Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)
ZS 1997-98

Příklad A1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = (x-1)^2|x^2-1|$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad A5 : Vyšetřete průběh funkce (bez konvexity)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (A)
ZS 1997-98

Příklad A1 : Nejprve upravíme výraz, jehož limitu máme spočítat.

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}}$$

$$= \frac{(n^3+n)^{\frac{1}{3}} - (n^3+1)^{\frac{1}{3}}}{(n^3+2n)^{\frac{1}{3}} - (n^3+n)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(n^3+n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}} + (n^3+n)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{2}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}} + (1+\frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}} + (1+\frac{1}{n^3})^{\frac{2}{3}}}$$

Odtud již vyplývá, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}} = 1.$

Příklad A2 : Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad A3 : Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Víme, že

(i) $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,
(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(iii) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$,
(iv) sin je prostý na $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,
(v) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+\sin x)}{\sin x} = 1.$

Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Příklad A4 : Platí

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x^2-1), & \text{pro } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty), \\ 0, & \text{pro } x = \pm 1, \\ (x-1)^2(1-x^2), & \text{pro } x \in (-1,1). \end{cases}$$

Z předchozího plyne

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1)(x^2-1) + (x-1)^2 \cdot 2x, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty), \\ 2(x-1)(1-x^2) - (x-1)^2 \cdot 2x, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

Pro jednostranné derivace ve výše uvedených bodech platí $f(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$. Zkoumejme derivaci f v bodě 1. Funkce f je v tomto bodě spojitá a platí

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1-} f'(x) = 0.$$

Což znamená, že $f'(1) = f'_+(1) = f'_-(1) = 0$. Obdobným způsobem zkoumejme derivaci v bodě -1. Funkce f je opět v -1 spojitá a platí

$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = 8 \qquad \text{a} \lim_{x \to -1-} f'(x) = -8.$$

Odtud plyne, že $f'_+(-1) = 8$, $f'_-(-1) = -8$ a derivace v -1 neexistuje.

Příklad A5 : Definičním oborem funkce f je množina $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi/2;\ k \in \mathbb{Z}\}$; f je sudá a 2π-periodická. Zkoumejme tedy f **pouze** na intervalech $(-\pi/4, \pi/4)$, $(\pi/4, 3\pi/4)$, $(3\pi/4, 5\pi/4)$ a $(5\pi/4, 7\pi/4)$. Spočtěme limity v „krajních bodech“:

$$\lim_{x \to -\pi/4+} f(x) = +\infty, \lim_{x \to \pi/4-} f(x) = +\infty, \lim_{x \to \pi/4+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 3\pi/4-} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 3\pi/4+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 5\pi/4-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 5\pi/4+} f(x) = +\infty, \lim_{x \to 7\pi/4-} f(x) = -\infty.$$

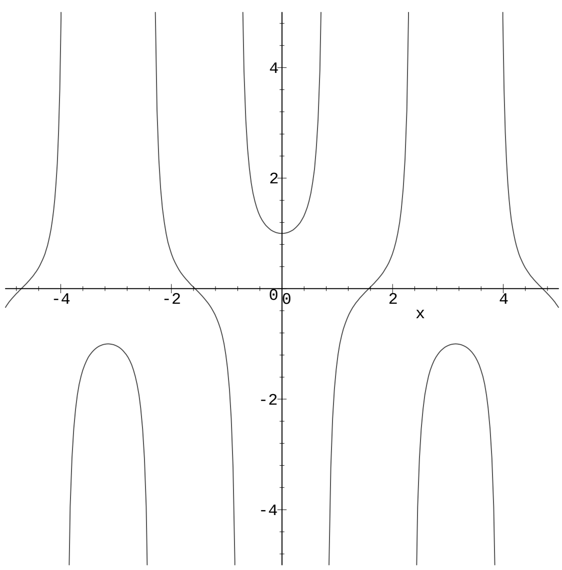
Dále platí:

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cos 2x + 2 \cos x \sin 2x}{\cos^2 2x} = \frac{\sin x(1 + 2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}, \qquad x \in \mathcal{D}(f).$$

Pro znaménko derivace dostaneme

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi/4) \cup (\pi/4, 3\pi/4) \cup (3\pi/4, \pi),$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi/4, 0) \cup (\pi, 5\pi/4) \cup (5\pi/4, 7\pi/4),$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi\}.$$

Na celém definičním oboru pro funkci f platí: f je rostoucí na intervalech $(0, \pi/4)+2k\pi$, $(\pi/4, 3\pi/4)+2k\pi$, $(3\pi/4, \pi)+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; f je klesající na $(-\pi/4, 0)+2k\pi$, $(\pi, 5\pi/4)+2k\pi$ a $(5\pi/4, 7\pi/4)+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. V bodech $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, nabývá funkce f svého lokálního minima a v bodech $(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, nabývá funkce f svého lokálního maxima. Globálního minima a globálního maxima funkce f nenabývá. Funkce f nemá asymptotu v $+\infty$ ani v $-\infty$.



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)
ZS 1997-98

Příklad B1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad B5 : Vyšetřete průběh funkce (bez konvexity)

$$f(x)=(\cos x)e^{\frac{2}{3}\sin x} \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (B)
ZS 1997-98

Příklad B1 : Platí

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\\ &=\lim_{n\to+\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\cdot\frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}.\end{aligned}$$

Víme, že platí:

(1) $\forall n\in\mathbb{N}:\ |\sin(n+1)|\le 1$,
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$,
(3) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (1) a (2) plyne $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) = \frac{1}{2}.$$

Příklad B2 : Použijeme Lebnizova kritéria. Ověřme jeho předpoklady:

(1) řada má požadovaný tvar,
(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3} - 1) = 0$,
(3) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[n]{3} - 1 \geq \sqrt[n+1]{3} - 1$ (lze snadno odvodit ze zřejmé nerovnosti $3^{n+1} \geq 3^n,\ n \in \mathbb{N}$).

Řada tedy konverguje.

Příklad B3 : Pišme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}.$$

Víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 2 - 1 = 1.$$

Použili jsme

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
(4) sin je prostá funkce na jistém okolí 0,
(5) arcsin je prostá funkce,
(6) $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
(7) větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
(8) větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Příklad B4 : Funkce arctg i tg mají derivace všude ve svém definičním oboru. Máme tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

po úpravě dostaneme

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}; \qquad x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Platí také $\lim_{x\to\pi/2+k\pi} f(x) = \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$, a f je tedy spojitá v každém bodě tvaru $\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Spočtěme

$$\lim_{x\to\pi/2+k\pi} f'(x) = \lim_{x\to\pi/2+k\pi} \frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 0.$$

Věta o výpočtu derivace pomocí limity derivace tedy dává (předpoklady jsou splněny!) $f'(\pi/2 + k\pi) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

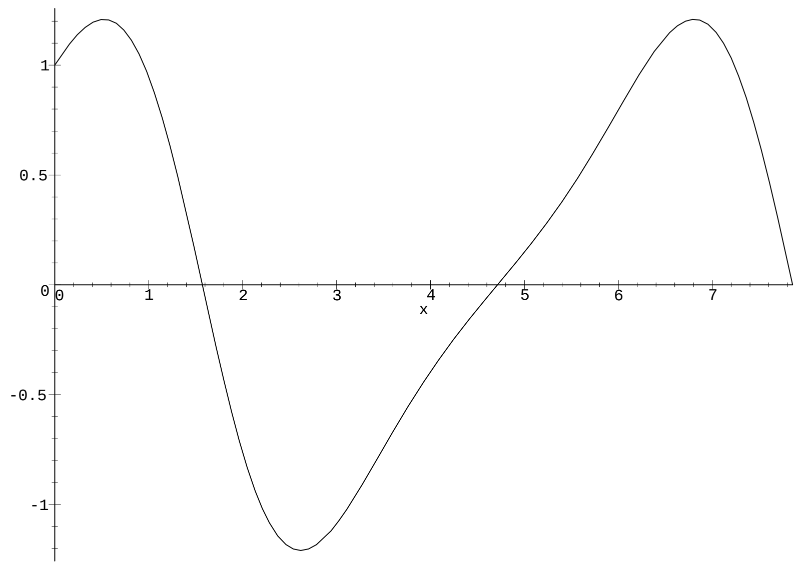
Příklad B5 : Snadno je vidět, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je 2π periodická a spojitá na $\mathbb{R}$. Spočtěme f':

$$f'(x) = e^{\frac{2}{3}\sin x}(\frac{2}{3}\cos^2 x - \sin x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Prozkoumáme-li znaménko f' obdržíme:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (5\pi/6, 13\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{\pi/6, 5\pi/6\} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech tvaru $(5\pi/6, 13\pi/6)+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Na intervalech tvaru $(\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, je f klesající. Funkce f má v bodech $\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, globální maxima a v bodech $5\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, globální minima - toto vyplývá z výše uvedeného; $\mathcal{H}(f) = \langle f(5\pi/6), f(\pi/6)\rangle$. Funkce nemá žádné asymptoty.



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)
ZS 1997-98

Příklad C1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{3}{2^n-2n} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg} x}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x)=\max\{\min\{\cos x,(1/2)\},(-1/2)\}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad C5 : Vyšetřete průběh funkce (bez konvexity)

$$f(x)=\frac{\cos x}{\cos 3x}. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (C)
ZS 1997-98

Příklad C1 : Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x=\exp\left(\log\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x\right)\right)$$

$$=\exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}}\right). \qquad (\star)$$

Dále platí:

(1) $\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$,

(2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2x-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{+\infty} = 0$,

(3) funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}$ je na jistém okolí $+\infty$ různá od nuly,

(4) exp je spojitá na $\mathbb{R}$.

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}} = 1. \qquad (\star\star)$$

Dále máme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}} = 1. \qquad (\star\star\star)$$

Z $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ a (4) plyne

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x = e^1 = e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n = e.$$

Příklad C2 : Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ platí $2^n > 2n$ a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{3}{2^n-2n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{2^{n+1}-2(n+1)}}{\frac{3}{2^n-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{n}{2^{n-1}}}{2-\frac{n+1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad C3 : Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - 2\sin(\pi/6+x)}{\operatorname{tg} x} &= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-2\sin(\pi/6+x)}{x}\right) \\
&= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right) \\
&= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right) \\
&= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{1+\cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right). \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Víme, že

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$,
(4) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Z ($\star$), (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

Příklad C4 : Pro funkci f platí

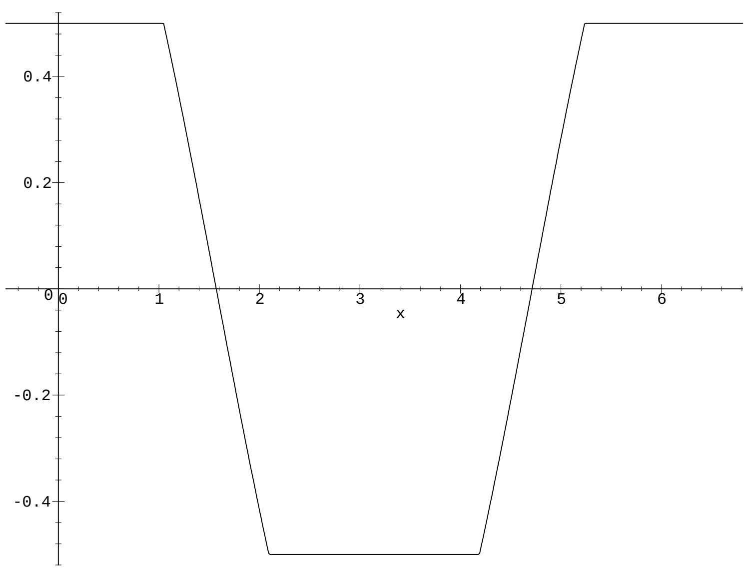
$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3\rangle + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3\rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_-(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi-} 0 = 0, \\ f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \\ f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



Příklad C5 : Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \cos 3x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/6 + k\pi/3; k \in \mathbb{Z}\}$. Funkce f je ve svém definičním oboru spojitá; f je sudá. Dále máme

$$f(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\cos(3(x+\pi))} = \frac{-\cos x}{\cos(3x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\cos 3x} = \frac{\cos x}{\cos 3x} = f(x).$$

Funkce f je tedy π-periodická. Stačí tedy, když její průběh vyšetříme na množině $(\pi/6, \pi/2) \cup (\pi/2, 5\pi/6) \cup (5\pi/6, 7\pi/6)$. Spočtěme limity v „krajních bodech":

$$\lim_{x\to\pi/6+} \frac{\cos x}{\cos 3x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\sin x}{-3\sin 3x} = -1/3, \text{ (zde jsme k výpočtu užili}$$
$$\text{l'Hospitalova pravidla, jehož předpoklady jsou splněny)}$$

$$\lim_{x\to 5\pi/6+} \frac{\cos x}{\cos 3x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 5\pi/6-} \frac{\cos x}{\cos 3x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 7\pi/6-} \frac{\cos x}{\cos 3x} = +\infty$$

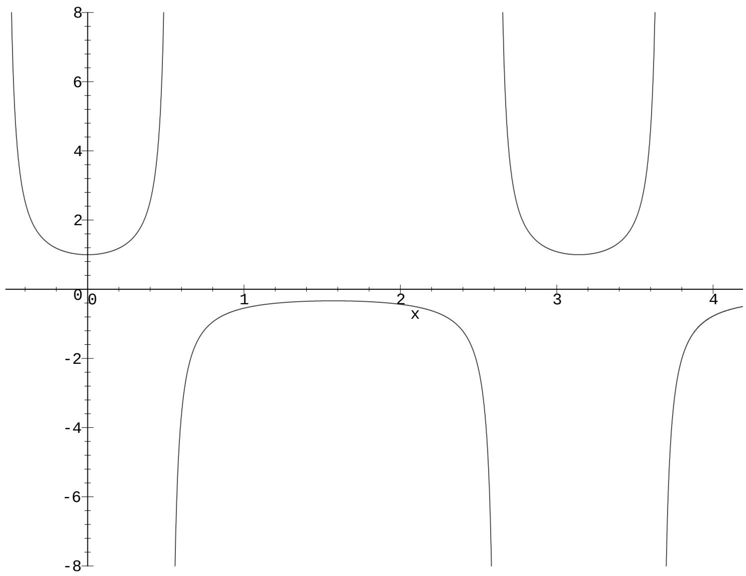
V každém bodě x z definičního oboru f platí

$$f'(x) = \frac{3\cos x \sin 3x - \sin x \cos 3x}{\cos^2 3x}$$

Pro znaménko f' platí

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ((\pi/6, \pi/2) \cup (\pi, 7\pi/6)) + k\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ((\pi/2, 5\pi/6) \cup (5\pi/6, \pi)) + k\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech tvaru $(\pi/6, \pi/2) + k\pi$, $(\pi, 7\pi/6) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; klesající na intervalech tvaru $(\pi/2, 5\pi/6) + k\pi$, $(5\pi/6, \pi) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má f lokální minimum. Globálních extrémů f nenabývá, neboť je zdola i shora neomezená; $\mathcal{H}(f) = (-\infty, -1/3) \cup \langle 1, \infty)$. Funkce f nemá žádné asymptoty.



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)
ZS 1997-98

Příklad D1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)
Příklad D5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=(\log|x|)^3-3\log|x|. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (D)
ZS 1997-98

Příklad D1 : Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ počítejme limitu funkce $f(x)=x(2^{\frac{1}{x}}-1)$ v $+\infty$. Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n\to+\infty} f(n)=A$. Platí

$$\lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\log 2}{x}}-1}{\frac{\log 2}{x}}\cdot\log 2=\log 2.$$

Užili jsme

(1) $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$,
(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log 2}{x}=0$,
(3) $\frac{\log 2}{x}\neq 0$ pro každé $x>0$,
(4) větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

Příklad D2 : Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n \leq 3^n$ a proto má uvažovaná řada pouze kladné členy. Zkusme použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}}{\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}\right)}{\frac{2^n}{3^n}\left(\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}}{\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Užili jsme následujících faktů:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, kde $a > 1,\ k \in \mathbb{N}$;
(2) posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.

Z (1) a (2) vyplývá:

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}} = 0.$$

Zbytek vyplývá z věty o aritmetice limit. Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad D3 : Uvědomme si, že platí:

(1) $\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$,
(2) $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,
(3) $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$,
(4) $\sqrt{\ }$ je prostá na svém definičním oboru.

Můžeme psát

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

Z věty o limitě složené funkce, (1), (3) a (4) plyne

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$$

Z věty o limitě složené funkce, (2), (3) a (4) plyne

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1.$$

Věta o aritmetice limit pak dává

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})} = 1.$$

Příklad D4 : Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}2x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} = e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

(1) $\lim_{y\to 0+}\frac{e^y-1}{y} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$,
(3) $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(4) $\sqrt{\ }$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1$.

Příklad D5 : Snadno zjistíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkce f je sudá. Zkoumejme tedy funkci f zatím **pouze** na intervalu $(0, +\infty)$. Pak máme $f(x) = (\log x)^3 - 3\log x$.

Spočtěme limity v „krajních bodech“.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\log x((\log x)^2 - 3) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0+}\log x((\log x)^2 - 3) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Pro každé $x > 0$ platí

$$f'(x) = \frac{3}{x}((\log x)^2 - 1) \qquad \text{a} \qquad f''(x) = \frac{3}{x^2}(-(\log x)^2 + 2\log x + 1).$$

Zkoumejme znaménko první derivace:

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty) \\
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (\frac{1}{e}, e) \\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{\frac{1}{e}, e\}.
\end{aligned}
$$

Při zkoumání znaménka f'' stačí zkoumat znaménko výrazu $-(\log x)^2 + 2\log x + 1$.

$$
\begin{aligned}
f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}}) \\
f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (0, e^{1-\sqrt{2}}) \cup (e^{1+\sqrt{2}}, +\infty) \\
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}}\}.
\end{aligned}
$$

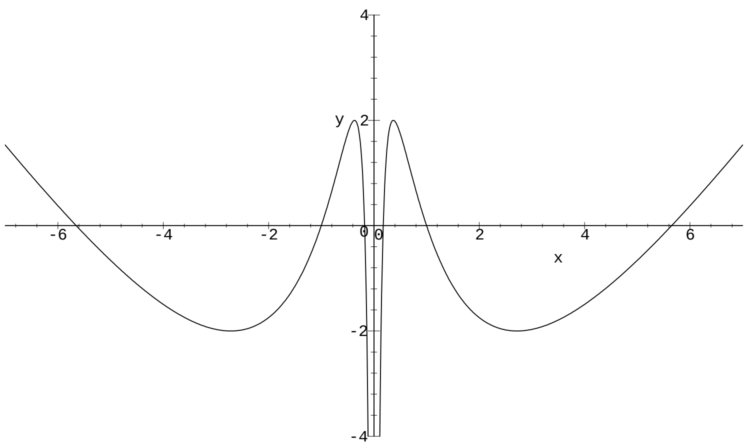
Uvažujme nyní celý definiční obor funkce f. Z předchozího plyne:

• Funkce f je rostoucí na intervalech $(0, \frac{1}{e})$, $(e, +\infty)$, $(-e, -\frac{1}{e})$ a klesající na intervalech $(-\infty, -e)$, $(-\frac{1}{e}, 0)$, $(\frac{1}{e}, e)$. Funkce f má lokální maxima v bodech $\pm\frac{1}{e}$ a lokální minima v bodech $\pm e$. Globálního maxima a globálního minima nenabývá.

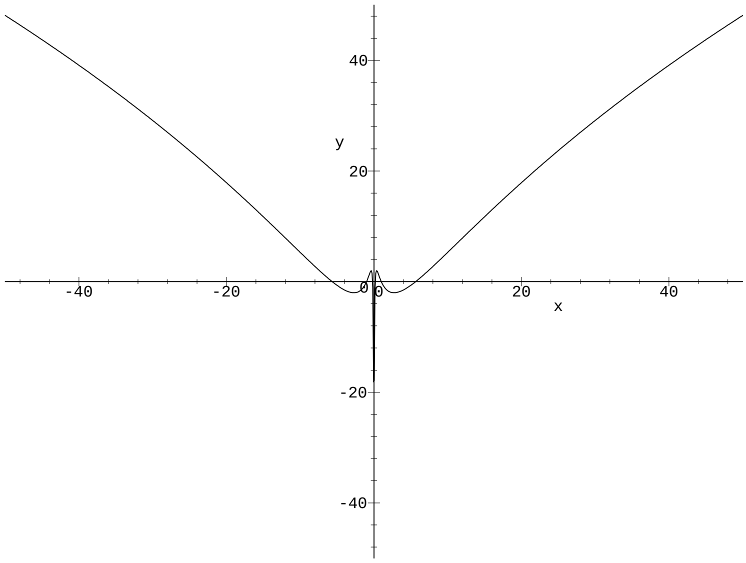
• Funkce f je konvexní na intervalech $(-e^{1+\sqrt{2}}, -e^{1-\sqrt{2}})$, $(e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}})$ a konkávní na intervalech $(-\infty, -e^{1+\sqrt{2}})$, $(-e^{1-\sqrt{2}}, 0)$, $(0, e^{1-\sqrt{2}})$, $(e^{1+\sqrt{2}}, +\infty)$. Body $\pm e^{1+\sqrt{2}}$, $\pm e^{1-\sqrt{2}}$ jsou inflexními body f.

Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ f nemá asymptotu v $+\infty$. Ze sudosti f vyplývá, že f nemá asymptotu ani v $-\infty$.

Takto vypadá graf funkce f:



Graf f v trochu jiném pohledu:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)
ZS 1997-98

Příklad E1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+2^n)}{\sqrt[3]{n^3+n^2}}. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad E2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}) \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad E3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad E4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x) = \arccos \frac{1}{1+x^2}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad E5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x). \qquad (20 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (E)
ZS 1997-98

Příklad E1 : Počítejme:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+2^n)}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(2^n(1+\frac{1}{2^n}))}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\log 2 + \log(1+\frac{1}{2^n})}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\log 2}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{2^n})}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log 2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{2^n})}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \\
&= \log 2 + \frac{0}{+\infty} = \log 2.
\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme, mimo jiné, použili větu o aritmetice limit a spojitost logaritmu.

Příklad E2 : Označme $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

Příklad E3 : Pišme

$$\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)\right).$$

Spočítejme nejprve limitu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(\frac{2^x+8^x}{2})}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(\frac{2^x+8^x}{2})}{\frac{2^x+8^x}{2}-1}\cdot\frac{2^x+8^x-2}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(\frac{2^x+8^x}{2})}{\frac{2^x+8^x}{2}-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2^x+8^x-2}{2x} = 1\cdot\log 4.\end{aligned}$$

Při výpočtu první limity jsme využili

(1) $\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1} = 1$,
(2) výraz $\frac{2^x+8^x}{2}$ je na jistém okolí 0 různý od 1,
(3) větu o limitě složené funkce.

Rovnost

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+8^x-2}{2x} = \log 4$$

je možno odvodit pomocí l'Hospitalova pravidla nebo také takto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^x+8^x-2}{2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{2^x-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{8^x-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\cdot\log 2 + \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x\log 8}-1}{x\log 8}\cdot\log 8\\ &= \frac{1}{2}(\log 2+\log 8) = \log 4.\end{aligned}$$

Zde jsme užili větu o limitě složené funkce, známou limitu $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$, prostotu zobrazení $x\mapsto x\log 2$, $x\mapsto x\log 8$ (viz podmínka (P1) ve větě o limitě složené funkce) a větu o aritmetice limit.

Předchozí výpočty spolu se spojitostí exponenciály dávají

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 4.$$

Příklad E4 : Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

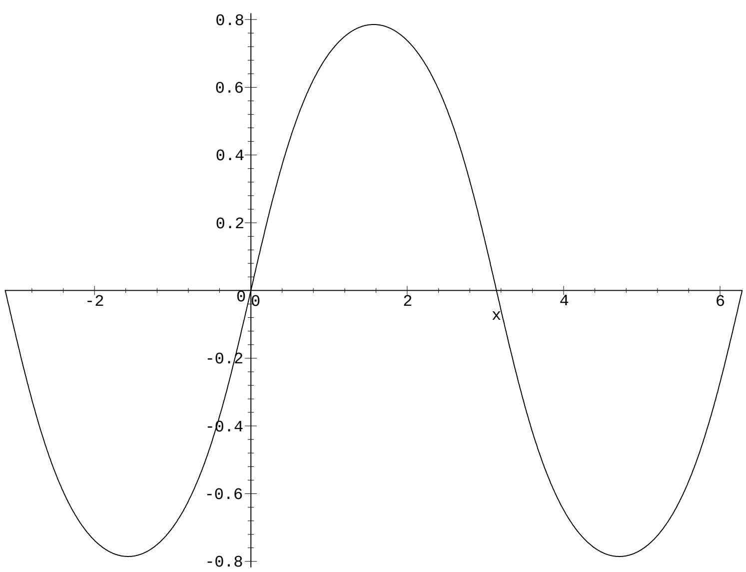
V 0 tedy derivace neexistuje.

Příklad E5 : Platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$, 2π-periodická a lichá. Spočtěme derivace a zkoumejme jejich znaménka:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$f''(x) = -\sin x \cdot \frac{1+\sin^2 x + 2\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^2}, \qquad x \in \mathbb{R};$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/2, 3\pi/2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že f je rostoucí na intervalech tvaru $(-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, klesající na intervalech tvaru $(\pi/2, 3\pi/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; v bodech $\pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, má f globální maxima a v bodech $3\pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, má f globální minima. Funkce f je na intervalech $(0, \pi) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, konkávní a na intervalech tvaru $(\pi, 2\pi) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, konvexní, v bodech $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, má f inflexní body; $\mathcal{H}(f) = \langle -\pi/4, \pi/4 \rangle$; f nemá žádné asymptoty.

Takto vypadá graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (F)
ZS 1997-98

Příklad F1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F3 : Nalezněte $a,\ b\in\mathbb{R}$ taková, že

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+x}-ax-b=0. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x\neq 0,\\ 0 & \text{pro } x=0,\end{cases}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad F5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=(x^2+2x+1)e^x. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (F)
ZS 1997-98

Příklad F1 : Spočítejme nejprve tuto limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{1+\sqrt{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^6}}}=1.$$

Zde jsme využili větu o aritmetice limit a $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Z výše uvedeného a věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^3\sqrt[2n]{2n}}{(2n)^3+\sqrt[4n]{2n}}=1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty}-\frac{(2n+1)^3\sqrt[2n+1]{2n+1}}{(2n+1)^3+\sqrt[4n+2]{2n+1}}=-1.$$

To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

Příklad F2 : Funkce arctg je ve svém definičním oboru rostoucí a proto

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ 0 < \operatorname{arctg} 1 \le \operatorname{arctg} n$$

a také

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbb{N}:\ 0 < \frac{\operatorname{arctg} 1}{n} \le \frac{\operatorname{arctg} n}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje a proto diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 1}{n}$. Odtud, z $(\star)$ a ze srovnávacího kritéria dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$ diverguje.

Příklad F3 : Zde nejde o nic jiného, než o určení asymptoty k funkci $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x}$ v $+\infty$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \quad (= a);\\
\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - x &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+x} - x) \cdot \frac{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad (= b).
\end{aligned}$$

Řešením úlohy jsou čísla $a = 1$ a $b = 0$.

Příklad F4 : Pro $x \ne 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

Příklad F5 : Snadno zjistíme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je na $\mathbb{R}$ spojitá; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Funkce f není lichá, není sudá a není periodická. Pro f' platí

$$f'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pro znaménko f' máme

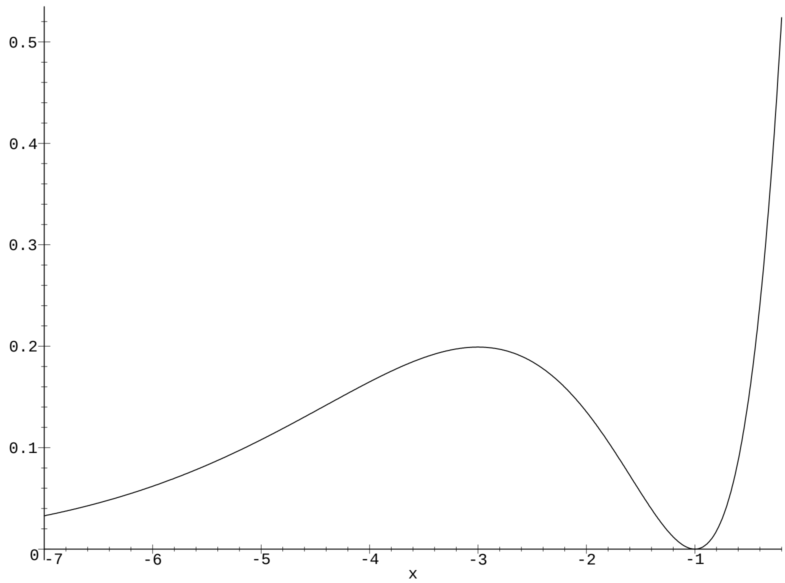
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty), \\ f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-3, -1), \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3, -1\}. \end{aligned}$$

Zabývejme se ještě druhou derivací f a jejím znaménkem:

$$\begin{aligned} f''(x) = (x^2 + 6x + 7)e^x, &\qquad x \in \mathbb{R}; \\ f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3 - \sqrt{2}) &\cup (-3 + \sqrt{2}, \infty), \\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3 - \sqrt{2}, &-3 + \sqrt{2}), \\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3 - \sqrt{2}, &-3 + \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-1, +\infty)$; f je klesající na intervalu $(-3, -1)$; v bodě -3 má lokální maximum a v bodě -1 globální minimum; globálního maxima se nenabývá; $\mathcal{H}(f) = \langle 0, +\infty)$. Funkce f je na intervalech $(-\infty, -3 - \sqrt{2})$, $(-3 + \sqrt{2}, +\infty)$ konvexní a na intervalu $(-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2})$ je konkávní. Body $-3 - \sqrt{2}$, $-3 + \sqrt{2}$ jsou inflexními body f. Funkce f má v $-\infty$ za asymptotu funkci $x \mapsto 0$ a v $+\infty$ f asymptotu nemá.

Toto je graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)
ZS 1997-98

Příklad G1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad G2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad G3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad G4 : Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = x^{(x^x)}$$

pro každé $x > 0$. (10 bodů)
Příklad G5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - x. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)
ZS 1997-98

Příklad G1 : Platí:

$$\begin{aligned}
(n+4)^{100}-(n+3)^{100} &= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}4^j - \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}3^j \\
&= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}(4^j-3^j) = 100n^{99}+P_1(n); \\
(n+2)^{100}-n^{100} &= 200n^{99}+P_2(n),
\end{aligned}$$

kde $P_1,\ P_2$ jsou polynomy stupně ostře menšího než 99. Pro tyto polynomy tedy platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_1(n)}{n^{99}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{P_2(n)}{n^{99}} = 0.$$

Dostáváme tak:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{100+\frac{P_1(n)}{n^{99}}}{200+\frac{P_2(n)}{n^{99}}} = 1/2.$$

Příklad G2 : Použijeme Leibnizova kritéria:

- řada má požadovaný tvar, neboť $\cos(n\pi) = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$ a
$$c_n = \frac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} > 0;$$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{7}{n}}}{\sqrt{n+1}} = 0$ (použili jsme větu o aritmetice limit a také spojitost odmocniny);
- nerovnost $c_n \geq c_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$, je ekvivalentní s nerovností $(n+7)(n+2) \geq (n+8)n,\ n \in \mathbb{N}$; poslední nerovnost platí, jak se lze snadno přesvědčit po roznásobení.

Naše řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria.

Příklad G3 : Upravme nejprve výraz jehož limitu máme spočítat, přitom budeme předpokládat, že $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} &= \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}.
\end{aligned}$$

Výraz $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ je pro $x > 0$ různý od 0 a

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$$

Použijeme-li známou limitu $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ a větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1), dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = 1.$$

Věta o aritmetice limit potom dává:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Příklad G4 : Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x \log x})' = e^{x \log x} \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \left(x^{(x^x)}\right)' &= \left(e^{x^x \log x}\right)' = e^{x^x \log x} \left((x^x)' \cdot \log x + x^x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= x^{(x^x)} \left(x^x(\log x + 1) \log x + x^{x-1}\right), \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

Příklad G5 : Platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; f je spojitá na $\mathbb{R}$; f je lichá a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Spočítejme první a druhou derivaci f a zkoumejme jejich znaménko:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1, \qquad x \in \mathbb{R}; \qquad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

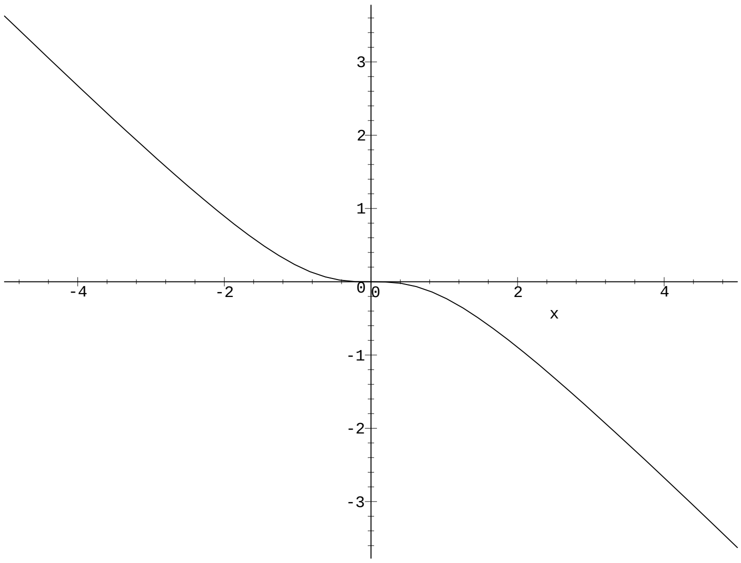
$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0; \\ f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (0, +\infty), \\ f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0), \\ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f je klesající na $\mathbb{R}$ a nemá žádné extrémy; f je konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$, konkávní na $(0, +\infty)$ a 0 je inflexním bodem; $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$. Spočítejme ještě asymptoty f:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1\right) = -1, \\ \lim_{x\to+\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2; \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1\right) = -1, \\ \lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2. \end{aligned}$$

Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $y = -x + \pi/2$ a v $-\infty$ má asymptotu $y = -x - \pi/2$.

Toto je graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)
ZS 1997-98

Příklad H1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad H2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad H3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\arcsin x))}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad H4 : Nalezněte $A,\ B,\ C\ \in \mathbb{R}$, aby

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4} \log \frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)' = \frac{A\cos x + B\sin x}{C+\cos 2x}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Příklad H5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi x}{4x^2+2}\right)\right) \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)
ZS 1997-98

Příklad H1 : Víme, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^k} = +\infty$. Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ n^2 \leq n^3 \leq n^4 \leq 2^n \leq 3^n \leq 4^n.$$

Platí tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ 4 \leq \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n} \leq 4\sqrt[n]{6}.$$

Víme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} = 1$ a proto podle věty o dvou policajtech dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n} = 4.$$

Příklad H2 : Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad H3 : Víme

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$,
(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,
(5) $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$,
(6) $\lim_{x\to 0} \arcsin x = 0$,
(7) tg je prostý na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
(8) arcsin je prostý na $\langle -1, 1\rangle$.

Pišme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\arcsin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \frac{x}{\arcsin x} \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg}(\arcsin x)} = 1,$$

neboť platí (2), (4), $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = 1$ (podle věty o limitě složené funkce, (1), (5) a (7)) a také $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg}(\arcsin x)} = 1$ (podle věty o limitě složené funkce, větě o limitě podílu funkcí, (3), (6) a (8)).

Příklad H4 : Spočtěme nejprve derivaci na levé straně rovnosti. Po úpravě dostaneme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4} \log \frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)' = \frac{2\cos x - 4\sin x}{7+\cos 2x}.$$

Při úpravách je třeba užít vzorečku $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Stačí tedy volit $A = 2,\ B = -4,\ C = 7$.

Příklad H5 : Položme $g(x) = \dfrac{3\pi x}{4x^2+2}$. Vyšetřeme nejprve průběh funkce g. Platí: $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Funkce g je lichá a spojitá na $\mathbb{R}$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$g'(x) = 6\pi \frac{1-2x^2}{(4x^2+2)^2}, \qquad g''(x) = 6\pi \frac{x(2x^2-3)}{(2x^2+1)^3}.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$
$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty),$$
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Funkce g je na intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ klesající. Na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ rostoucí. V bodě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ je globální maximum funkce g, v bodě $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ je globální minimum funkce g. Platí také $\mathcal{H}(g) = \langle g(-\frac{1}{\sqrt{2}}), g(\frac{1}{\sqrt{2}})\rangle = \langle -\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\rangle$.

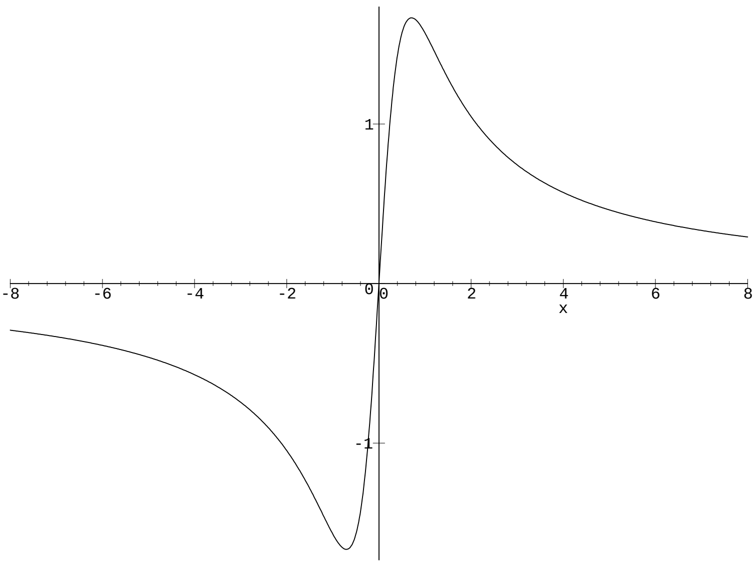
$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty),$$

$$g''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (0, \sqrt{\frac{3}{2}}),$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Funkce g je konvexní na intervalech $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$. Funkce g je konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$. Body 0, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexními body funkce g.

Graf funkce g vypadá takto:



Vraťme se nyní k funkci f. Všimněme si, že $\mathcal{H}(g) \subset \langle -\pi, \pi\rangle$ a

$$g(x) \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle 1, \infty).$$

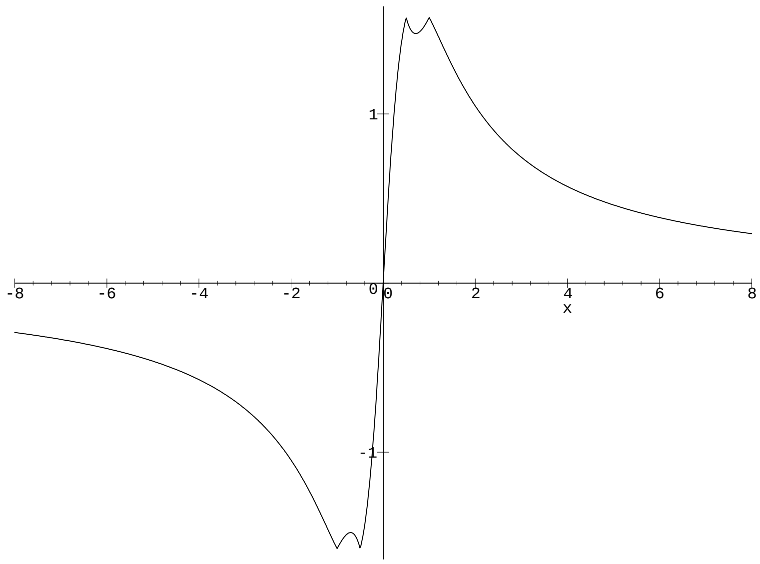
Platí proto:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - g(x), & x \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ g(x), & x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle 1, \infty) \\ \pi - g(x), & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Nyní je snadné zjistit, že funkce f je rostoucí na intervalech $(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$; f je klesající na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(1, +\infty)$; v bodech $\frac{1}{2}$, 1 má f globální maximum; v bodech $-\frac{1}{2}$, -1 má f globální minimum; v bodě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ má f lokální minimum a v bodě $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ lokální maximum; f je konvexní na intervalech $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$,

$(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -1)$; f je konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$, $(1, \sqrt{\frac{3}{2}})$; body 0, $\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexními body funkce f.

Toto je graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (I)
ZS 1997-98

Příklad I1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad I2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad I3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{e^{x^3}-1}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad I4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \max\{x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), x\}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)
Příklad I5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right). \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (I)
ZS 1997-98

Příklad I1 : Výraz jehož limitu máme spočítat nejprve upravíme:

$$\begin{aligned}
\frac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}} &= \frac{\log(1+\frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2+n}}{1} \cdot (\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}) \\
&= \frac{\log(1+\frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} \cdot \frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}{n^2+n} \\
&= \frac{\log(1+\frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{1+\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že platí

(1) $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,
(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$,
(3) $\frac{1}{n^2+n} \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

můžeme podle věty o limitě složené funkce a Heineho věty psát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} = 1.$$

Z věty o aritmetice limit a spojitosti odmocniny plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{1+\frac{1}{n}} = 2.$$

Dohromady pak máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}} = 2.$$

Příklad I2 : Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}} \cdot \frac{4^n+5^n}{3^n+4^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}+4}{\frac{4^{n+1}}{5^n}+5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{4^n}+1} = \frac{4}{5} < 1.$$

Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad I3 : Limita čitatele a jmenovatele je rovna 0 a funkce ve jmenovateli i čitateli mají v každém bodě vlastní derivaci. Pokusme se tedy použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x\cos x}{e^{x^3}-1} \overset{?}{=} \lim_{x\to0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{e^{x^3}\cdot 3x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{e^{x^3}\cdot 3x} = \frac{1}{3}.$$

Vzhledem k tomu, že limita podílu derivací existuje, tak je i první rovnost v předchozím výpočtu v pořádku a výsledek je roven 1/3.

Příklad I4 : Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\ x, & x \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi \rangle,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

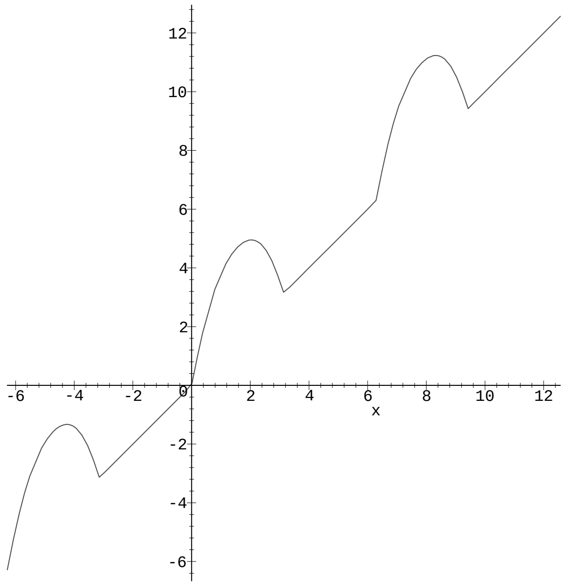
Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$
\begin{aligned}
f'_+(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi+} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = 5,\\
f'_-(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi-} 1 = 1,\\
f'_-((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi-} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = -3,\\
f'_+((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi+} 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, nemá derivaci.



Příklad I5 : Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-1+} f(x) = 0$. Funkce f je spojitá na $\mathcal{D}(f)$, ale není sudá, ani lichá, ani periodická. Spočtěme f' a f'' a prozkoumejme jejich znaménko:

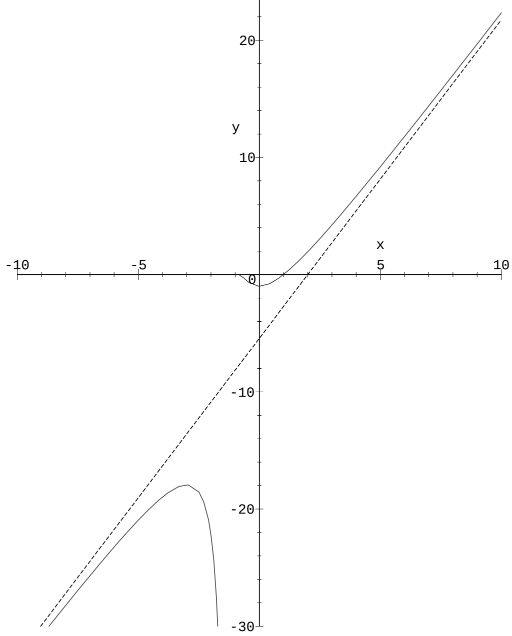
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x(3+x)}{(1+x)^2} \exp(x/(1+x)), \qquad x \in \mathcal{D}(f);\\
f''(x) &= \frac{5x+3}{(1+x)^4} \exp(x/(1+x)), \qquad x \in \mathcal{D}(f);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty),\\
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (-1, 0),\\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3, -1\};\\
f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-3/5, \infty),\\
f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -3/5),\\
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3/5\}.
\end{aligned}
$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(0, +\infty)$; klesající na intervalech $(-3, -1)$ a $(-1, 0)$. V bodě -3 má f lokální maximum a v bodě 0 má lokální minimum. Globálních extrémů funkce f nenabývá. Funkce f je konkávní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, -3/5)$; na intervalu $(-3/5, +\infty)$ je konvexní; bod $-3/5$ je inflexním bodem. Pro obor hodnot platí: $\mathcal{H}(f) = (-\infty, -4\exp(3/2)\rangle \cup \langle -1, +\infty)$. Určeme ještě asymptoty:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} \exp\left(\frac{x}{1+x}\right) = e,\\
&\lim_{x\to+\infty} \left\{(x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) - ex\right\}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left\{ex\left(\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left\{\frac{-ex}{1+x} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1}{-\frac{1}{1+x}} - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\} = -2e,\\
&\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} \exp\left(\frac{x}{1+x}\right) = e,\\
&\lim_{x\to-\infty} \left\{(x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) - ex\right\}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \left\{ex\left(\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \left\{\frac{-ex}{1+x} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1}{-\frac{1}{1+x}} - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\} = -2e
\end{aligned}$$

Funkce $y = ex - 2e$ je tedy asymptotou funkce f v $+\infty$ i $-\infty$. Zde je graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (J)
ZS 1997-98

Příklad J1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (n^4 + (-1)^n n^2) \sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad J2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad J3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad J4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \max\{x^3 - 1, x^3 + x\}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)
Příklad J5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-3}\right) + |x|. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (J)
ZS 1997-98

Příklad J1 : Výraz jehož limitu máme spočítat nejprve upravíme:

$$\begin{aligned}(n^4 + (-1)^n n^2) \sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right) &= \frac{n^4 + (-1)^n n^2}{n^4} \cdot \frac{n^4}{\frac{n^5}{n+1}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right)}{\frac{n+1}{n^5}} \\ &= \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right)}{\frac{n+1}{n^5}}.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že platí

(1) $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$,
(2) $\lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n^5} = 0$,
(3) $\frac{n+1}{n^5} \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

můžeme podle věty o limitě složené funkce a Heineho věty psát

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right)}{\frac{n+1}{n^5}} = 1.$$

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, proto $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2} = 0$. Dohromady pak máme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n^4 + (-1)^n n^2)\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right)}{\frac{n+1}{n^5}} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Příklad J2 : Platí následující odhad:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \left|(-1)^n \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Zkoumaná řada je absolutně konvergentní a tedy konvergentní – toto plyne ze srovnávacího kritéria a faktu, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ je konvergentní.

Příklad J3 : Limita čitatele a jmenovatele je rovna 0 a funkce ve jmenovateli i čitateli mají v jistém prstencovém okolí nuly vlastní derivaci. Pokusme se tedy použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to0} \frac{\log\frac{\sin x}{x}}{x^2} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}.$$

Limitu druhého činitele zkusme spočítat opět podle l'Hospitalova pravidla (předpoklady jsou splněny!):

$$\lim_{x\to0} \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{6x^2} = \lim_{x\to0} \frac{-\sin x}{6x} = -1/6.$$

Vzhledem k tomu, že limita podílu derivací existuje, tak je i první rovnost v předchozím výpočtu v pořádku. Totéž lze říci o prvním použití l'Hospitalova pravidla a dostáváme

$$\lim_{x\to0} \frac{\log\frac{\sin x}{x}}{x^2} = -1/6.$$

Příklad J4 : Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \in (-\infty, -1), \\ x^3 + x, & x \in \langle -1, +\infty). \end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude kromě bodu -1:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in (-\infty, -1), \\ 3x^2 + 1, & x \in (-1, +\infty). \end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodě -1 lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} f'(x) = \lim_{x\to -1+} (3x^2+1) = 4,$$
$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-} f'(x) = \lim_{x\to -1-} 3x^2 = 3.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodě -1 nemá derivaci.

Příklad J5 : Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{3\}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3-} f(x) = -\pi/2+3$, $\lim_{x\to 3+} f(x) = \pi/2+3$. Funkce f je spojitá na $\mathcal{D}(f)$, ale není sudá, ani lichá, ani periodická.

Spočtěme f' všude, kde existuje:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-6x+9}{x^2-6x+10}, & x\in(0,3)\cup(3,+\infty); \\ -\frac{x^2-6x+11}{x^2-6x+10}, & x\in(-\infty,0). \end{cases}$$

Funkce f je v bodě 0 spojitá a proto tam můžeme počítat derivaci pomocí limity derivace:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2-6x+9}{x^2-6x+10} = \frac{9}{10},$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} -\frac{x^2-6x+11}{x^2-6x+10} = \frac{-11}{10}.$$

V bodě 0 tedy f nemá derivaci. Pro znaménko derivace platí:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x\in(0,3)\cup(3,+\infty),$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0).$$

Funkce f je tedy na intervalu $(-\infty,0)$ klesající a na množině $(0,3)\cup(3,\infty)$ je rostoucí (viz výpočet limit v bodě 3!). V bodě 0 má f globální minimum. Globálního maxima nenabývá.

Spočtěme f'':

$$f''(x) = \frac{2x-6}{(x^2-6x+10)^2},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,\infty).$$

Pro znaménko f'' platí

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x\in(3,+\infty),$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,3).$$

Funkce f je konkávní na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,3)$; na intervalu $(3,+\infty)$ je konvexní. Pro obor hodnot platí: $\mathcal{H}(f) = \rangle \operatorname{arctg}(-1/3),+\infty)$. Určeme ještě asymptoty:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = -1, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = 0.$$

Funkce $y = x$ je tedy asymptotou funkce f v $+\infty$ a funkce $y = -x$ je asymptotou v $-\infty$.

Zde je graf funkce f: