\pi/4-} f(x) &= +\infty,\\
\lim_{x\to3\pi/4+} f(x) &= -\infty, & \lim_{x\to5\pi/4-} f(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to5\pi/4+} f(x) &= +\infty, & \lim_{x\to7\pi/4-} f(x) &= -\infty.
\end{aligned}$$

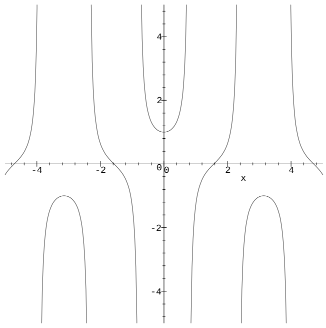
Dále platí:

$$f'(x) = \frac{-\sin x\cos 2x + 2\cos x\sin 2x}{\cos^2 2x} = \frac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}, \qquad x\in\mathcal{D}(f).$$

Pro znaménko derivace dostaneme

$$\begin{aligned}
&f'(x) > 0 \Leftrightarrow x\in(0,\pi/4)\cup(\pi/4,3\pi/4)\cup(3\pi/4,\pi),\\
&f'(x) < 0 \Leftrightarrow x\in(-\pi/4,0)\cup(\pi,5\pi/4)\cup(5\pi/4,7\pi/4),\\
&f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\in\{0,\pi\}.
\end{aligned}$$

Na celém definičním oboru pro funkci f platí: f je rostoucí na intervalech $(0,\pi/4)+2k\pi$, $(\pi/4,3\pi/4)+2k\pi$, $(3\pi/4,\pi)+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$; f je klesající na $(-\pi/4,0)+2k\pi$, $(\pi,5\pi/4)+2k\pi$ a $(5\pi/4,7\pi/4)+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. V bodech $2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, nabývá funkce f svého lokálního minima a v bodech $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, nabývá funkce f svého lokálního maxima. Globálního minima a globálního maxima funkce f nenabývá. Funkce f nemá asymptotu v $+\infty$ ani v $-\infty$.



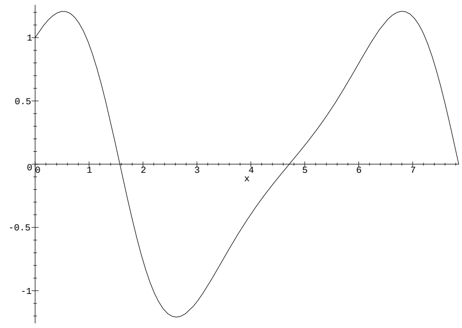
1.2. Snadno je vidět, že $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$ a f je 2π periodická a spojitá na $\mathbf{R}$. Spočtěme f':

$$f'(x) = e^{\frac{2}{3}\sin x}(\frac{2}{3}\cos^2 x - \sin x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Prozkoumáme-li znaménko f' obdržíme:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (5\pi/6, 13\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pi/6, 5\pi/6\} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech tvaru $(5\pi/6, 13\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. Na intervalech tvaru $(\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, je f klesající. Funkce f má v bodech $\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, globální maxima a v bodech $5\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, globální minima - toto vyplývá z výše uvedeného; $\mathcal{H}(f) = \langle f(5\pi/6), f(\pi/6)\rangle$. Funkce nemá žádné asymptoty.



1.3. Snadno zjistíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funkce f je sudá. Zkoumejme tedy funkci f zatím **pouze** na intervalu $(0, +\infty)$. Pak máme $f(x) = (\log x)^3 - 3\log x$.

Spočtěme limity v „krajních bodech“.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \log x((\log x)^2 - 3) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0+} \log x((\log x)^2 - 3) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Pro každé $x > 0$ platí

$$f'(x) = \frac{3}{x}((\log x)^2 - 1) \qquad \text{a} \qquad f''(x) = \frac{3}{x^2}(-(\log x)^2 + 2\log x + 1).$$

Zkoumejme znaménko první derivace:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty),$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{e}, e),$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{1}{e}, e\}.$$

Při zkoumání znaménka f'' stačí zkoumat znaménko výrazu $-(\log x)^2 + 2\log x + 1$.

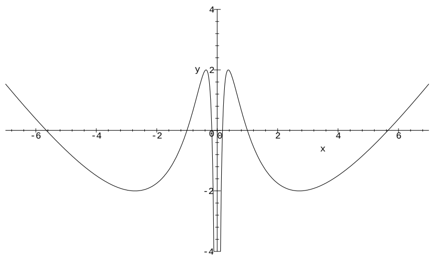
$$
\begin{aligned}
f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}}),\\
f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (0, e^{1-\sqrt{2}}) \cup (e^{1+\sqrt{2}}, +\infty),\\
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}}\}.
\end{aligned}
$$

Uvažujme nyní celý definiční obor funkce f. Z předchozího plyne:

- Funkce f je rostoucí na $(0, \frac{1}{e})$, $(e, +\infty)$, $(-e, -\frac{1}{e})$ a klesající na intervalech $(-\infty, -e)$, $(-\frac{1}{e}, 0)$, $(\frac{1}{e}, e)$. Funkce f má lokální maxima v bodech $\pm\frac{1}{e}$ a lokální minima v bodech $\pm e$. Globálního maxima a globálního minima nenabývá.
- Funkce f je konvexní na intervalech $(-e^{1+\sqrt{2}}, -e^{1-\sqrt{2}})$, $(e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}})$ a konkávní na intervalech $(-\infty, -e^{1+\sqrt{2}})$, $(-e^{1-\sqrt{2}}, 0)$, $(0, e^{1-\sqrt{2}})$, $(e^{1+\sqrt{2}}, +\infty)$. Body $\pm e^{1+\sqrt{2}}$, $\pm e^{1-\sqrt{2}}$ jsou inflexními body f.

Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ f nemá asymptotu v $+\infty$. Ze sudosti f vyplývá, že f nemá asymptotu ani v $-\infty$.

Takto vypadá graf funkce f:



1.4. Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1+} f(x) = 0$. Funkce f je spojitá na $\mathcal{D}(f)$, ale není sudá, ani lichá, ani periodická. Spočtěme f' a f'' a prozkoumejme jejich znaménko:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x(3+x)}{(1+x)^2}\exp(x/(1+x)), \qquad x \in \mathcal{D}(f);\\
f''(x) &= \frac{5x+3}{(1+x)^4}\exp(x/(1+x)), \qquad x \in \mathcal{D}(f);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty),\\
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (-1, 0),\\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3, -1\};\\
f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-3/5, \infty),\\
f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -3/5),\\
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3/5\}.
\end{aligned}
$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(0, +\infty)$; klesající na intervalech $(-3, -1)$ a $(-1, 0)$. V bodě -3 má f lokální maximum a v bodě 0 má lokální minimum. Globálních extrémů funkce f nenabývá. Funkce f je konkávní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, -3/5)$; na intervalu $(-3/5, +\infty)$ je konvexní; bod $-3/5$ je inflexním bodem. Pro obor hodnot platí: $\mathcal{H}(f) = (-\infty, -4\exp(3/2)\rangle \cup \langle -1, +\infty)$. Určeme ještě asymptoty:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} \exp\left(\frac{x}{1+x}\right) = e,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left\{(x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) - ex\right\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left\{ex\left(\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left\{\frac{-ex}{1+x} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1}{-\frac{1}{1+x}} - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\} = -2e,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} \exp\left(\frac{x}{1+x}\right) = e,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left\{(x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) - ex\right\}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left\{ex\left(\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left\{\frac{-ex}{1+x} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1}{-\frac{1}{1+x}} - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\} = -2e$$

Funkce $y = ex - 2e$ je tedy asymptotou funkce f v $+\infty$ i $-\infty$. Zde je graf funkce f: