

Písenná zkouška z matematiky pro FSV (A)

ZS 2002-03, 23.1. 2003

Příklad A1: Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad A2: Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2x} - 1}{\log(x^3) + (x - 1)^2}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad A3: Spočítejte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x), & x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}; \\ 1 & x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}. \end{cases}$$

ve všech bodech, kde existuje. (15 bodů)

Příklad A4: Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Výsledky (A)

Příklad A1: $2/\sqrt{3}$

Příklad A2: $2/3$

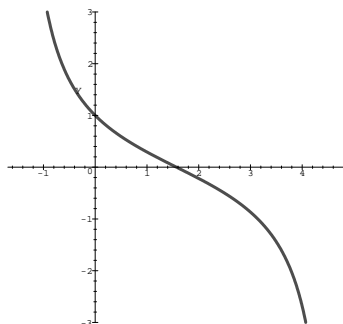
Příklad A3:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi) \cup (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi); \\ +\infty, & x = k\pi, k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$$

$$f'_-(x) = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$f'_+(x) = -\infty, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Příklad A4:



Písenná zkouška z matematiky pro FSV (B) ZS 2002-03, 30.1. 2003

Příklad B1: Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right)^{3n}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad B2: Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^3(e^x - 1)^3}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad B3: Spočítejte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \max\{x(x-1)^2 + x, x\}.$$

ve všech bodech, kde existuje. (15 bodů)

Příklad B4: Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{2x-1}\right). \quad (15 \text{ bodů})$$

Výsledky (B)

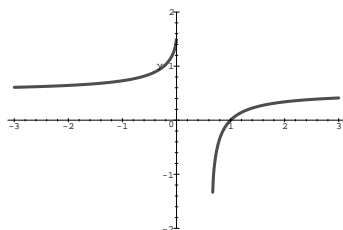
Příklad B1: $e^{-3/2}$

Příklad B2: $-1/6$

Příklad B3:

$$f'(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2x(x-1) + 1, & x \in (0, +\infty); \\ 1, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Příklad B4:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)

ZS 2002-03, 6.2. 2003

Příklad C1: Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(1/n^{48}) \cdot \left(\left(n + \frac{1}{n^3} \right)^{100} - (n^{32} + n^{10} + 1)^3 - n^{100} \right). \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad C2: Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+2) \log(2x+1) - (x+1) \log(2x+2) - \log x). \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad C3: Nalezněte všechna $a > 0$, pro která má následující funkce vlastní derivaci ve všech bodech intervalu $(0, +\infty)$. Derivaci spočtěte pro každé $x \in (0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^{(x^a)} & x \in (0, 1) \\ x^{(a^x)} & x \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad C4: Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \sqrt[3]{x^2} e^{-x}. \quad (15 \text{ bodů})$$

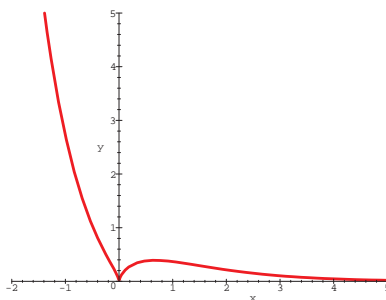
Výsledky (C)

Příklad C1: 99

Příklad C2: $-1/2 + \log 2$

Příklad C3: $a = 1$

Příklad C4:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)

ZS 2002-03, 12.2. 2003

Příklad D1: Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 6n} - \sqrt[3]{n^3 + 7}}{\sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 1}}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad D2: Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^3 - \operatorname{arctg} x)}{\log(x^2 + \operatorname{arctg} x)}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad D3: Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \arcsin(\exp(-x^2))$$

ve všech bodech, kde existuje. (15 bodů)

Příklad D4: Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Výsledky (D)

Příklad D1: 4/3

Příklad D2: 3/2

Příklad D3:

$$f'(x) = \frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-2x^2}}}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

$$f'_+(0) = -\sqrt{2}, \quad f'_-(0) = \sqrt{2}$$

Příklad D4:

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

ZS 2002-03, 27.2. 2003

Příklad E1: Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}}}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad E2: Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x^{10}) - \sqrt{1 + 2x^{10}} + 1}{x^{20}}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad E3: Spočítejte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \min\{\max\{x, x + x^3\}, x + 1\}$$

ve všech bodech, kde existuje. (15 bodů)

Příklad E4: Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = (x^2 + |x|)e^x. \quad (15 \text{ bodů})$$

Výsledky (E)

Příklad E1: 3/2

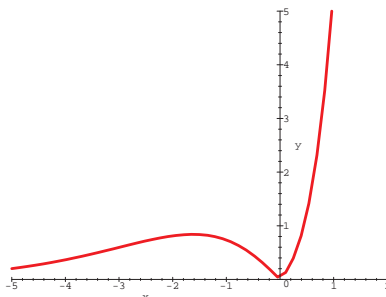
Příklad E2: 1/2

Příklad E3:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, +\infty); \\ 1 + 3x^2, & x \in (0, 1); \\ 1, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

$$f'(0) = 1, f'_+(1) = 1, f'_-(1) = 1$$

Příklad E4:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (F)

ZS 2002-03, 13.3. 2003

Příklad F1: Určete $\alpha > 0$ tak, aby následující limita byla vlastní.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{(\sqrt{n^2 + 1} - n)n^2}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad F2: Spočtete limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(\sin x + \cos x)}{\log(\cos x - \sin x)} \right)^3. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad F3: Spočtete derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) + \operatorname{sgn}(\sin 2x)$$

ve všech bodech, kde existuje. (15 bodů)

Příklad F4: Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Výsledky (F)

Příklad F1: 1/3

Příklad F2: -1

Příklad F3:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R} \setminus (\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\} \cup \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}); \\ +\infty, & x \in \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}; \\ -\infty, & x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\}. \end{cases}$$

Příklad F4:

