# Kapitola 8

## Skalární součin

## Standardní skalární součin - obsah

- *Standardní skalární součin*
  V $\mathbb{R}^n$
  V $\mathbb{C}^n$

# Úvod

- adresa stránky pro letní semestr

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~tuma/LinAlg14-15/LS14-15.html

- skalární součin dovoluje měřit délky vektorů a úhly mezi nimi v lineárních prostorech

- skalární součin funguje pouze pro lineární prostory nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

## Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$

**definice**: pro dva aritmetické vektory $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definujeme jejich *standardní skalární součin* jako reálné číslo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \; .$$

**definice**: *eukleidovská norma* nebo také *eukleidovská délka* vektoru $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je číslo

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \; .$$

## Co plyne z kosinové věty v dimenzi 2

geometrický význam standardního skalárního součinu si ujasníme pomocí kosinové věty

## Projekce vektoru do směru druhého vektoru

rovnost $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$

můžeme geometricky interpretovat ještě jiným způsobem

## Rovnice přímky v rovině pomocí skalárního součinu

rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ je rovnice přímky v rovině,

pokud apoň jedno z čísel $a_1, a_2$ je nenulové

přepíšeme ji do tvaru $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$

kde $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ a $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$

použijeme geometrický význam

$$\|\mathbf{a}\| \; \|\mathbf{x}\| \cos\alpha = b$$

$$\|\mathbf{x}\| \cos\alpha = \frac{b}{\|\mathbf{a}\|}$$

## Normálový vektor přímky

vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ je kolmý na přímku $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

**příklad**: najdeme rovnici přímky v rovině procházející body $P = (1, 3)$ a $Q = (2, 1)$

## Ortogonální projekce vektoru do podprostoru dimenze 1

rovnost $\|\mathbf{x}\| \cos\alpha = \dfrac{b}{\|\mathbf{a}\|}$ je rovnost mezi skaláry

jaká je norma vektoru $(\|\mathbf{x}\| \cos\alpha)\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ ?

tento vektor je ortogonální projekcí $\mathbf{x}$ do přímky $\langle \mathbf{a} \rangle$

jiný tvar $(\|\mathbf{x}\| \cos\alpha)\,\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = (\|\mathbf{a}\|\ \|\mathbf{x}\| \cos\alpha)\,\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a}$

rovnice $\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = b \quad$ je ekvivalentní s $\quad \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a} = \dfrac{b}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a}$

## Rovnice rovnoběžných přímek a rovnice poloroviny v rovině

rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ a $a_1x_1 + a_2x_2 = c$ jsou rovnice rovnoběžných přímek

čemu odpovídá množina bodů $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ splňujících nerovnici

$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$

$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$

## Symetrie standardního skalárního součinu v rovině

součin $\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\alpha$ můžeme geometricky interpretovat dvěma způsoby

kdy je $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ?

# Standardní skalární součin v dimenzi 3

zvolíme dva vektory $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)^T, \mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ takové, že posloupnost $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je lineárně nezávislá

opět použijeme kosinovou větu na trojúhelník se stranami $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

## Rovnice roviny v prostoru dimenze 3

množina všech řešení rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ je rovina

v prostoru, pokud je aspoň jeden z koeficientů $a_1, a_2, a_3$ nenulový

pomocí standardního skalárního součinu

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$

s geometrickým významem

$\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{x}\| \cos\alpha = b$

## Ortogonální projekce na přímku v prostoru dimenze 3

rovinu tvoří všechny body body $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, které splňují

$$(\|\mathbf{x}\| \cos\alpha) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = b \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \quad \text{nebo ekvivalentně} \quad \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \frac{b}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ je kolmý na rovinu $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

říkáme mu proto *normálový vektor* roviny $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

# Rovnice rovnoběžných rovin a poloprostorů

rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ a $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$ jsou rovnice rovnoběžných rovin

čemu odpovídá množina bodů $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^2$ splňujících nerovnici

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b$

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$

## Reálné aritmetické prostory dimenze větší než 3

na základě analogie považujeme normu

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

vektoru $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ za délku vektoru $\mathbf{u}$

pokud dva vektory $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$

generují rovinu v $\mathbb{R}^n$, použijeme kosinovou větu na trojúhelník

se stranami $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}$ v této rovině a dostaneme

opět $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$

## Projekce na podprostor dimenze 1 v $\mathbb{R}^n$

analogicky popisuje rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

afinní nadrovinu v $\mathbb{R}^n$, pokud je aspoň jedno $a_i \neq 0$

protože $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \neq 0$, tvoří tuto nadrovinu

všechny body $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, jejichž polohové vektory

mají ortogonální projekci do přímky $\langle \mathbf{a} \rangle$ rovnou

$$(\|\mathbf{x}\| \ \cos\alpha) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a} = \frac{b}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a}$$

vektor $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a}$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{x}$ do přímky $\langle \mathbf{a} \rangle$

## Vlastnosti standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$

**tvrzení**: jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ libovolné reálné aritmetické vektory a $a \in \mathbb{R}$ skalár, pak platí

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
3. $\mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v}) = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ právě když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

**důkaz**:

## Geometrický význam linearity standardního skalárního součinu

pro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ a $a \in \mathbb{R}$:

## Co plyne z linearity v dimenzi 2

pro $\mathbf{u} = (x_1, x_2)^T$ a $\mathbf{v} = (y_1, y_2)^T$ platí

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$

## Příklad

někdy bývá zvykem označovat $\mathbf{1}_n = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$

co znamená $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ?

co znamená $\left(\frac{1}{n}\mathbf{1}\right) \cdot \mathbf{x}$ ?

vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ je *váhový vektor*, pokud $w_i \geq 0$

$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$ je potom *vážený součet* složek vektoru $\mathbf{x}$

pokud navíc $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$, nazýváme

$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$ *vážený průměr* složek vektoru $\mathbf{x}$

## Prohledávání dokumentů

zajímá nás výskyt určitých slov v dokumentech na webu

zvolíme si nějakých 1024 slov, která si označíme čísly 1,2,. . . ,1024

informaci o výskytech zvolených slov v dokumentu $X$ si zapíšeme jako vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{1024})$, kde $x_i$ označuje počet výskytů $i$-tého slova v dokumentu $X$

tazatel nám dá nějakou množinu slov s indexy $J \subseteq 1, 2, \ldots, 1024$

definujeme si váhový vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_{1024})$:

skalární součin $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$ pak udává

## Standardní skalární součin v $\mathbb{C}^n$

**definice** pro dva komplexní aritmetické vektory $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ definujeme *standardní skalární součin* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ předpisem

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \cdots + \overline{x_n} y_n \ ,$$

kde $\overline{x}$ značí číslo komplexně sdružené k $x$, tj. $\overline{a + bi} = a - bi$

**definice**: *eukleidovskou délku* nebo také *eukleidovskou normu* aritmetického vektoru $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ definujeme jako

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\overline{x_1} x_1 + \overline{x_2} x_2 + \cdots + \overline{x_n} x_n} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

délka každého vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ je *nezáporná*

## Hermitovsky sdružené matice

v $\mathbb{R}^n$ jsme definovali standardní skalární součin jako $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$

abychom to mohli podobně udělat i v komplexním případě, zavedeme

**definice**: *hermitovsky sdružená matice* k matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ je matice $A^* = (b_{ji})_{n \times m}$, kde $b_{ji} = \overline{a_{ij}}$ pro libovolné indexy $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

hermitovské sdružování má mnoho vlastností společných s transponováním

## Příklad

najdeme hermitovsky sdruženou matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3 & i \\ 0 & 3-2i & 4i \end{pmatrix}$$

pomocí hermitovského sdružování můžeme také standardní skalární součin v $\mathbb{C}^n$ zapsat maticově

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^* \mathbf{v}$$

## Základní vlastnosti standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^n$

**tvrzení**: pro libovolné tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ a komplexní číslo $a$ platí

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $\mathbf{u} \cdot (a\,\mathbf{v}) = a\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ je nezáporné reálné číslo, a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ právě když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$

**důkaz**:

## Další vlastnosti

**pozorování**: pro libovolné tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ a komplexní číslo $a$ platí

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
2. $(a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \overline{a}\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

**důkaz**:

## Obecný skalární součin - obsah

- *Obecný skalární součin*
  Definice
  Norma
  Cauchyova-Schwarzova nerovnost

## Úvodní poznámky

- prvky obecného lineárního prostoru nejsou vždy aritmetické vektory
- přesto je někdy třeba měřit jejich délku nebo úhly mezi nimi
- tak jako v jiných případech zobecnění vezmeme za základ některé algebraické vlastnosti známého objektu
- známým objektem bude standardní skalární součin
- (obecný) skalární součin dvou prvků $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ budeme značit $\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v}\, \rangle$

## Definice

**definice**: předpokládáme, že **V** je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ (resp. nad $\mathbb{C}$);

zobrazení $\langle\, , \,\rangle$ z $V \times V$ do $\mathbb{R}$ (resp do $\mathbb{C}$), které dvojici prvků $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ přiřadí skalár $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, se nazývá *skalární součin*, pokud pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$) platí

(SCS) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$

(SL1) $\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} \rangle = a \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

(SL2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

(SP) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ je nezáporné reálné číslo, které je nulové právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$

## Jednoduché důsledky definice

z axiomů skalárního součinu snadno plyne

**pozorování**: je-li $\langle\ ,\ \rangle$ skalární součin na reálném (nebo komplexním) lineárním prostoru $\mathbf{V}$, pak pro libovolné prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skalár $a$ platí

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{o} \rangle = 0 = \langle \mathbf{o}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{a} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
3. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

**důkaz**:

## Příklad

podíváme se na rovnu šikmo

co bylo kolmé, již kolmé není; co mělo délku 1, už ji mít nemusí

nějaké vzdálenosti ale v rovině pořád vidíme

také si umíme představit dvojici vektorů, kterou vidíme kolmou

pomocí pravoúhlého trojúhelníku pak spočteme i úhly

můžeme vzdálenosti a úhly popsat skalárním součinem ?

## Skalární součin v $\mathbb{R}^2$ našikmo

podíváme se rovinu pod takovým úhlem, že prvek kanonické báze $\mathbf{e}_1$ uvidíme nadále s délkou 1, zatímco $\mathbf{e}_2$ uvidíme s délkou 2

úhel mezi $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ uvidíme jako $\pi/3$

použijeme linearitu a spočteme

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

# Skalární součin v $\mathbb{R}^n$ definnovaný maticí

zvolíme nějakou reálnou matici $A$ řádu $n$

zkusíme pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ definovat skalární součin

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

je to opravdu skalární součin ?

## Pozitivně definitní matice

**definice**: symetrická reálná matice $A$ řádu $n$ se nazývá *pozitivně definitní*, pokud pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ platí, že

$\mathbf{u}^T A\,\mathbf{u} \geq 0$, přižemž rovnost nastává právě když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$

**tvrzení** je-li $A$ pozitivně definitní reálná matice řádu $n$, pak zobrazení $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definované předpisem

$$\langle\,\mathbf{u}, \mathbf{v}\,\rangle = \mathbf{u}^T A\,\mathbf{v}$$

je skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^n$

**příklad**: pro každou reálnou regulární matici $B$ je matice $A = B^T B$ pozitivně definitní

## Skalární součin v prostoru spojitých funkcí

na prostoru $C[0, 2\pi]$ reálných funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[0, 2\pi]$ definujeme skalární součin předpisem

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)$$

## Intuitivní integrování

$\int_0^{2\pi} \sin(x) =$

$\int_0^{2\pi} \cos(x) =$

$\int_0^{2\pi} \sin(2x) =$

$\langle \sin(x), \cos(x) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)$

$\langle \sin(x), \sin(2x) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(2x)$

$\langle \sin(x), \cos(2x) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(2x)$

$\langle \sin(x), \sin(x) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)$

## Protor $\ell_2$

reálný lineární prostor $\ell_2$ je tvořen posloupnostmi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel, které splňují podmínku

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

v prostoru $\ell_2$ je skalární součin definovaný předpisem

$$\langle\, (a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

## Definice normy určené skalárním součinem

**definice**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$, pak definujeme *normu* vektoru $\mathbf{u} \in V$ jako reálné číslo

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{u}\,\rangle}$$

vektor $\mathbf{u}$ se nazývá *jednotkový*, pokud $\|\mathbf{u}\| = 1$

norma prvku $\mathbf{u}$ závisí na skalárním součinu

eukleidovská norma je určená standardním skalárním součinem

## Příklad

v prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem je

$\left\|(1,1)^T\right\|^2 =$

v prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem definovaným maticí

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ platí $\left\|(1,1)^T\right\|^2 =$

v prostoru $C[0,2\pi]$ se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)$

je $\|1\|^2 =$

$\|\sin x\|^2$

## Vlastnosti normy

**tvrzení**: je-li **V** lineární prostor nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a $t \in \mathbb{R}$ (resp. $t \in \mathbb{C}$), pak platí

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, přičemž $\|\mathbf{u}\| = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$
2. $\|t\mathbf{u}\| = |t|\,\|\mathbf{u}\|$
3. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\,\|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\|\mathbf{v}\|^2$
4. $\mathrm{Re}\,(\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v}\,\rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2)$, kde $\mathrm{Re}\,(x)$ značí reálnou část $x$

# Důkaz aj.

## Cauchyova-Schwarzova nerovnost

pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ platí

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$$

odtud plyne, že vždy $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\|$

tato velmi důležitá nerovnost platí pro každý skalární součin

**Cauchyova-Schwarzova nerovnost**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor se skalárním součinem $\langle \, , \, \rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, pak platí

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

a rovnost nastává právě tehdy, když $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je lineárně závislá posloupnost

# Důkaz

# Dokončení důkazu

# Co plyne z Cauchyovy-Schwatzovy nerovnosti

v prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem

v prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem určeným maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

v prostoru spojitých funkcí na $[0, 2\pi]$

## Trojúhelníková nerovnost

**tvrzení**: je-li **V** lineární prostor se skalárním součinem $\langle\, , \,\rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, pak platí

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

**důkaz**:

# Úhly v lineárním prostoru se skalárním součinem

z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti plyne, že pro nenulové dva prvky **uv** v lineárním prostoru **V** se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$ platí

$$\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

existuje tedy právě jeden úhel $\alpha \in [0, \pi]$, pro který platí

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|}$$

**takto definujeme** *úhel mezi prvky* **u** a **v** v lineárním prostoru se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$

## Kosinová věta obecně

**tvrzení**: je-li **V** lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $\langle\, ,\, \rangle$ a $\mathbf{o} \neq \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, pak platí

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\alpha \ ,$$

kde $\alpha$ je úhel mezi vektory **u** a **v**

**důkaz**:

# Obecné normy na lineárním prostoru

**definice**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor nad $\mathbb{C}$ (nebo nad $\mathbb{R}$), pak zobrazení $\|\cdot\|$, které přiřazuje každému prvku $\mathbf{u}$ reálné číslo $\|\mathbf{u}\|$, nazýváme *norma* na prostoru $\mathbf{V}$, pokud platí pro kažé dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a každý skalár $t$

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, přičemž $\|\mathbf{u}\| = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$
2. $\|t\mathbf{u}\| = |t| \, \|\mathbf{u}\|$
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

**příklad**:

## Kolmost - obsah

- *Kolmost*
  Základy
  Souřadnice vzhledem k ON bázi
  Kolmost mezi množinami

## Definice

**definice**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$, pak prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ nazýváme *kolmé* (nebo *ortogonální*) a píšeme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, pokud $\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v}\, \rangle = 0$

množina, nebo posloupnost, $M$ prvků $V$ se nazývá *ortogonální*, pokud $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ pro libovolné dva různé prvky množiny (nebo posloupnosti) $M$

množina (posloupnost) $M$ se nazývá *ortonormální*, pokud je ortogonální a každý vektor v $M$ je jednotkový

**poznámky**:

- ortogonalita posloupnosti prvků nezávisí na pořadí
- je-li $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, pak $a\mathbf{u}$ $\ b\mathbf{v}$
- z ortogonální posloupnosti (množiny) $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ dostaneme ortonormální posloupnost

## Lineární nezávislost ortogonální posloupnosti

**tvrzení**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor se skalárním součinem $\langle\, , \rangle$, pak každá ortogonální posloupnost nenulových prvků $V$ je lineárně nezávislá

**důkaz**:

## Příklady

je-li $B$ $n$-prvková ortogonální posloupnost nenulových prvků v lineárním prostoru dimenze $n$, je to

**příklad**:

- kanonická báze je ortonormální v prostoru $\mathbb{R}^n$
- v prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

je posloupnost $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ ortogonální

## Dokončení příkladu

uděláme z ní ortonormální bázi

## Základ Fourierovy analýzy

**příklad** v prostoru $C[0, 2\pi]$ se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} fg$$

je posloupnost funkcí

$$1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \ldots$$

ortogonální

## Pythagorova věta

**tvrzení**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor se skalárním součinem $\langle\, , \,\rangle$ a jsou-li vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ kolmé, pak platí

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

**důkaz**:

# Souřadnice vzhledem k ortonormální bázi

**tvrzení**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor se skalárním součinem $\langle\,,\,\rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ nějaká ortonormální báze ve $\mathbf{V}$ a $\mathbf{u} \in V$, pak platí

$$\mathbf{u} = \langle\, \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \,\rangle\, \mathbf{v}_1 + \langle\, \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \,\rangle\, \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle\, \mathbf{v}_n, \mathbf{u} \,\rangle\, \mathbf{v}_n$$

**důkaz**:

## Důsledky

- čemu se rovná $[\mathbf{u}]_B$ ?

- je-li $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortogonální báze ve $\mathbf{V}$, pak

$$[\mathbf{u}]_C =$$

## Skalární součin pomocí ortonormální báze

**tvrzení**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor se skalárním součinem $\langle\, , \,\rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jeho ortonormální báze, a $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$, pak

$$\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \,\rangle = [\mathbf{u}]_B^*[\mathbf{w}]_B$$

**důkaz**:

## Příklad

najdeme souřadnice vektoru $\mathbf{u} = (3+i, 2, i)^T \in \mathbb{C}^3$ vzhledem k ortonormální bázi

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left( \frac{1}{3} \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2i \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

v prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním skalárním součinem

# Dokončení příkladu

## Další příklad

v prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

je posloupnost

$$B = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

ortonormální báze

najdeme dvěma různými způsoby $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ pro

vektory $\mathbf{u} = (2, 3)^T$ a $\mathbf{v} = (1, 1)^T$

# Dokončení příkladu

## Kolmost mezi množinami

**definice**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor se skalárním součinem $\langle\, , \,\rangle$ a $\mathbf{v} \in V$, $M, N \subseteq V$, pak říkáme, že prvek $\mathbf{v}$ *je kolmý na* $M$, pokud $\mathbf{v}$ je kolmý na každý vektor z množiny $M$;   **označení**: $\mathbf{v} \perp M$,

říkáme, že $M$ *je kolmá na* $N$ a **zapisujeme** $M \perp N$, pokud každý vektor množiny $M$ je kolmý na každý vektor množiny $N$

**pozorování**: je-li $\mathbf{V}$ prostor se skalárním součinem $\langle\, , \,\rangle$ a $M, N \subseteq V$, pak $M \perp N$ právě když $\langle M \rangle \perp \langle N \rangle$

**důkaz**:

## Gramova-Schmidtova ortogonalizace - obsah

- *Gramova-Schmidtova ortogonalizace*
  Projekce na podprostor
  Ortogonalizační proces
  QR-rozklad
  Ortogonální a unitární matice

## Projekce prvku na podprostor

**definice**: Je-li **V** lineární prostor se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$, $\mathbf{v} \in V$ a **W** podprostor **V**, pak prvek $\mathbf{w} \in\ W$ nazýváme *ortogonální projekce* **v** *na podprostor* **W**, pokud platí $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp W$

## Projekce je prvek **W** nejbližší k **v**

**tvrzení**: je-li **W** podprostor lineárního prostoru **V** se skalárním součinem $\langle\, , \rangle$, $\mathbf{v} \in V$ a **w** ortogonální projekce prvku **v** na podprostor **W**, pak pro každý prvek $\mathbf{w} \neq \mathbf{u} \in W$ platí

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

**důkaz**:

**důsledek**: pokud ortogonální projekce prvku **v** na podprostor **W** existuje, je určená jednoznačně

# Projekce na podprostor s ortonormální bází

**tvrzení**: je-li **V** lineární prostor se skalárním součinem $\langle\, , \,\rangle$, $\mathbf{v} \in V$, a **W** konečně generovaný podprostor **V** s ortonormální bází $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)^T$, pak prvek

$$\mathbf{w} = \langle\, \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \,\rangle\, \mathbf{u}_1 + \langle\, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \,\rangle\, \mathbf{u}_2 + \cdots + \langle\, \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \,\rangle\, \mathbf{u}_k$$

je ortogonální projekcí vektoru **v** na podprostor **W**

**důkaz**:

## Co když máme v podprostoru ortogonální bázi ?

je-li $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ ortogonální báze $\mathbf{W}$

čemu se rovná projekce $\mathbf{v}$ na $\mathbf{W}$ ?

čemu se rovná projekce $\mathbf{v}$ na $\langle \mathbf{a} \rangle$ ?

## Příklad

v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem je $((1,1,2)^T,(2,0,-1)^T)$ ortogonální množina

najdeme ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}=(1,2,3)^T$ na rovinu $W=\langle(1,1,2)^T,(2,0,-1)^T\rangle$

# Gramova-Schmidtova ortogonalizace

jeden za základních algoritmů v lineární algebře

na vstupu je lineárně nezávislá posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$

prvků lineárního prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$

na výstupu je ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$

taková, že $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i \rangle$

pro každé $i = 1, 2, \dots, k$

## Popis algoritmu

jak najdeme $\mathbf{u}_1$?

jak najdeme $\mathbf{u}_2$?

pokud už máme $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1})$ pro $i \leq k$, jak najdeme $\mathbf{u}_i$?

## Gramova-Schmidtova ortogonalizace dělá to, co má

jak dokážeme správnost algoritmu?

## Příklad

v podprostoru

$$W = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1,2,0,1)^T, (1,-1,1,0)^T, (0,1,1,3)^T\}$$

prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem najdeme ortonormální bázi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

# Pokračování příkladu

# Dokončení příkladu

# Proč jsme neověřovali jeden předpoklad

## Shrnutí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

dána lineárně nezávislá posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ prvků $\mathbf{W}$

$k$-krát iterujeme následující cyklus

(ia) **ortogonalizace**: najdeme prvek

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_{i-1} = \mathbf{v}_i - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{u}_2 \cdots - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_{i-1} \rangle \mathbf{u}_{i-1}$$

(ib) **normalizace**: položíme

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_{i-1}}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_{i-1}\|}$$

vyjde ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ prvků $\mathbf{W}$

## Existence ortonormálních bází

**věta**: je-li $\mathbf{W}$ podprostor konečně generovaného lineárního prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem, pak každou ortonormální (ortogonální) bázi v podprostoru $\mathbf{W}$ lze doplnit na ortonormální (ortogonální) bázi celého prostoru $\mathbf{V}$

speciálně, v každém konečně generovaném lineárním prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze

**důkaz**:

## Další důsledek

**věta**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor dimenze $n$ nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$) se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$, pak existuje izomorfismus $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ (nebo $f : \mathbf{V} \to \mathbb{C}^n$), pro který platí

$$\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v}\, \rangle = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v})$$

pro každé dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$

**důkaz**:

## Ortogonalizace v aritmetických prostorech

budeme ortogonalizovat posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ prvků $\mathbb{C}^n$

s obecným skalárním součinem $\langle \, , \, \rangle$

zapíšeme si je jako sloupce matice $A = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_k)$

výslednou ortonormální posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$

si zapíšeme jako sloupce matice $Q = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \cdots | \mathbf{u}_k)$

rovnost $\quad \mathbf{u}_i = \dfrac{\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_{i-1}}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_{i-1}\|} \quad$ přepíšeme jako

# Tvrzení o QR-rozkladu

**tvrzení**: je-li $A$ komplexní (reálná) matice typu $n \times k$ s lineárně nezávislými sloupci, pak existuje matice $Q$ typu $n \times k$ nad tělesem skalárů s ortonormálními sloupci a horní trojúhelníková matice $R$ řádu $k$ s kladnými reálnými prvky na hlavní diagonále taková, že platí $A = QR$

## Příklad

najdeme QR-rozklad matice $A = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

# Dokončení příkladu

## Definice

jak bychom zapsali jinak, že posloupnost sloupcových vektorů reálné matice $Q = (\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2|\cdots|\mathbf{q}_k)$ typu $m \times k$ je ortonormální ?

**definice**: čtvercová reálná matice $A$ řádu $n$ se nazývá *ortogonální*, platí-li $A^T A = I_n$

čtvercová komplexní matice $A$ řádu $n$ se nazývá *unitární*, platí-li $A^* A = I_n$

## Různé kvivalentní definice ortogonální (unitární) matice

**tvrzení**: Pro reálnou (resp- komplexní) čtvercovou matici $Q$ řádu $n$ jsou následující podmínky ekvivalentní

1. $Q$ je ortogonální (resp. unitární)
2. $Q^{-1} = Q^T$ (resp. $Q^{-1} = Q^*$)
3. zobrazení $f_Q$ zachovává standardní skalární součin, tj. pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) platí $Q\mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
4. $f_Q$ zachovává eukleidovskou normu, tj. pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) platí $\|Q\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$
5. $f_Q$ zobrazuje ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) na ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$)
6. posloupnost řádkových vektorů matice $Q$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$)
7. posloupnost sloupcových vektorů matice $Q$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$)

# Důkaz

## Dokončení důkazu a důsledek

**důsledek**: součin ortogonálních (resp. unitárních) matice stejného řádu je ortogonální (resp. unitární) matice

**důkaz**:

## Jednoznačnost QR-rozkladu regulární matice

**tvrzení**: je-li $A$ regulární (reálná nebo kompexní) matice řádu $a$ a $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ jsou dva QR-rozklady matice $A$, pak platí $Q_1 = Q_2$ a $R_1 = R_2$

**důkaz**:

## Použití QR-rozkladu na řešení soustavy lineárních rovnic

máme-li opakovaně řešit soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ s regulární maticí $A$ a různými pravými stranami,

- spočteme QR-rozklad $A = QR$ matice $A$
- soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ přepíšeme jako $QR\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- vynásobíme zleva $Q^T$ a dostaneme $Q^T QR\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$
- a dostaneme $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$, na to už stačí zpětná substituce

- GSO obecně také není numericky stabilní
- lze ji vylepšit jiným pořadím prováděných operací
- tím se stane stabilní pro velkou třídu matic
- vyžaduje $\approx n^3$ operací

## Příklad na numerickou nestabilitu GSO

**příklad**: v aritmetice se zaokrouhlováním na tři platná místa

použijeme *GSO* na matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^{-3} & 10^{-3} & 0 \\ 10^{-3} & 0 & 10^{-3} \end{pmatrix}$

všechny sloupcové vektory jsou „skoro“ rovnoběžné

vyjde $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10^{-3} & 0 & -0,709 \\ 10^{-3} & -1 & -0,709 \end{pmatrix}$

druhý a třetí sloupec příliš kolmé nevyšly

## Ortogonální projekce bez ortogonální báze

víme už, že v prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem existuje ortogonální projekce $\mathbf{w}$ libovolného prvku $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ na každý konečně generovaný podprostor $(W)$

jak ji spočítat, známe-li (jakoukoliv) bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ ve $\mathbf{W}$ ?

ortogonální projekce $\mathbf{w}$ je definována vztahem $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp W$

neboli musí platit $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp \mathbf{u}_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$

vyjádříme $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k$ a spočteme

$0 = \langle\, \mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \mathbf{w} \,\rangle =$

# Soustava lineárních rovnic pro ortogonální projekci

**tvrzení**: souřadnice $[\mathbf{w}]_B = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^T$ ortogonální projekce prvku $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ na konečně generovaný podprostor $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ lineárního prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\, , \rangle$ vzhledem k bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ podprostoru $\mathbf{W}$ splňují soustavu lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_k \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \end{array}\right)$$

matice této soustavy je regulární, neboť soustava má vždy právě jedno řešení pro jakýkoliv vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

## Gramova matice

**definice**: jsou-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ prvky lineárního prostoru se skalárním součinem, pak matici

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle \end{pmatrix}$$

nazýváme *Gramova matice* posloupnosti vektorů $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$

**vlastnosti Gramovy matice**

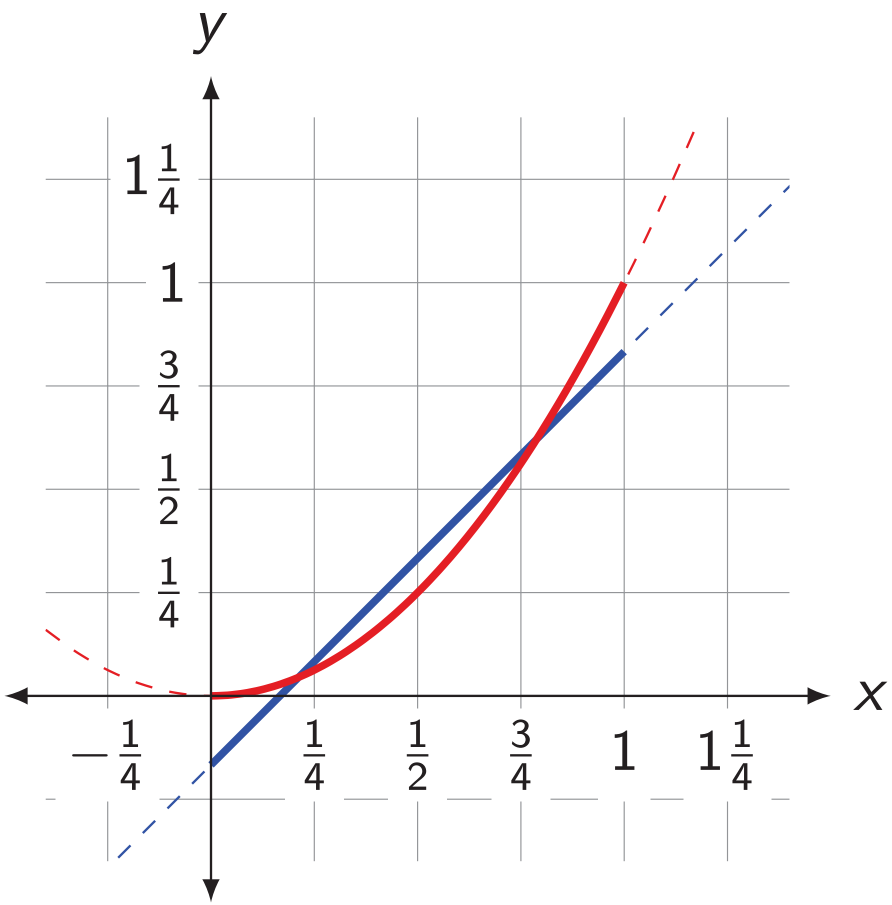
- je regulární
- je hermitovská (symetrická v reálném případě)
- pozitivně definitní

# Důkaz

## Ortogonální projekce v prostoru polynomů

**příklad**: v prostoru reálných polynomů stupně nejvýše dva se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ najdeme vzdálenost polynomu $x^2$ od podprostoru polynomů stupně nejvýše 1

## Obrázek



y
x
$1\frac{1}{4}$
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
$1\frac{1}{4}$

## Gramova-Schmidtova ortogonalizace v prostoru spojitých funkcí

**příklad**: použijeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci na posloupnost funkcí $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (1, 2, 3)$ v prostoru $C[0, 1]$ spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$ se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$

## Ortogonální doplněk - obsah

- *Ortogonální doplněk*
  Definice
  Ortogonální doplňky podprostorů určených maticí

# Definice ortogonálního doplňku

**definice**: je-li $V$ prostor se skalárním součinem $\langle\,,\,\rangle$ a $M \subseteq V$, pak *ortogonální doplněk* množiny $M$ je množina všech vektorů kolmých na každý vektor z $M$:

$$M^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp M\} \ .$$

**značíme**: $M^{\perp}$

**pozorování**: pro každou množinu $M \subseteq V$ platí $M^{\perp} = \langle M \rangle^{\perp}$

**příklad**: je-li $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ lineárně nezávislá posloupnost v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, pak $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^{\perp}$

## Příklad Další jednoduché vlastnosti ortogonálního doplňku

**příklad**: najdeme ortogonální doplněk roviny $U = \langle (1,2,5)^T, (0,1,1)^T \rangle$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem

**další jednoduché vlastnosti ortogonálního doplňku**:

- $M^\perp$ je podprostor $V$
- Je-li $M \subseteq N$, pak $N^\perp \subseteq M^\perp$

## Důležité vlastnosti ortogonálního doplňku

**věta**: je-li $\mathbf{V}$ konečně generovaný prostor dimenze $n$ se skalárním součinem $\langle\,,\,\rangle$ a $\mathbf{W}$ podprostor $\mathbf{V}$, pak platí

1. $\dim(\mathbf{W}^{\perp}) = n - \dim(\mathbf{W})$
2. $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$
3. $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{W}$

**důkaz**:

# Dokončení důkazu

## Ortogonální doplňky podprostorů určených maticí

předpokládáme, že $A$ je reálná (komplexní) matice typu $m \times n$

- $(Im\, A^T)^\perp =$
- $(Ker\, A)^\perp =$
- $(Im\, A)^\perp =$
- $(Ker\, A^T)^\perp =$

můžeme to také zapsat ve tvaru

$$Im\, A^T \oplus Ker\, A = \mathbb{R}^n, \qquad Im\, A \oplus Ker\, A^T = \mathbb{R}^m$$

# Metoda nejmenších čtverců - obsah

- *Metoda nejmenších čtverců*
  Formulace
  Lineární regrese
  Optimalizační problémy
  Klasifikační problémy
  Prostory nekonečné dimenze

## Co s neřešitelnou soustavou lineárních rovnic ?

- předpokládáme, že soustava $m$ lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o $n$ neznámých s reálnými koeficienty nemá řešení
- co je důvodem ?
- kde leží všechny vektory $A\mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ?
- který z nich je nejblíže pravé straně $\mathbf{b}$ ?

každý vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, pro který je eukleidovská norma $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|$ minimální, nazýváme

*přibližné řešení soustavy* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *metodou nejmenších čverců* nebo

*aproximace řešení soustavy* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *metodou nejmenších čverců*

## Jak přibližné řešení najdeme ?

je-li $\hat{\mathbf{x}}$ přibližné řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čverců, je $A\hat{\mathbf{x}}$ ortogonální projekcí (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{R}^n$) vektoru pravých stran $\mathbf{b}$ na sloupcový prostor (obor hodnot) $Im\, A$ matice $\mathbf{A}$

což platí právě když $(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) \perp Im\, A$

a to je právě když $A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{o}$

neboli právě když $\hat{\mathbf{x}}$ je řešením soustavy lineárních rovnic

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$$

této soustavě se říká *soustava normálních rovnic* příslušná k soustavě $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

## Příklad

použijeme-li metodu nejmenších čtverců pro nalezení přibližného řešení řešitelné soustavy, dostaneme

**příklad**: najdeme aproximaci řešení soustavy

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

metodou nejmenších čtverců

# Dokončení příkladu

## Historické poznámky

- 1.1.1801 astronom Giuseppe Piazzi z observatoře v Palermu objevil „novou planetu“
- z dalekohledů zmizela počátkem září 1801
- v září 1801 Carl Friedrich Gauss začal počítat její polohu
- vyšel z předpokladu eliptické dráhy
- na pozorované polohy použil metodu nejmenších čtverců
- v prosinci 1801 sdělil astronomům, kde by ji měli hledat
- předpověděl polohu i v budoucnu
- šlo o planetku Ceres
- metodu nejmenších čtverců publikoval v roce 1809

# Metoda nejmenších čtverců pomocí QR-rozkladu

z hlediska numerické stability je třeba vyhnout se matici $A^T A$

známe-li QR-rozklad matice $A = QR$, můžeme se jí vyhnout

## Lineární regrese

v rovině je dáno $n$ bodů se souřadnicemi $(x_i, y_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$

máme nějaký důvod si myslet, že tyto body by měly ležet na přímce

$$y = ax + b$$

neznáme u ní koeficienty $a, b$

to, že na ní neleží, je způsobenou chybou v měření souřadnice $y$

neznámé koeficienty $a, b$ by měly splňovat soustavu

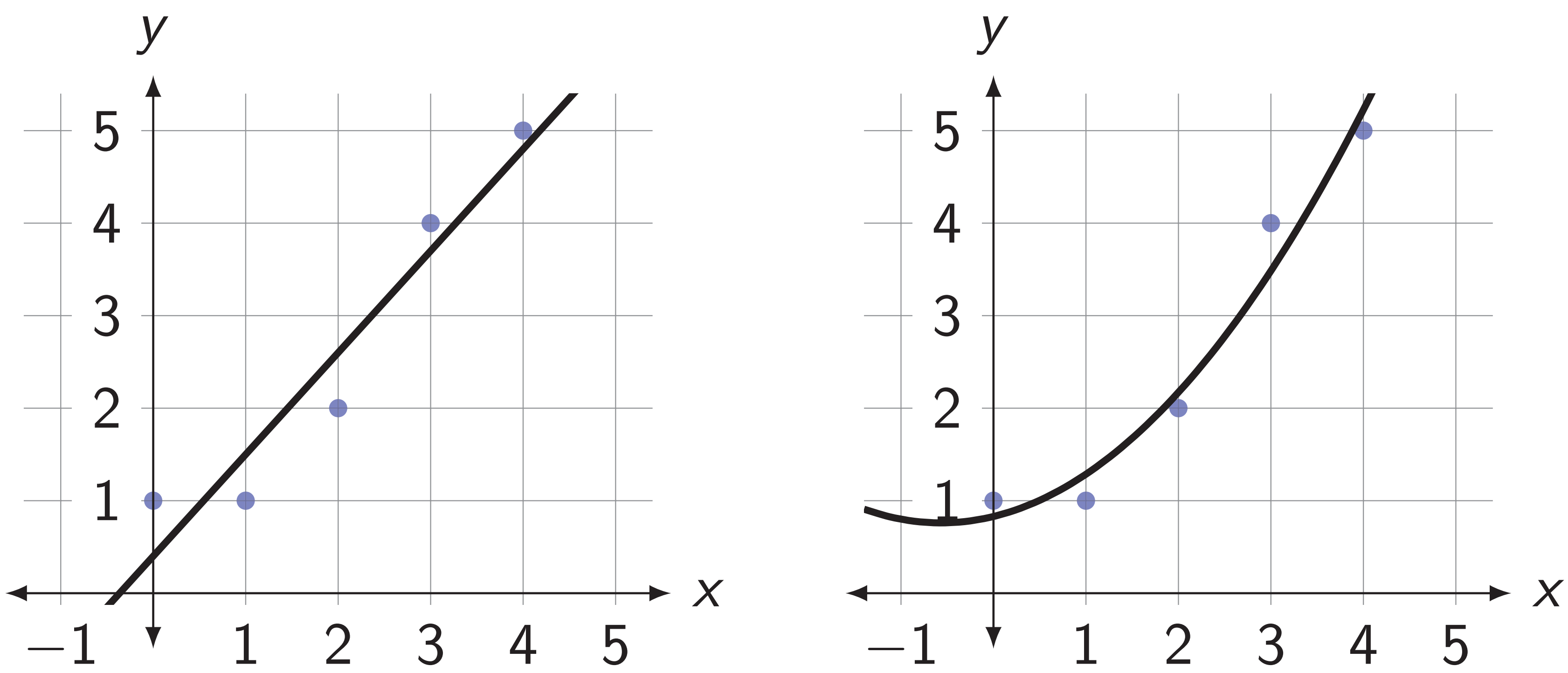
$$ax_i + b = y_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

co minimalizujeme metodou nejmenších čtverců ?

## Příklad na lineární regresi

metodou nejmenších čtverců proložíme body $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$ v $\mathbb{R}^2$ přímku $y = ax + b$

# Obrázek



## Proložení kvadratického polynomu

stejnými body proložíme kvadratický poynom $y = ax^2 + bx + c$

## Data fitting

obecně zvolíme nějakých $k$ funkcí reálných funkcí $f_i(x)$

hledáme jejich lineární kombinaci

$$\hat{f}(x) = a_1 f_1(x) + a_1 f_2(x) + \cdots + a_k f_k(x)$$

která minimalizuje součet

$$(y_1 - \hat{f}(x_1))^2 + (y_2 - \hat{f}(x_2))^2 + \cdots + (y_n - \hat{f}(x_n))^2$$

## Lineární optimalizace (programování)

problém, jak aproximovat řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců, lze zapsat také následovně

- je dána soustava lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A$ je typu $m \times n$
- hledáme prvek $\mathbf{y} \in Im\,A$, pro který je norma
- $\|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|^2 = (y_1 - b_1)^2 + (y_2 - b_2)^2 + \cdots + (y_m - b_m)^2$ co nejmenší

*úloha lineární optimalizace* (lineárního programování) je následující

- máme dánu soustavu lineárních nerovnic $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ (nerovnost platí pro každou složku zvlášť), $A$ typu $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- lineární účelovou funkci $c(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
- hledáme vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, který splňuje omezující podmínky
- a maximalizuje (minimalizuje) hodnotu $c(\mathbf{x})$

## Konvexní optimalizace (programování)

formálně stejná jako v případě lineární optimalizace

- místo soustavy lineárních nerovností $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
- máme soustavu omezujících podmínek tvaru
- $f_i(\mathbf{x}) \leq b_i$, kde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou konvexní funkce
- účelová funkce $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je také konvexní
- hledáme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, které splňuje omezující podmínky
- a maximalizuje (minimalizuje) hodnotu účelové funkce

prudce se rozvíjející technologie v posledních 20 letech

další typy matematického programování - kvadratické, semidefinitní, nelineární, geometrické, atd.

# Antispamový filtr

- doručenou zprávu popíšeme pomocí nějakého vektoru $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, N$
- spamům dáme hodnotu $y_i = -1$, nespamům hodnotu $y_i = 1$
- máme spoustu takových zpráv
- hledáme funkci $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \{1, -1\}$
- která bude odlišovat spamy od nespamů

## Detekce podvodných transakcí platební kartou

- žádost o transakci popíšeme pomocí nějakého vektoru z $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, N$
- podvodným dáme hodnotu $y_i = -1$, řádným hodnotu $y_i = 1$
- máme spoustu takových transakcí
- hledáme funkci $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \{1, -1\}$
- která bude odlišovat podezřelé transakce od řádných

## Jednoduchý klasifikátor pomocí metody nejmenších čtverců

- zvolíme nějaké bázové funkce (regresory) $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, p$
- najdeme koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_p$ určující funkci
- $\overline{f} = a_1 f_1 + a_2 + \cdots + a_p f_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- která minimalizuje hodnotu

$$(\overline{f}(\mathbf{x}_1) - y_1)^2 + (\overline{f}(\mathbf{x}_2) - y_2)^2 + \cdots + (\overline{f}(\mathbf{x}_N) - y_N)^2$$

- to lze udělat metodou nejmenších čtvedrců
- definujeme $\hat{f}(\mathbf{x}) = sign\,\overline{f}(\mathbf{x})$

už volba lineárního regresoru, tj. bázových funkcí $1, x$, dává přijatelné výsledky

## Hledání markerů nemocí ve výsledcích krevních testů

výsledkem krevního testu pomocí *hmotové spektrometrie* (cena několik euro) je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{40000}$

lékaři předloží 100 testů od zdravých osob a 100 testů od nemocných s určitým typem rakoviny

- vektorům zdravých lidí dáme hodnotu $+1$, u nemocných $-1$
- opět hledáme klasifikátor $\hat{f} : \mathbb{R}^{40000} \to \{+1, -1\}$, který odliší zdravé od nemocných v raném stadiu choroby

nejlepší klasifikátory jsou takové, které závisí pouze na hodnotách několika složek vektoru $\mathbf{x}$, těm se říká *markery*

## Chybová tabulka

## Geometrický význam klasifikátorů

velmi zhruba řečeno, klasifikátor pomocí metody nejmeších čtverců spočívá v tom, že u velmi poddefinované soustavy lineárních rovnic volíme řešení s nejmenší eukleidovskou normou

nejjednodušší soustava rovnic v matematice je $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

známe (změříme) $\mathbf{y}$, chceme se něco dozvědět o $\mathbf{x}$

- existence, jednoznačnost, aproximace řešení (200 let)
- rychlost a přesnost výpočtu (60 let)
- metody pro speciální typy matic

- výběr vhodného řešení u poddefinovaných soustav (10 let)

**komprimované snímání (compressed sensing)**

## Co s poddefinovanými soustavami

soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s maticí typu $m \times n$ je hluboce poddefinovaná

posloupnost řádkových vektorů matice $A$ je lineárně nezávislá

co to říká o řešitelnosti soustavy ?

jak vypadá množina všech řešení ?

jaká je dimenze $Ker\ A$ ?

dá se nějak vybrat jedno speciální řešení ?

## Jak vybrat „nejmenší“ řešení soustavy lineárních rovnic

jednou z možností je vybrat řešení $\mathbf{x}$ s nejmenší eukleidovskou normou

musí být $\mathbf{x} \perp (Ker\, A) = (Im\, A^T)^\perp$

to znamená, že $\mathbf{x} \in (Ker\, A)^\perp = Im\, A^T$

neboli $\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$ pro nějaké $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

má-li být $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, musí platit $AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$

posloupnost řádkových vektorů matice $A$ je LN

proto je matice $AA^T$ regulární a $\mathbf{y} = (AA^T)^{-1}\mathbf{b}$

nejmenší řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je tedy $\mathbf{x} = A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{b}$

# Piktogram vývoje lineární algebry

## Reálný Hilbertův prostor $\ell_2$

tvoří jej posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel, které splňují podmínku

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

v prostoru $\ell_2$ je skalární součin definovaný předpisem

$$\langle\, (a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

jaká je dimenze $\ell_2$ ?

v prostoru uvažujeme posloupnosti $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$

množina posloupností $\{\mathbf{e}_i : i \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální v $\ell_2$

podprostor $\mathbf{W} = \langle\{\mathbf{e}_i : i \in \mathbb{N}\}\rangle$ se nerovná $\ell_2$

# Projekce na konečně generované podprostory $\mathbf{W}$

podprostory $\mathbf{W}_n = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ jsou konečně generované

posloupnost $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je ortonormální báze ve $\mathbf{W}_n$

čemu se rovná ortogonální projekce $\mathbf{w}_n$ nějakého prvku $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ na podprostor $\mathbf{W}_n$ ?

$$\mathbf{w}_n =$$

jaká je vzdálenost $\mathbf{a}$ od $\mathbf{w}_n$, tj. od $\mathbf{W}_n$ ?

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{w}_n\| =$$

čemu se rovná $\lim_{n\to\infty} \mathbf{w}_n$ ?

$\mathbf{W}$ je *hustý podprostor* $\ell_2$ a má spočetnou dimenzi

## Ortogonální projekce v prostoru spojitých funkcí

v prostoru reálných spojitých funkcí na $[0, 2\pi]$ je definován skalární součin

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} fg$$

následující nekonečná posloupnost funkcí z $C[0, 2\pi]$ je ortogonální

$$1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(nx), \cos(nx), \dots \dots$$

a tedy lineárně nezávislá

generuje podprostor $\mathbf{W} = \langle \{1, \sin(kx), \cos(kx) : k \in \mathbb{N}\} \rangle$

v nich uvažujeme podprostory
$\mathbf{W}_n = \langle \{1, \sin(kx), \cos(nx) : k = 1, 2, \dots, n\} \rangle$

## Fourierovy řady

zvolíme nějakou funkci $f(x) \in C[0, 2\pi]$ a spočteme její projekci $\mathbf{w}_n$ na $\mathbf{W}_n$

$$\mathbf{w}_n =$$

můžeme říct, že řada

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\right)\sin(kx) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\right)\cos(kx)$$

konverguje k $f(x)$ ?

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) si to dovolil

Henri Léon Lebesgue (1875-1941) to uvedl na pravou míru

# Kapitola 9

## Vlastní čísla a vlastní vektory

## Lineární dynamické systémy - obsah

- *Lineární dynamické systémy*
  Diskrétní
  Spojité

## Úroky

do banky si uložím 1000 Kč na 1% ročně

po roce budu mít

banka se plácne přes kapsu a připíše mi úroky dvakrát za rok

po půl roce budu mít

po roce budu mít

jiná mi je bude připisovat každý měsíc

po roce budu mít

když mi je bude připisovat každý den, budu po roce mít

## Spojité úročení

co když mi je bude připisovat spojitě ?

po roce budu mít

dynamické systémy se vyvíjejí v čase

jejich stavy popisujeme vektorem $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

kde $\mathbf{V}$ je nějaký lineární prostor nad obecným tělesem $\mathbf{T}$

vývoj systému v diskrétním čase popíšeme posloupností

$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ prvků prostoru $\mathbf{V}$ – *stavového prostoru*

## Diskrétní lineární dynamické systémy

*diskrétní lineární dynamický systém* je systém, který se vyvíjí tak, že

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k), \quad k \geq 0 \ ,$$

kde $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení

speciálně, pokud je $\mathbf{V} = \mathbf{T}^n$, můžeme vývoj systému popsat jako

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

kde $A$ je čtvercová matice řádu $n$ nad tělesem $\mathbf{T}$

prvek $\mathbf{x}_0$ se nazývá *počáteční stav* systému

pro stav $\mathbf{x}_{k+1}$ pak platí

## Příklad diskrétního dynamického systému

vývoj výše vkladu na úročeném účtu je dynamický systém

jeho stav $x_k$ v čase $k$ je výše vkladu v čase $k$

počáteční vklad $x_0$ je počáteční stav systému

vývoj systému je popsán rovnicí $x_{k+1} = (1 + p)x_k$

kde $p$ je úrok připsaný za jeden časový interval

## Fibonacciho posloupnost jako dynamický systém

**rekurentní posloupnost** je posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ čísel z tělesa $\mathbf{T}$

splňující podmínku $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ pro každé $k \geq 0$

stav posloupnosti v čase $k \in \mathbb{N}$ popíšeme dvojicí
$\mathbf{x}_k = (a_{k+1}, a_k)^T \in \mathbf{T}^2$

vývoj posloupnosti pak popíšeme vztahem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k$$

jde tedy opět o diskrétní lineární dynamický systém, tentokrát dimenze 2

Fibonacciho posloupnost má počáteční stav $\mathbf{x}_0 = (1, 0)^T$

## Vývoj diskrétního lineárního systému v dimenzi 1

předpovědět vývoj v dimenzi 1 je snadné

počáteční stav je nějaké číslo $x_0 \in \mathbf{T}$

vývoj systému je popsán maticí řádu 1, tj. číslem $a \in \mathbf{T}$

platí tedy $x_{k+1} = a\, x_k$ pro každé $k \geq 0$

stav $x_k$ systému v čase $k > 0$ je tedy

$$x_k = a^k x_0$$

## Spojitý dynamický systém

spojitý dynamický systém popisujeme jako funkci

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbf{V}$$

kde $\mathbf{V}$ je opět nějaký lineární prostor nad tělesem $\mathbf{T}$

$\mathbf{x}(t)$ je *stav systému* v čase $t \in \mathbb{R}$

je-li stavový prostor $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$

je stav v čase $t$ reálný vektor $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$

každá složka stavového vektoru je tedy

reálná funkce reálné proměnné

## Spojitý lineární dynamický systém

spojitý dynamický systém se nazývá lineární, pokud

$$\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$$

kde $A$ je reálná matice řádu $n$

$\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))^T$ je vektor derivací složek stavového vektoru $\mathbf{x}(t)$

často bývá také označován $\dot{\mathbf{x}}(t)$

## Rozpad radioaktivních jader 1

míra radioaktivity materiálu se měří *rozpadovou konstantou* $k \in [0, 1]$

$k$ udává pravděpodobnost, s jakou se jádro rozpadne během jedné sekundy

počet radioaktivních jader v čase $t$ si označíme $f(t)$

počet jader, které se rozpadnou během časového intervalu $(t, t + \epsilon)$ je přibližně $\epsilon\, k\, f(t)$

za krátký interval se počet radioaktivních jader změní na

$$f(t + \epsilon) \approx f(t) - \epsilon\, k\, f(t)$$

## Rozpad radioaktivních jader 2

což přepíšeme do tvaru

$$\frac{f(t+\epsilon)-f(t)}{\epsilon} \approx -k\,f(t)$$

vezmeme-li limitu pro $\epsilon \longrightarrow 0$, dostáváme rovnici

$$f'(t) = -k\,f(t)$$

vývoj počtu radioaktivních jader je tedy popsán

spojitým lineárním dynamickým systémem dimenze 1

# Kmity na pružině 1

na pružině s koeficientem pružnosti $k$

je zavěšené závaží o hmotnosti $m$

v rovnovážném stavu se pružina protáhne o $l$

v rovnovážném stavu se vyrovnává

síla pružiny

s gravitační silou

# Kmity na pružině 2

závaží posuneme z rovnovážného stavu o $x_1(0) = d$

polohu závaží v čase $t$ označíme $x_1(t)$

jeho rychlost v čase $t$ pak $x_2(t)$

stav systému v čase $t$ je $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$

čemu se rovná $\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$ ?

$x_1'(t) =$

$x_2'(t) =$

## Kmity na pružině 3

Newtonův zákon říká, že $F = a\,m$

$F$ je síla působící na závaží

$a$ je jeho zrychlení

$F =$

$$x_2'(t) = a = -\frac{k}{m}\,x_1(t)$$

kmity závaží na pružině jsou tedy popsány rovnicí

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}\,x_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

počáteční stav je $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0))^T$

## Vývoj spojitého lineárního systému v dimenzi 1

v dimenzi 1 je spojitý lineární systém popsán rovnicí

$$f'(t) = \lambda f(t)$$

s počáteční podmínkou $f(0) = s$

jedno řešení vidíme hned: $f(t) =$

je-li $g(t)$ další funkce, pro kterou je $g'(t) = \lambda g(t)$ a $g(0) = s$, je

$(g(t)e^{-\lambda t})' =$

## Poločas rozpadu radioaktivní látky

odvodili jsme, že počet $f(t)$ atomů radioaktivní látky v čase $t$ je popsán rovnicí

$$f'(t) = -k\,f(t)$$

kde $k > 0$ je rozpadová konstanta a $f(0) = s$ je počáteční podmínka

počet radioaktivních atomů v čase $t$ je tedy

$$f(t) = s\,e^{-kt}$$

v jakém čase $T$ jí bude polovina, tj. $s/2$ ?

musí platit

tj. $T =$

## Vlastní čísla a vlastní vektory - obsah

- *Vlastní čísla a vlastní vektory*
  Definice
  Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů
  Charakteristický polynom
  Diagonalizovatelnost

# Příklad

v dimenzi 1 umíme řešit jak diskrétní tak spojité lineární systémy

pro některé počáteční stavy $\mathbf{x}_0$ to je snadné i ve vyšší dimenzi

**příklad**: ve stavovém prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujeme diskrétní systém $\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k$ určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

zvolíme počáteční stav $\mathbf{x}_0 = (1,1)^T$; potom

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 =$$

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \qquad\qquad \mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} =$$

## Definice vlastních čísel a vlastních vektorů pro matice

diskrétní systém $\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k$ umíme vyřešit i pro libovolný počáteční vektor $\mathbf{x}_0 \in \langle (1,1)^T \rangle$; je-li $x_0 = s(1,1)^T$, je

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = A^k \left( s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

**definice**: je-li $A$ čtvercová matice řádu $n$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak skalár $\lambda \in \mathbf{T}$ nazýváme *vlastní číslo* matice $A$, pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in T^n$ takový, že

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

je-li $\lambda$ vlastní číslo matice $A$, pak libovolný vektor $\mathbf{x} \in T^n$, pro který platí $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, nazýváme *vlastní vektor* matice $A$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda$

## Definice vlastních čísel a vlastních vektorů lineárních operátorů

**definice**: je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak skalár $\lambda \in T$ nazýváme *vlastní číslo* operátoru $f$, pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in V$, pro který platí

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

je-li $\lambda$ vlastní číslo operátoru $f$, pak libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$, pro který platí $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, nazýváme *vlastní vektor* operátoru $f$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda$

**pozorování**: je-li $A$ matice řádu $n$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak

- $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo matice $A$ právě když je vlastním číslem operátoru $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$
- je-li $\lambda$ vlastní číslo matice $A$ (neboli operátoru $f_A$), pak $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ je vlastní vektor matice $A$ příslušný $\lambda$ právě když je vlastním vektorem operátoru $f_A$ příslušným $\lambda$

## Další pozorování

- 0 je vlastní číslo matice $A \in \mathbf{T}^{n\times n}$ právě když
- je-li 0 vlastní číslo matice $A \in \mathbf{T}^{n\times n}$, pak $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ je vlastní vektor $A$ příslušný 0 právě když
- 0 je vlastní číslo lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ právě když
- je-li 0 vlastní číslo operátoru $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, pak $\mathbf{x} \in V$ je vlastní vektor $f$ příslušný 0 právě když

## Další pozorování

- jednotková matice $I_n$ má vlastní čísla
- vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ je vlastní vektor matice $I_n$ právě když
- a co identický operátor $\mathrm{id}_V : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ ?
- na prostoru $C^\infty(\mathbb{R})$ všech spojitých reálných funkcí jedné reálné proměnné, které mají derivace všech řádů, je zobrazení $D(f) = f'$ lineární operátor

  $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo operátoru $D$ právě když

  funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je vlastní vektor operátoru $D$ příslušný $\lambda$ právě když

# Geometrický význam vlastních vektorů a čísel

nenulový prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ je vlastní vektor operátoru $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbf{T}$ právě když $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$

## Vlastní čísla a vektory geometrických zobrazení v $\mathbb{R}^2$

symetrie vzhledem k přímce

projekce na přímku

## Vlastní čísla a vektory geometrických zobrazení v $\mathbb{R}^2$

stejnolehlost s koeficientem $k$

rotace kolem počátku o úhel $\alpha$

## Vlastní čísla a vektory matice

začneme případem matice $A$ řádu $n$ nad $\mathbf{T}$

číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo matice $A$

právě když

což je právě když

vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ je vlastní vektor příslušný $\lambda$ právě když

## Příklad

najdeme vlastní čísla a vlastní vektory reálné matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

## Vývoj diskrétního lineárního systému s maticí $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

našli jsme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2$

k $\lambda_1 = 3$ je vlastní vektor např. $\mathbf{u}_1 = (1, 1)^T$

k $\lambda_2 = 2$ je vlastní vektor např. $\mathbf{u}_2 = (0, 1)^T$

posloupnost $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ je báze v $\mathbb{R}^2$

diskrétní dynamický systém $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ se vyvíjí následovně

je-li $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_1 = (1, 1)^T$, pak $\mathbf{x}_k =$

je-li $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_2 = (0, 1)^T$, pak $\mathbf{x}_k =$

je-li $\mathbf{x}_0 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2$, pak $\mathbf{x}_k =$

## Jak najít vlastní čísla matice

**tvrzení**: číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastním číslem matice $A$ řádu $n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ právě když

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

**příklad**: najdeme vlastní čísla reálné matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

vlastní čísla reálné matice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ jsou

jaká jsou vlastní čísla horní (dolní) trojúhelníkové matice $C$ ?

## Fibonacciho posloupnost naposledy

najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

## Co je to $\det(A - \lambda I_n)$ ?

**tvrzení**: pro čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu $n$ nad $\mathbf{T}$ je výraz $\det(A - \lambda I_n)$ polynom stupně $n$ s koeficienty v $\mathbf{T}$ a

1. koeficient u $\lambda^n$ se rovná $(-1)^n$
2. koeficient u $\lambda^{n-1}$ se rovná $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$
3. absolutní člen se rovná $\det A$

## Definice charakteristického polynomu matice

**definice**: pro čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu $n$ nad $\mathbf{T}$ polynom $\det(A - \lambda I_n)$ nazýváme *charakteristický polynom* matice $A$ a označujeme jej

**tvrzení**: vlastní čísla matice $A$ jsou právě kořeny charakteritického polynomu $p_A(\lambda)$ matice $A$

**příklad**: charakteristický polynom matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

## O kořenech polynomů

to bude v přednášce z obecné algebry ve druhém ročníku

**tvrzení**: pro každé těleso $\mathbf{T}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ má libovolný polynom stupně $n$ s koeficienty v $\mathbf{T}$ nejvýše $n$ různých kořenů, které leží v tělese $\mathbf{T}$

**důsledek**: každá matice $A$ řádu $n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ má nejvýše $n$ různých vlastních čísel v tělese $\mathbf{T}$

**tvrzení**: je-li $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polynom stupně $n$ s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$ a $t \in \mathbf{T}$ je kořen polynomu $p(x)$, pak existuje jednoznačně určené číslo $k \in \mathbb{N}$ a polynom $q(x)$ s koeficienty v $\mathbf{T}$, pro které platí

$$p(x) = (x - t)^k q(x)$$

a $t$ není kořenem polynomu $q(x)$

## Algebraická násobnost vlastního čísla matice

číslo $k$ z předchozího tvrzení se nazývá *násobnost* kořene $t$

**definice**: je-li $\lambda_1 \in \mathbf{T}$ vlastní číslo matice $A$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak *algebraickou násobností* vlastního čísla $\lambda_1$ rozumíme násobnost $\lambda_0$ coby kořene charakteristického polynomu $p_A(\lambda)$ matice $A$

**příklad**: matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ má dvě různá vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 3, 2$, každé s algebraickou násobností 1

matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ má jedno vlastní číslo $\lambda = 2$ a jeho algebraická násobnost je 2

## Kořeny polynomů s reálnými a komplexními koeficienty

**tvrzení**: každý polynom $p(x)$ stupně $n \geq 1$ s komplexními koeficinety má přesně $n$ komplexních kořenů, počítáme-li každý tolikrát, kolik je jeho násobnost

**důsledek**: každá komplexní matice řádu $n$ má přesně $n$ vlastních čísel, počítáme-li každé tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost

**důsledek**: každá reálná matice řádu $n$ má přesně $n$ **komplexních** vlastních čísel, počítáme-li každé tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost

**tvrzení**: každý polynom lichého stupně s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen

**důsledek**: každá reálná matice lichého řádu má aspoň jedno reálné vlastní číslo

## Jak najít vlastní čísla lineárních operátorů

**tvrzení**: je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ a $B$ báze ve $\mathbf{V}$, pak

1. $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo operátoru $f$ právě když je vlastním číslem matice $[f]_B^B$ operátoru $f$ vzhledem k bázím $B$ a $B$
2. je-li $\lambda$ vlastní číslo operátoru $f$, pak $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ je vlastní číslo operátoru $f$ příslušné vlastnímu číslu $\lambda$ právě když je $[\mathbf{x}]_B$ vlastní vektor matice $[f]_B^B$

**důkaz**:

## Nezávislost na bázi

je-li $C$ jiná báze prostoru $\mathbf{V}$, pak platí

$$[f]_C^C =$$

platí že $[\mathrm{id}]_B^C$ je regulární a $[\mathrm{id}]_C^B = \left([\mathrm{id}]_B^C\right)^{-1}$

**tvrzení**: pro každou čtvercovou matici $A$ a regulární matici $R$, obě řádu $n$ nad $\mathbf{T}$ platí $\det(A - \lambda I_n) = \det(R^{-1}AR - \lambda I_n)$

**důkaz**:

**definice**: *charakteristickým polynomem lineárního operátoru* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ rozumíme charakteristický polynom matice $[f]_B^B$ operátoru $f$ vzhledem k nějaké bázi $B$ prostoru $\mathbf{V}$

**důsledek**: charakteristický polynom operátoru $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ nezávisí na volbě báze prostoru $\mathbf{V}$ **označení**: $p_f(\lambda)$

## Důsledky

**definice**: algebraickou násobností vlastního čísla $\lambda$ lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ rozumíme násobnost $\lambda$ coby kořene charakteristického polynomu $p_f(\lambda)$ operátoru $f$

- každý operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n$ nad $\mathbf{T}$ má nejvýše $n$ vlastních čísel
- každý operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na komplexním prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n$ má přesně $n$ vlastních čísel, počítáme-li každé tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost
- každý operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na reálném prostoru $\mathbf{V}$ liché dimenze $n$ má aspoň jedno reálné vlastní číslo

## Příklad

najdeme vlastní čísla a vlastní vektory osové symetrie v $\mathbb{R}^2$ určené osou, který svírá s první souřadnou osou úhel $\alpha$

## Další příklad

najdeme vlastní čísla a jejich algebraické násobnosti pro lineární operátor $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definovaný předpisem

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ -3x - 2y + 3z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}$$

## Umocňování diagonální matice

diagonální matice umíme rychle umocňovat

stejně rychle umíme umocňovat matice tvaru $R^{-1}DR$, kde $D$ je diagonální

**definice**: dvě čtvercové matice $A, B$ téhož řádu $n$ nad $\mathbf{T}$ nazýváme *podobné*, pokud existuje regulární matice $R$, pro kterou platí
$A = R^{-1}BR$ **zapisujeme**: $A \sim B$

matici $A$ říkáme *diagonalizovatelná*, je-li podobná diagonální matici

## Co znamená diagonalizovatelnost ?

**poznámka**: relace podobnosti je ekvivalence na množině všech čtvercových matic téhož řádu $n$ nad $\mathbf{T}$

rovnost $R^{-1}AR = D$, kde $R = (\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2|\cdots|\mathbf{r}_n)$, přepíšeme do tvaru

**tvrzení**: matice $A$ řádu $n$ nad $\mathbf{T}$ je diagonalizovatelná právě když existuje v $\mathbf{T}^n$ báze složená z vlastních vektorů matice $A$

## Diagonalizovatelné operátory

**definice**: lineární operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ se nazývá *diagonalizovatelný* pokud ve $\mathbf{V}$ existuje báze složená z vlastních vektorů operátoru $\mathbf{f}$

**ekvivalentní podmínky s diagonalizovatelností operátorů**

1. lineární operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je diagonalizovatelný právě když existuje báze $B$ ve $\mathbf{V}$ taková, že $[f]_B^B$ je diagonální matice

2. lineární operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je diagonalizovatelný právě když pro jakoukoliv bázi $C$ ve $\mathbf{V}$ je matice $[f]_C^C$ diagonalizovatelná, tj. podobná diagonální matici

## Lineární nezávislost posloupnosti vlastních vektorů

**věta**: je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ a $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ posloupnost nenulových vlastních vektorů operátoru $f$ příslušných navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, pak je posloupnost $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá.

**důkaz**:

# Dokončení důkazu

## Důsledky

**důsledek**: má-li matice $A$ řádu $n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ celkem $n$ navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná

**důkaz**:

**důsledek**: má-li lineární operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ $n$ navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelný

## Příklad

spočítáme $A^n$ pro reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pro $n \in \mathbb{N}$

## Další příklad

spočítáme $A^n$ pro reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ pro $n \in \mathbb{N}$

# Předchozí příklad jinak

## Geometrická násobnost vlastního čísla

algebraická násobnost vlastního čísla $\lambda$ matice nebo operátoru je jeho násobnost coby kořene charakteristického polynomu příslušné matice nebo operátoru

každému vlastnímu číslu $\lambda$ matice $A$ můžeme přiřadit ještě jiné číslo – $\dim Ker\,(A - \lambda I_n)$ – tj. dimenzi prostoru vlastních vektorů příslušných $\lambda$

**definice**: *geometrickou násobností* vlastního čísla $\lambda$ operátoru $f$ na konečně generovaném prostoru (nebo čtvercové matice $A$) rozumíme dimenzi podprostoru $Ker\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_v)$ (nebo $Ker\,(A - \lambda I_n)$) vlastních vektorů operátoru $f$ (nebo matice $A$) příslušných vlastnímu číslu $\lambda$

## Tvrzení o determinantech

**tvrzení**: pro blokovou matici $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ platí

$$\det A =$$

**důkaz**:

## Geometrická násobnost $\leq$ algebraická násobnost

**věta**: pro každé vlastní číslo $\lambda$ lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ (čtvercové matice $A$) nad tělesem $\mathbf{T}$ platí, že geometrická násobnost $\lambda$ je menší nebo rovná algebraické násobnosti $\lambda$

**důkaz**:

## Charakterizace diagonalizovatelných operátorů a matic

**věta**: pro lineární operátor $f$ na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ dimenze $n$ je ekvivalentní

1. operátor $f$ je diagonalizovatelný
2. operátor $f$ splňuje následující dvě podmínky
    - součet algebraických násobností všech vlastních čísel $f$ se rovná $n$
    - algebraická násobnost každého vlastního čísla $\lambda$ operátoru $f$ se rovná jeho geometrické násobnosti

**důkaz**: $(1) \Rightarrow (2)$

# Důkaz 2

## Důkaz 3

$(2) \Rightarrow (1)$

# Důkaz 4

# Důkaz 5

## Příklad matice, která není diagonalizovatelná

ukážeme, že matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ není diagonalizovatelná

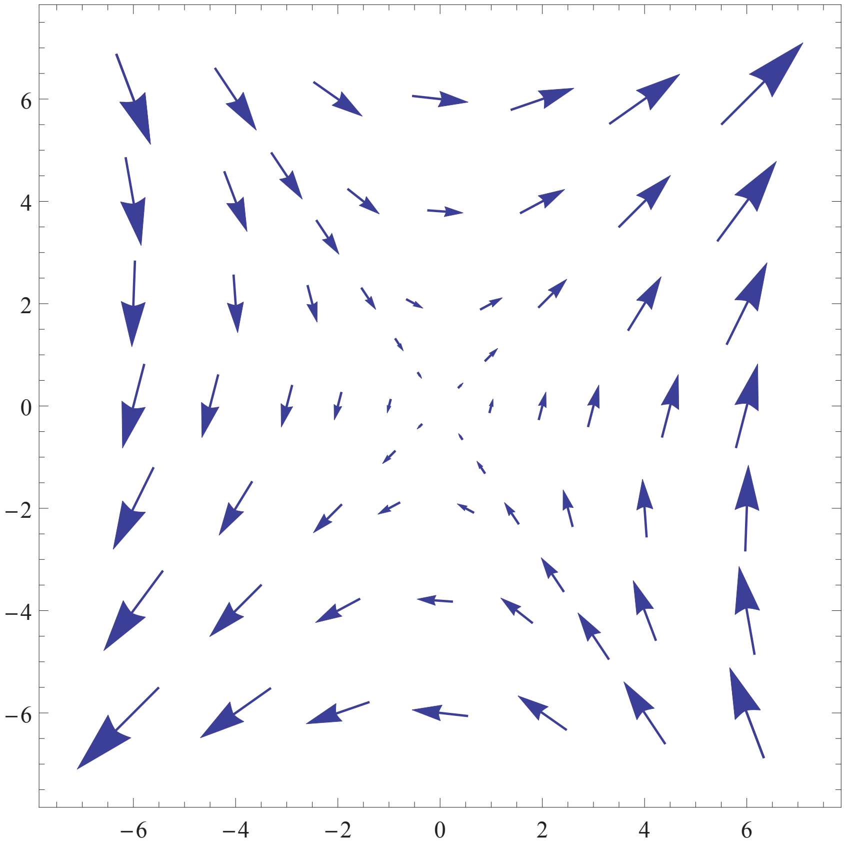
**příčiny nediagonalizovatelnosti**:

## Dynamické systémy nad $\mathbb{R}$ v dimenzi 2 - obsah

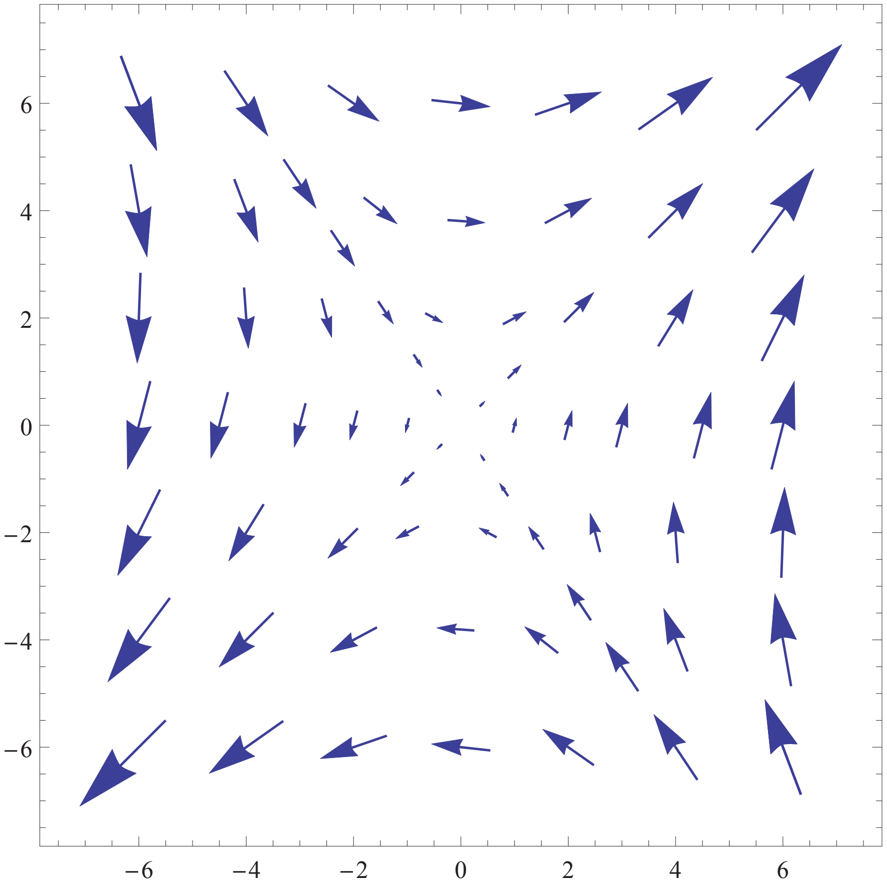
- *Dynamické systémy nad $\mathbb{R}$ v dimenzi 2*
  Diskrétní
  Spojité

# Diskrétní dynamické systémy v dimenzi 2

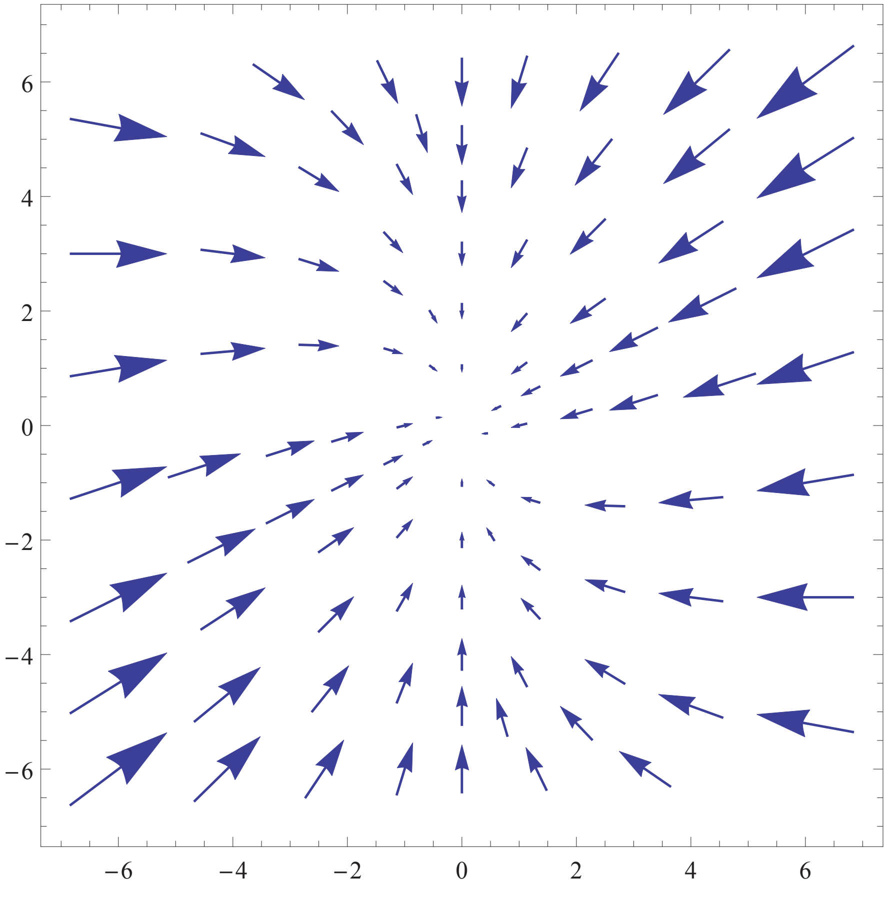
diskrétní lineární dynemický systém $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ dimenze 2 nad $\mathbb{R}$ si můžeme představit pomocí obrázku



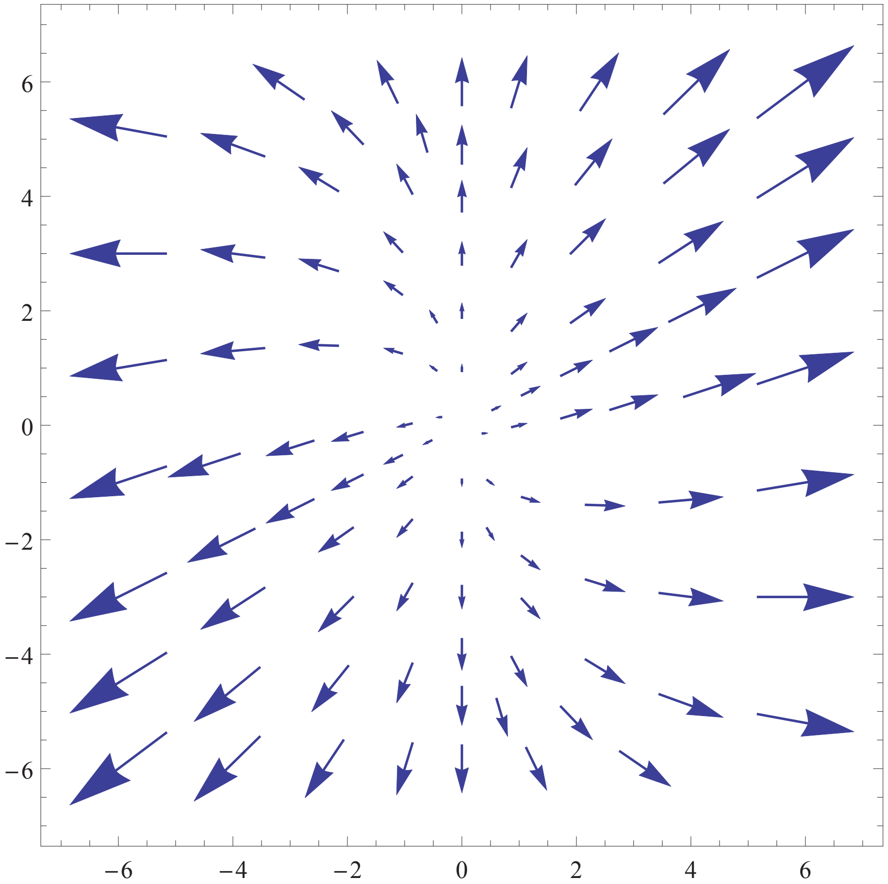
# Dvě reálná vlastní čísla $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$



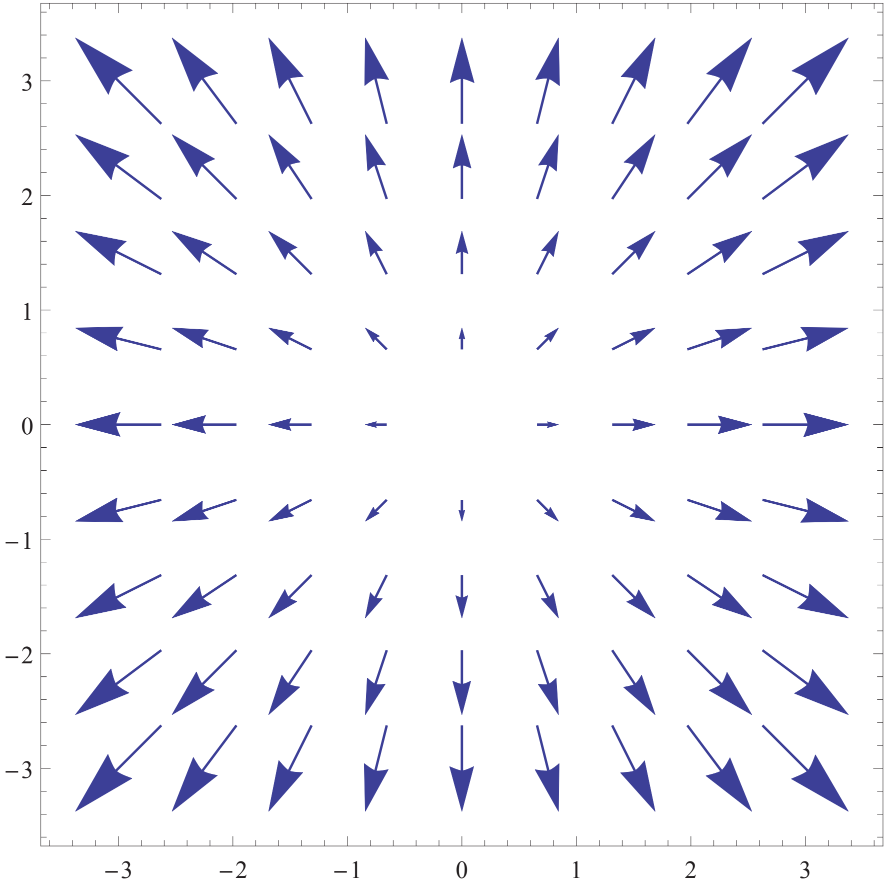
# Dvě reálná vlastní čísla $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$



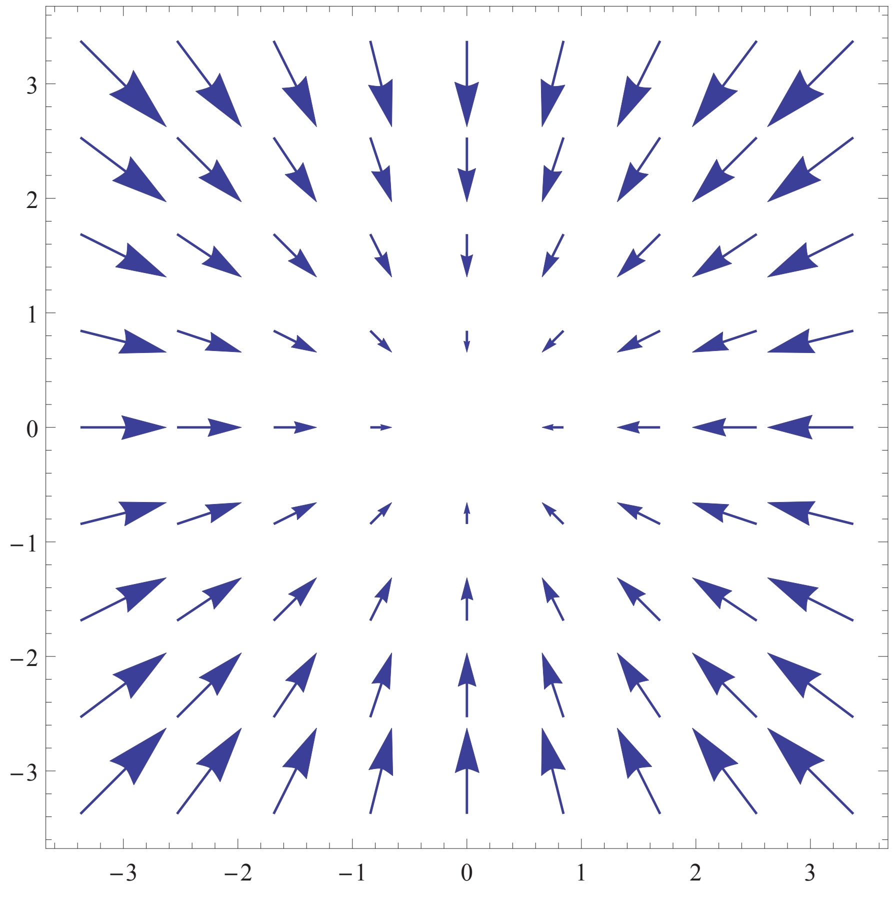
## Dvě reálná vlastní čísla $1 < \lambda_1 < \lambda_2$



# Digonalizovatelná matice s jedním vlastním číslem $\lambda > 1$



# Digonalizovatelná matice s jedním vlastním číslem $0 < \lambda < 1$



## Žádné reálné vlastní číslo

nemá-li matice $A$ žádné reálné vlastní číslo, má dvě různá (komplexně sdružená) vlastní čísla $\lambda$ a $\overline{\lambda}$

označíme $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ nenulový vlastní vektor matice $A$ příslušný $\lambda$

pro jakoukoliv matici $D = (d_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ označíme $\overline{D} = (\overline{d_{ij}})$

výpočet $A\overline{\mathbf{v}} = \overline{A}\,\overline{\mathbf{v}} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}$

znamená, že

v prostoru $\mathbb{C}^2$ máme bázi $C = (\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}})$ z vlastních vektorů matice $A$

matice $f_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ vzhledem k bázi $C$ je $[f_A]_C^C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$

## Reálná báze v $\mathbb{C}^2$

zvolíme $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} + \overline{\mathbf{v}} =$ a $\mathbf{w}_2 = i(\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}) =$

vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ jsou reálné a $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ je báze v $\mathbb{C}^2$ i v $\mathbb{R}^2$

spočteme matici $[f_A]_B^B = [\mathrm{id}]_B^C \, [f_A]_C^C \, [\mathrm{id}]_C^B = \left([\mathrm{id}]_C^B\right)^{-1} [f_A]_C^C \, [\mathrm{id}]_C^B$

platí $[\mathrm{id}]_C^B =$ a $\left([\mathrm{id}]_C^B\right)^{-1} =$

použijeme goniometrický tvar $\lambda = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ a spočítáme

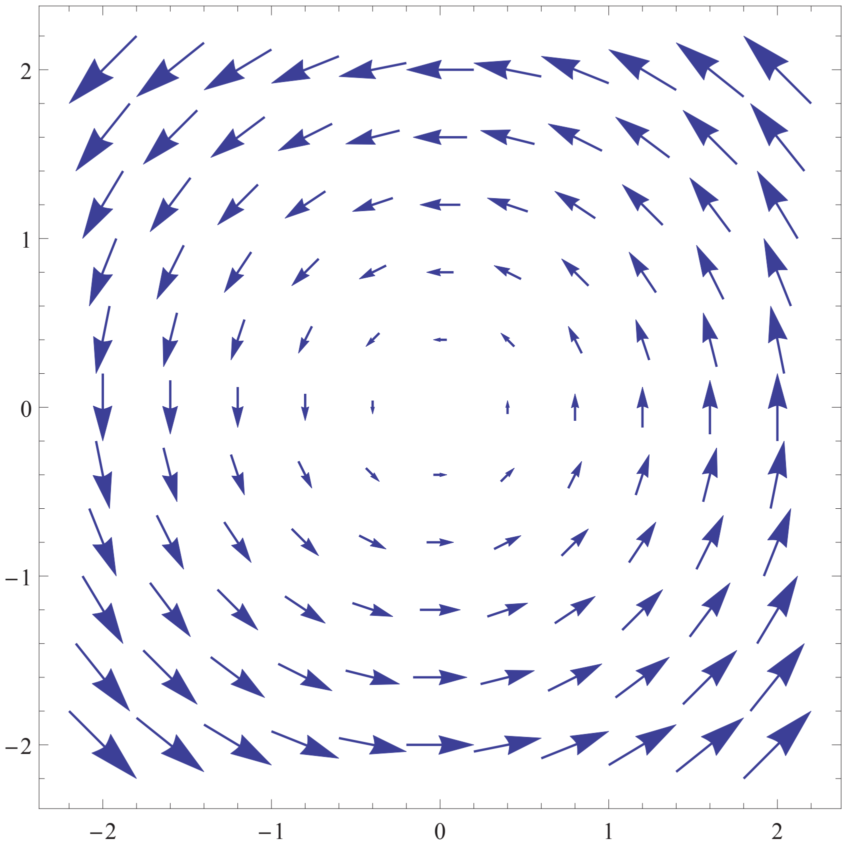
$[f_A]_B^B$

## Shrnutí

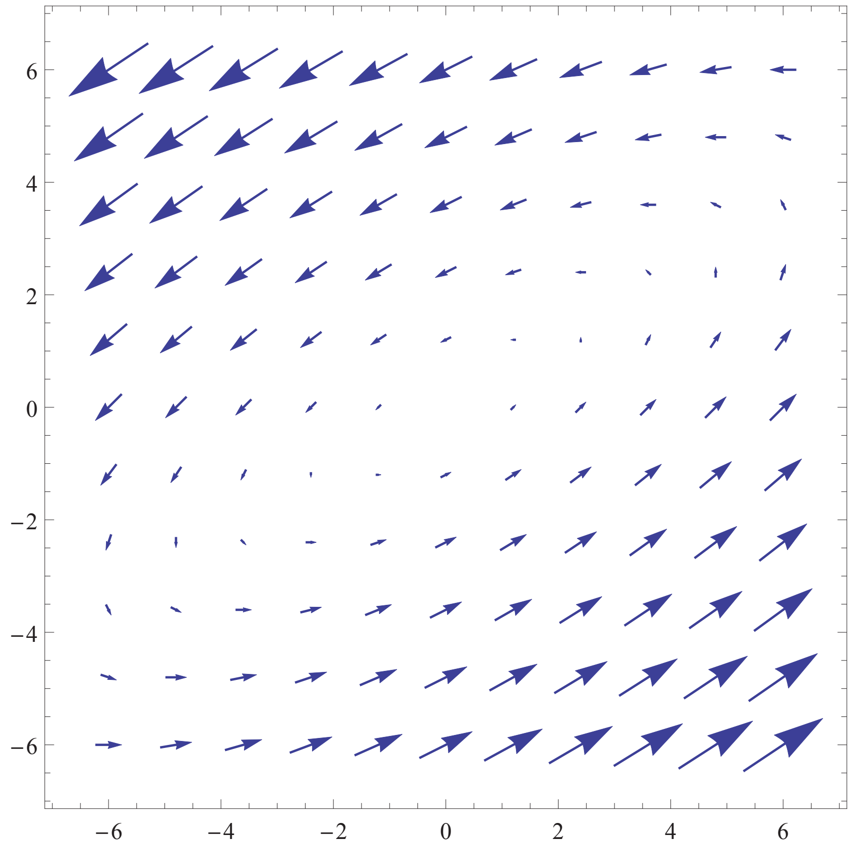
**tvrzení**: je-li $A$ reálná matice řádu 2, která nemá reálná vlastní čísla, a $\lambda = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ je komplexní vlastní číslo s nenulovým vlastním vektorem $\mathbf{v}$, pak platí

1. $\overline{\mathbf{v}}$ je vlastní vektor $A$ příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$
2. vektory $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} + \overline{\mathbf{v}}$ a $\mathbf{w}_2 = i(\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}})$ tvoří bázi $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ prostoru $\mathbb{R}^2$
3. lineární zobrazení $f_A$ určené maticí $A$ má vzhledem k bázi $B$ matici
$$[f_A]_B^B = r\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
a je tedy složením rotace o úhel $\alpha$ složenou se stejnolehlostí s koeficientem $r > 0$

## Případ $|\lambda| = 1$

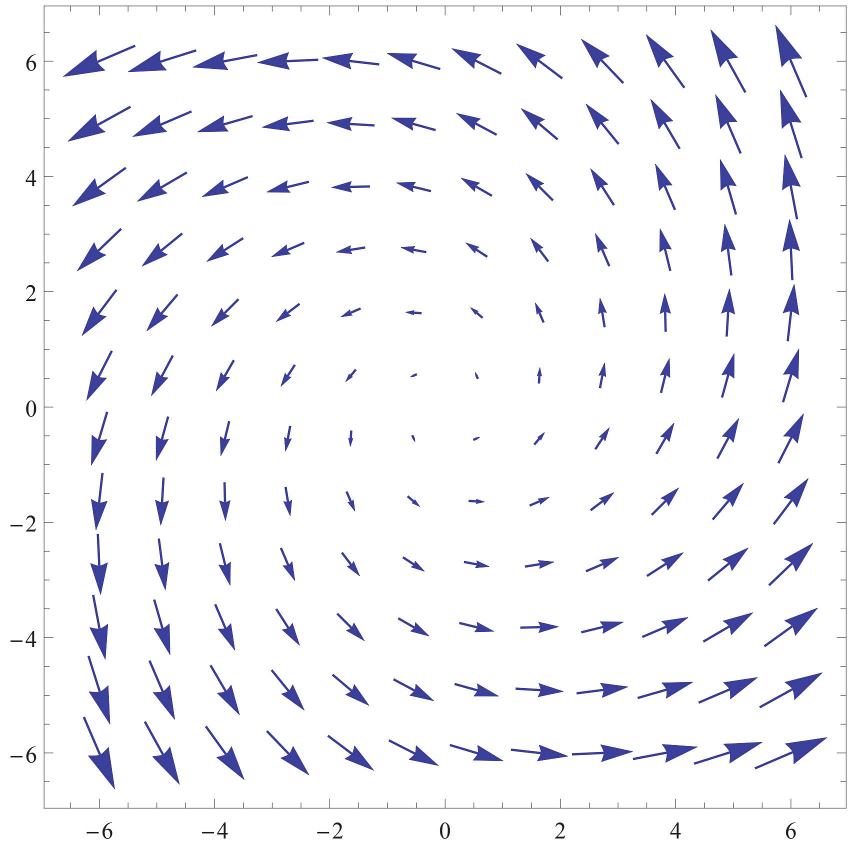



vzhledem k bázi $B$

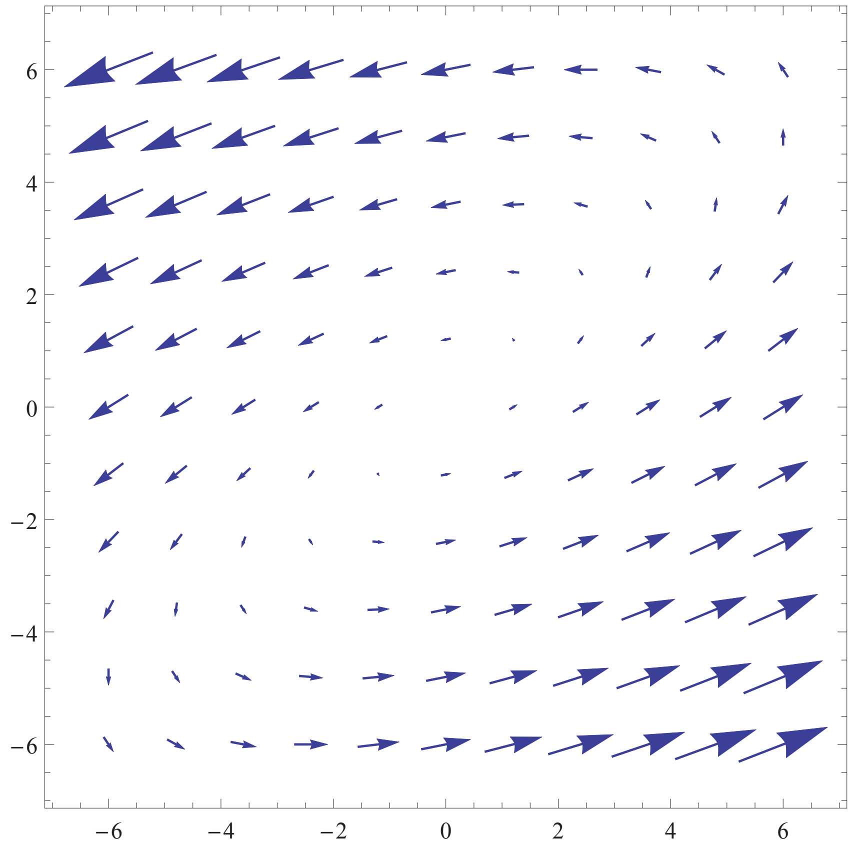



vzhledem ke kanonické bázi $K$

## Případ $|\lambda| > 1$

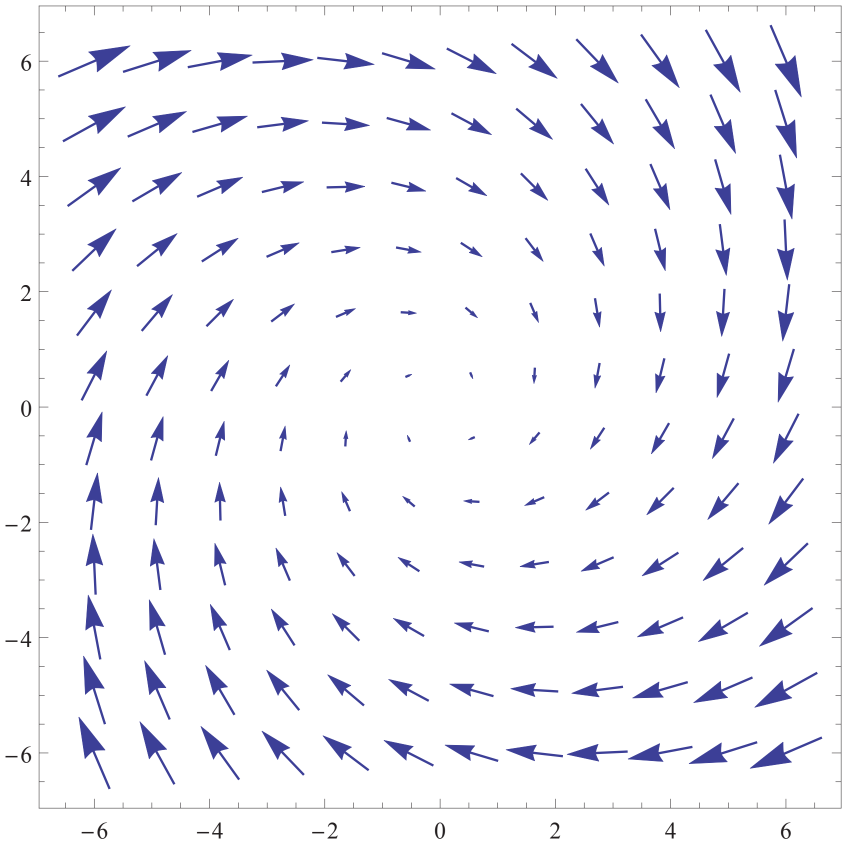



vzhledem k bázi $B$

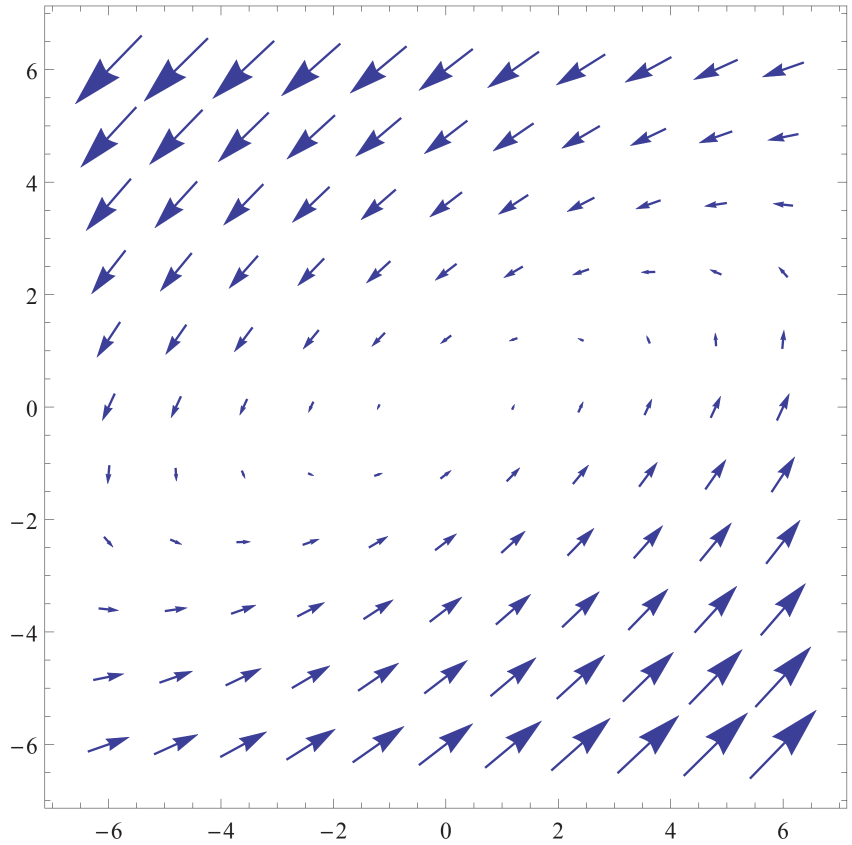



vzhledem ke kanonické bázi $K$

# Případ $|\lambda| < 1$




vzhledem k bázi $B$




vzhledem ke kanonické bázi $K$

## Co způsobí nenulový vlastní vektor u spojitého systému

budeme řešit reálný spojitý dynamický systém $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$ dimenze 2

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

s reálnou maticí $A$ řádu 2 a počátečním stavem $(x_1(0), x_2(0))^T$

předpokládáme, že $A$ má nenulové vlastní číslo $\lambda$ s vlastním vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \neq \mathbf{o}$

jak se bude systém vyvíjet, zvolíme-li počáteční stav $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}$ ?

## Jedno řešení

můžeme se tedy oprávněně domnívat, že stav systému $\mathbf{x}(t)$ se bude stále pohybovat po přímce $\langle \mathbf{u} \rangle$

a protože okamžitá rychlost změny stavu $\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t) = \lambda\,\mathbf{x}(t)$ je přímo úměrná stavu $\mathbf{x}(t) \in \langle \mathbf{u} \rangle$, dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,x_1(t) \\ \lambda\,x_2(t) \end{pmatrix}$$

s počátečním stavem $\mathbf{x}(0) = (u_1, u_2)^T$ a řešením

$$x_1(t) = u_1 e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = u_2 e^{\lambda t}$$

tj. $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} =$

## Když má $\mathbb{R}^2$ bázi složenou z vlastních vektorů $A$

jestliže ve $\mathbb{R}^2$ existuje báze $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ z vlastních vektorů $A$

je $\mathbf{o} \neq \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\mu$

zvolíme-li počáteční stav $\mathbf{y}(0) = (y_1(0), y_2(0))^T = (v_1, v_2)^T$

dostaneme řešení $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\mu t} \\ v_2 e^{\mu t} \end{pmatrix}$

pro obecný počáteční stav $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{y}$ pak dostaneme řešení

$$\mathbf{z}(t) = a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} a\, u_1 e^{\lambda t} \\ a\, u_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\, v_1 e^{\mu t} \\ b\, v_2 e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

koeficienty $a, b$ najdeme jako řešení soustavy $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{w}$

## Příklad

najdeme řešení systému $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, kde $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

s počátečním stavem $\mathbf{x}(0) = (1, 2)^T$

## Vlastní kmity pružiny - 1

ukázali jsme už, že pohyb závaží na pružině je spojitý systém

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

kde $x_1(t)$ je odchylka závaží od rovnovážného stavu a $x_2(t)$ je jeho rychlost, obojí v čase $t$

budeme předpokládat obecnou počáteční podmínku $(x_1(0), x_2(0))^T = (p, q)^T \in \mathbb{R}^2$

označíme $(k/m) = \omega^2$, kde $\omega > 0$

charakteristický polynom matice je $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, vlastní čísla jsou

čistě imaginární $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

## Vlastní kmity pružiny - 2

matice není diagonalizovatelná nad $\mathbb{R}$

máme soustavu
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -\omega^2 x_1(t) \end{aligned}$$

první rovnici zderivujeme a dosadíme do druhé, dostaneme

$$x_1''(t) = -\omega^2 x_1(t)$$

s počáteční podmínkou $(x_1(0), x_1'(0))^T = (p, q)^T$

**řešení ?**

# Vlastní kmity pružiny pomocí komplexních čísel

## Jordanův kanonický tvar - obsah

- *Jordanův kanonický tvar*
  Nediagonalizovatelné operátory v dimenzi 2
  Jordanovy buňky a Jordanův tvar
  Hledání Jordanova kanonického tvaru

## Nediagonalizovatelné operátory v dimenzi 2

$\mathbf{V}$ je lineární prostor dimenze 2 nad $\mathbf{T}$

$f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je lineární operátor s vlastním číslem $\lambda$

pokud není diagonalizovatelný, pak

ukážeme, že ve $\mathbf{V}$ existuje báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ taková, že

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

## Co to znamená ?

protože $[f]_B^B = ([f(\mathbf{u}_1)]_B \,|\, [f(\mathbf{u}_2)]_B)$, musí platit

$$[f(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [f(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

neboli

neboli

schematicky

$$\mathbf{u}_2 \xmapsto{f-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{u}_1 \xmapsto{f-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{o}$$

$\mathbf{u}_1$ je vlastní vektor $f$ příslušný $\lambda$ a $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$

## Lineární nezávislost prvků Jordanova řetízku

**tvrzení**: jsou-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}$ nenulové a $\lambda \in \mathbf{T}$ takové, že

$$\mathbf{u}_2 \xmapsto{f-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{u}_1 \xmapsto{f-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{o}$$

pak je posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ lineárně nezávislá

**důkaz**: platí-li $\qquad a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{o}$

použijeme na obě strany operátor $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$

## Jak Jordanův řetízek najdeme

předpokládáme, že $\lambda$ je jediné vlastní číslo operátoru $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$

jeho geometrická násobnost, tj. $\dim Ker\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 1$

podle věty o dimenzi jádra a obrazu je

$$\dim Im\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) =$$

zvolíme libovolný nenulový prvek $\mathbf{u}_1 \in Im\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$

## Jordanovy buňky

**definice**: *Jordanova buňka* nad tělesem **T** řádu $k \geq 1$ příslušná prvku $\lambda \in T$ je čtvercová matice

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

**příklad**: reálné Jordanovy buňky jsou např.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, (4)$$

## Mocniny Jordanových buněk $J_{0,k}$

**tvrzení**: pro libovolná přirozená čísla $m < k$ platí

$$J_{0,k}^{m} = (\underbrace{\mathbf{o}|\ldots|\mathbf{o}}_{m\times}|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_{k-m})$$

Pro $m \geq k$ je $J_{0,k}^{m} = 0$

**důkaz**:

## Příklady

$$(J_{0,4})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (J_{0,4})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{3,4} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\,I_4 + J_{0,4}$$

$$(J_{3,4})^2 = (3\,I_4 + J_{0,4})(3\,I_4 + J_{0,4}) =$$

## Binomická věta pro komutující matice

**tvrzení**: jestliže dvě matice $A, B$ řádu $n$ nad $\mathbf{T}$ komutují, tj. platí-li $AB = BA$, pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$(A+B)^m = A^m + \binom{m}{1} A^{m-1}B + \binom{m}{2} A^{m-2}B^2 + \cdots + B^m$$

**důkaz**: indukcí podle $m$

## Mocniny Jordanových buněk

**tvrzení**: pro každou Jordanovu buňku $J = J_{\lambda,k}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$(J_{\lambda,k})^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \dots & \binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1} \\ 0 & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \dots & \binom{m}{k-2}\lambda^{m-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^m \end{pmatrix}$$

**důkaz**: platí $J_{\lambda,k} = \lambda I_k + J_{0,k}$ a matice $\lambda I_k, J_{0,k}$ komutují

## Jordanův kanonický tvar

**definice**: matice $J$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je v *Jordanově kanonickém tvaru* (nebo stručněji v *Jordanově tvaru*), pokud je blokově diagonální matice, jejíž každý diagonální blok matice $J$ je Jordanova buňka (nějakého řádu s nějakým vlastním číslem), tj.

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2,k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s,k_s} \end{pmatrix} ,$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in T$ a $k_1, \dots, k_s$ jsou kladná celá částla

(nuly v matici v tomto případě značí nulové matice vhodných typů)

## Příklad

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{je matice v Jordanově kanonickém tvaru}$$

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s^m \end{pmatrix}$$

## Jordanův kanonický tvar pro operátory

**definice**: říkáme, že pro lineární operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ *existuje Jordanův kanonický tvar*, pokud má vzhledem k nějaké bázi matici v Jordanově kanonickém tvaru

kdy pro bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ platí $[f]_B^B = J_{\lambda,k}$ ?

$$[f(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ [f(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, [f(\mathbf{v}_k)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{v}_1) = \lambda \mathbf{v}_1, \ f(\mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1, \ f(\mathbf{v}_3) = \lambda \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2, \ldots$$

## Jordanův řetízek

poslední rovnosti můžeme přepsat jako

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}_1) = \mathbf{o}, (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1, (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2, \dots$$

a graficky znázornit

$$\mathbf{v}_k \xmapsto{f-\lambda\,\mathrm{id}_V} \mathbf{v}_{k-1} \xmapsto{f-\lambda\,\mathrm{id}_V} \cdots\cdots \xmapsto{f-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{v}_2 \xmapsto{f-\lambda\,\mathrm{id}_V} \mathbf{v}_1 \xmapsto{f-\lambda\,\mathrm{id}_V} \mathbf{o}$$

**definice**: je-li $f$ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\lambda$ vlastní číslo operátoru $f$, pak posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ vektorů z $\mathbf{V}$ nazýváme *Jordanův řetízek operátoru $f$ délky $k$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda$ s počátkem* $\mathbf{v}_1$, pokud platí

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}_1) = \mathbf{o}, (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1, (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2, \dots$$

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_{k-1}$$

## Spojení Jordanových řetízků

**tvrzení**: je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ a $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ je báze prostoru $\mathbf{V}$, pak $[f]_B^B = J_{\lambda,k}$ platí právě tehdy, když $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ je Jordanův řetízek příslušný vlastnímu číslu $\lambda$ operátoru $f$

jak vypadá báze $B$, pokud

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,k_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2,k_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{\lambda_s,k_s} \end{pmatrix}$$

## Jordanův kanonický tvar a spojení Jordanových řetízků

**tvrzení**: pro lineární operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ existuje Jordanův tvar právě tehdy, když existuje báze prostoru $\mathbf{V}$ vzniklá spojením Jordanových řetízků operátoru $f$

**tvrzení**: je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ a $C$ je báze prostoru $\mathbf{V}$, pak pro operátor $f$ existuje Jordanův tvar právě tehdy, když je matice $[f]_C^C$ podobná matici v Jordanově tvaru

# Nutná podmínka pro existenci Jordanova kanonického tvaru

co říká o charakteristickém polynomu operátoru $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ existence báze $B$ takové, že

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2,k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s,k_s} \end{pmatrix}$$

## Věta o Jordanově kanonickém tvaru

**věta**: je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n$ (nebo $A$ matice řádu $n$) nad tělesem $\mathbf{T}$, pak jsou následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. pro operátor $f$ existuje Jordanův kanonický tvar (nebo matice $A$ je podobná nějaké matici v Jordanově kanonickém tvaru)
2. operátor $f$ (nebo matice $A$) má $n$ vlastních čísel včetně algebraických násobností

**důsledek**: pro každý operátor $f$ na komplexním prostoru $\mathbf{V}$ konečné dimanze existuje Jordanův kanonický tvar

## Lineární nezávislost spojení Jordanových řetízků

**tvrzení**: předpokládáme, že $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je lineární operátor a $B_1, \ldots, B_s$ jsou Jordanovy řetízky operátoru $f$ příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, a dále předpokládejme, že pro každé $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ je posloupnost počátečních vektorů těch řetízků z $B_1, \ldots, B_s$, které přísluší vlastnímu číslu $\lambda$, lineárně nezávislá. Pak je spojení bází $B = B_1, \ldots, B_s$ lineárně nezávislá posloupnost

**důkaz**: indukcí podle celkového počtu $k$ prvků v řetízcích $B_1, \ldots, B_s$, $B_i$ přísluší vlastnímu číslu $\lambda_i$

různé řetízky mohou příslušet stejnému vlastnímu číslu $\lambda$

budeme předpokládat, že $B_1, \ldots, B_r$ jsou všechny odpovídající $\lambda_1$

## 1. pokračování důkazu

označení řetízků $B_i = (\mathbf{v}^i_1, \dots, \mathbf{v}^i_{k_i})$, $i = 1, 2, \dots, r$

použijeme operátor $f - \lambda_1 \mathrm{id}_V$

co udělá s řetízky $B_1, B_2, \dots, B_r$

## 2. pokračování důkazu

co udělá s řetízky $B_i$ pro $i > r$, kdy $\lambda_1 \neq \lambda_i$

## 3. pokračování důkazu

použijeme indukční předpoklad pro spojení řetízků

$B'_1, B'_2, \ldots, B'_r, B_{r+1}, \ldots, B_s$

dostaneme $a^i_{k_i} = a^i_{k_i-1} = \cdots = a^i_2 = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, r$

pro $i = r+1, r+2, \ldots, s$

## Dokončení důkazu

$$
\begin{aligned}
&a_1^1\mathbf{v}_1^1 + a_2^1\mathbf{v}_2^1 + \cdots + a_{k_1}^1\mathbf{v}_{k_1}^1 \\
&\vdots \\
+&a_1^r\mathbf{v}_1^r + a_2^r\mathbf{v}_2^r + \cdots + a_{k_r}^r\mathbf{v}_{k_r}^r \\
+&a_1^{r+1}\mathbf{v}_1^{r+1} + a_2^{r+1}\mathbf{v}_2^{r+1} + \cdots + a_{k_{r+1}}^{r+1}\mathbf{v}_{k_{r+1}}^{r+1} \\
&\vdots \\
+&a_1^s\mathbf{v}_1^s + a_2^s\mathbf{v}_2^s + \cdots + a_{k_s}^s\mathbf{v}_{k_s}^s = \mathbf{o}
\end{aligned}
$$

zbyde $a_1^1\mathbf{v}_1^1 + a_1^2\mathbf{v}_1^2 + \cdots + a_1^r\mathbf{v}_1^r = \mathbf{o}$

$(\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \ldots, \mathbf{v}_1^r)$ je LN posloupnost

proto také $a_1^1 = a_1^2 = \cdots = a_r^1 = 0$

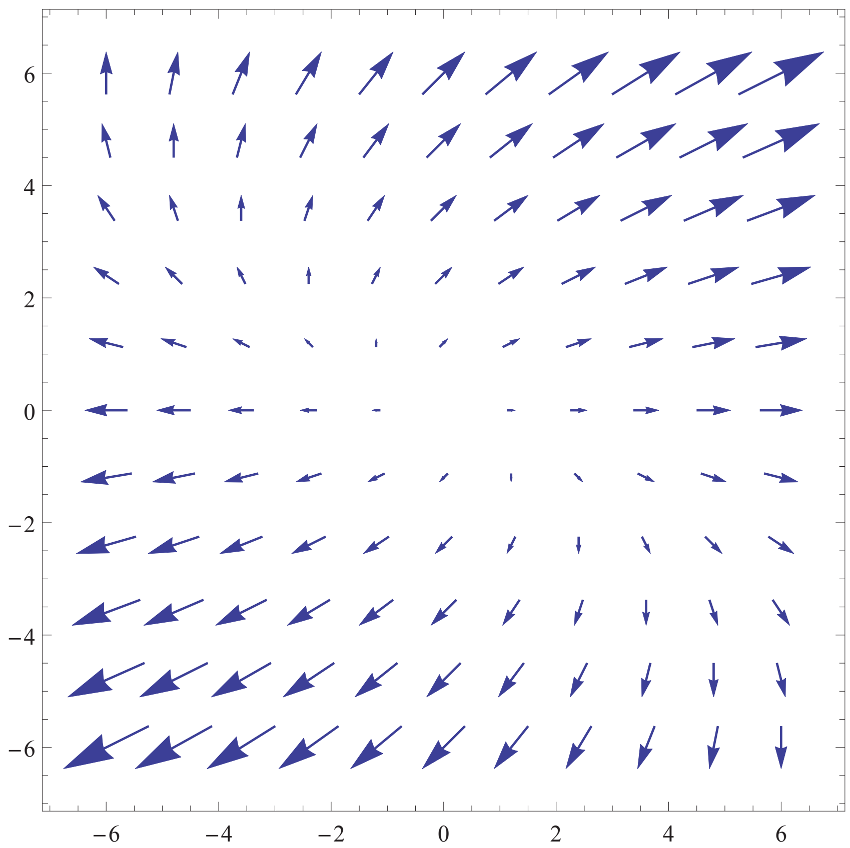
## Jordanův kanonický tvar v dimenzi 2

**příklad**: najdeme bázi složenou ze Jordanových řetízků pro $f_A$, kde

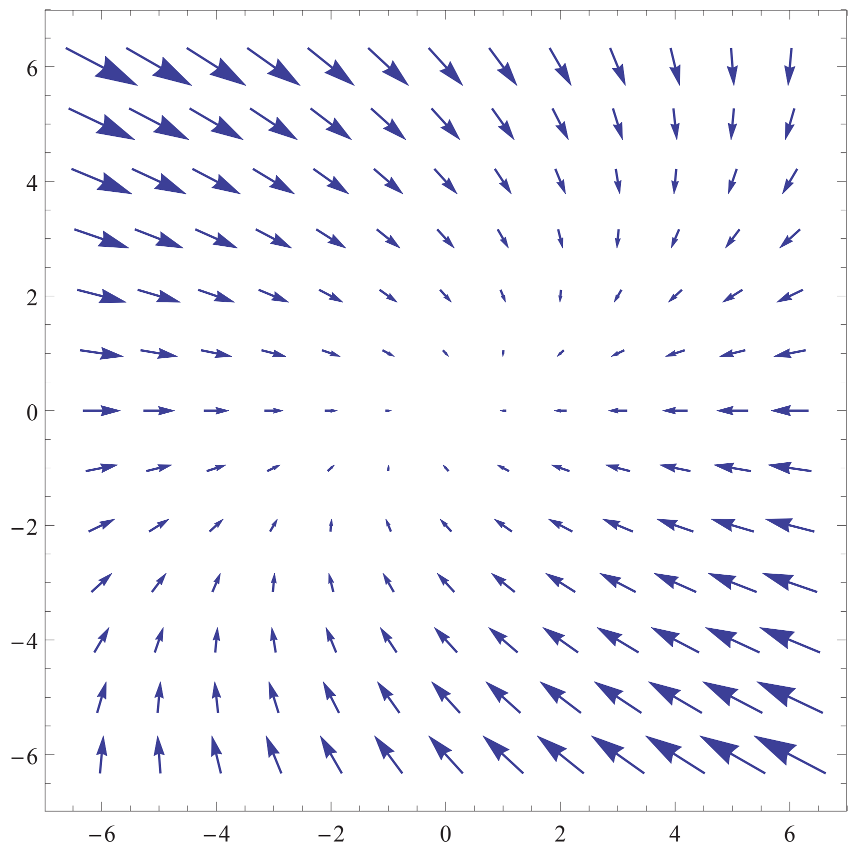
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

# Dokončení příkladu v dimenzi 2

# Nediagonalizovatelné operátory v $\mathbb{R}^2$




případ $1 < \lambda$




případ $0 < \lambda < 1$

## Jordanův tvar v dimenzi 3

součet algebraických násobností vlastních čísel $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je 3

není-li $f$ diagonalizovatelný, jsou možnosti

## Dvě různá vlastní čísla v dimenzi 3

**příklad**: zkoumáme $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

## Dokončení příkladu

## Jedno vlastní číslo s geometrickou násobností 2

**příklad**: zkoumáme $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

# Dokončení příkladu

## Jedno vlastní číslo s geometrickou násobností 1

**příklad**: zkoumáme $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

## Pokračování příkladu

## Dokončení příkladu

## Co plyne z existence Jordanova kanonického tvaru

**příklad**: předpokládáme, že operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na reálném prostoru dimenze 8, má bázi složenou z řetízků

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathbf{v}_1^1 & \xmapsto{f-7\,\mathrm{id}_V} & \mathbf{o} \\
 & & \mathbf{v}_2^2 & \xmapsto{f-7\,\mathrm{id}_V} & \mathbf{v}_1^2 & \xmapsto{f-7\,\mathrm{id}_V} & \mathbf{o} \\
\mathbf{v}_3^3 & \xmapsto{f-7\,\mathrm{id}_V} & \mathbf{v}_2^3 & \xmapsto{f-7\,\mathrm{id}_V} & \mathbf{v}_1^3 & \xmapsto{f-7\,\mathrm{id}_V} & \mathbf{o} \\
 & & \mathbf{v}_2^4 & \xmapsto{f-9\,\mathrm{id}_V} & \mathbf{v}_1^4 & \xmapsto{f-9\,\mathrm{id}_V} & \mathbf{o}
\end{array}
$$

## Matice operátoru $f$

vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_1^3, \mathbf{v}_2^3, \mathbf{v}_3^3, \mathbf{v}_1^4, \mathbf{v}_2^4)$ má $f$ matici

## Matice a jádro operátoru $f - 7\,\mathrm{id}_V$

geometrická násobnost vlastního čísla 7 se rovná

## Obor hodnot operátoru $f - 7\,\mathrm{id}_V$

obor hodnot operátoru $f - 7\,\mathrm{id}_V$ se rovná

## Matice a jádro operátoru $(f - 7\,\mathrm{id}_V)^2$

jádro $\mathit{Ker}\,(f - 7\,\mathrm{id}_V)^2 =$

počet řetízků příslušných $\lambda = 7$ se rovná

## Obor hodnot operátoru $(f - 7\,\mathrm{id}_V)^2$

obraz $Im\,(f - 7\,\mathrm{id}_V)^2 =$

## Jádro a obor hodnot operátorů $(f - 7\,\mathrm{id}_V)^3$ a $(f - 7\,\mathrm{id}_V)^4$

## Jordanův kanonický tvar v dimenzi 4

součet algebraických násobností vlastních čísel $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je 4

není-li $f$ diagonalizovatelný, jsou možnosti

## Jediné vlastní číslo s geometrickou násobností 2

**příklad**: zkoumáme $f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

charakteristický polynom $p_f(\lambda) = \lambda^4$

$M_0 = Ker\,(A - 0I_4) =$

geometrická násobnost vlastního čísla 0 je

## Jaké budou řetízky

pokračujeme výpočtem $\dim \mathit{Ker}\,(f_A - 0\,\mathrm{id})^2$

$\dim \mathit{Ker}\,(f_A - 0\,\mathrm{id})^2 = \dim \mathit{Ker}\, A^2 = \dim \mathit{Ker}$

řetízky tak budou

$$\mathbf{v}_2^1 \xmapsto{\quad f_A \quad} \mathbf{v}_1^1 \xmapsto{\quad f_A \quad} \mathbf{o}$$
$$\mathbf{v}_2^2 \xmapsto{\quad f_A \quad} \mathbf{v}_1^2 \xmapsto{\quad f_A \quad} \mathbf{o}$$

platí $\mathit{Ker}\,(f - 0\,\mathrm{id})^2 =$

## Dokončení příkladu

za vektory $\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2$ můžeme proto zvolit libovolnou bázi

$Ker\,(f - 0\,\mathrm{id}) = M_0$

## Jediné vlastní číslo s geometrickou násobností 2 podruhé

**příklad**: zkoumáme $f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

charakteristický polynom $p_f(\lambda) = (\lambda - 4)^4$

$M_4 = Ker\,(A - 4I_4) =$

geometrická násobnost vlastního čísla 0 je

## Jaké budou řetízky

pokračujeme výpočtem $\dim \mathit{Ker}\,(f_A - 4\,\mathrm{id})^2$

$\dim \mathit{Ker}\,(f_A - 4\,\mathrm{id})^2 = \dim \mathit{Ker}\,(A - 4I_4)^2 = \dim \mathit{Ker}$

dimenze se zvýšila o 1, bude pouze jeden řetízek délky aspoň 2

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbf{v}_1^1 & \xmapsto{f_A - 4\,\mathrm{id}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{v}_3^2 & \xmapsto{f_A - 4\,\mathrm{id}} & \mathbf{v}_2^2 & \xmapsto{f_A - 4\,\mathrm{id}} & \mathbf{v}_1^2 & \xmapsto{f_A - 4\,\mathrm{id}} & \mathbf{o} \end{array}$$

platí $\mathit{Im}\,(f - 4\,\mathrm{id})^2 =$ a $\mathit{Im}\,(f - 4\,\mathrm{id})^3 =$

## Nalezení počátků řetízků

# Dokončení příkladu

## Spojitý dynamický systém s nediagonalizovatelnou maticí

vyřešíme spojitý dynamický systém

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 3, x_2(0) = 4$

našli jsme Jordanův tvar pro operátor $f_A$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$A$ má jediné vlastní číslo $\lambda = -1$ s geometrickou násobností 1

našli jsme Jordanův řetízek $B = ((1,2)^T, (0,-1)^T)$

## Pokračování příkladu

napíšeme jej do sloupců matice $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, pak platí

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

neboli $A = RJR^{-1}$

dosadíme do $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ a dostaneme $\mathbf{x}'(t) = RJR^{-1}\mathbf{x}(t)$, tj.

$R^{-1}\mathbf{x}'(t) = JR^{-1}\mathbf{x}(t)$, což po dosazení znamená

## Dokončení příkladu

počáteční podmínku pro **y** dostaneme jako

$\mathbf{y}(0) = R^{-1}\mathbf{x}_0$, tj. $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} =$

druhá složka znamená $y_2'(t) = (-1)y_2(t)$, tj.

po dosazení dostaneme z prvního řádku

„uhádneme“ $y_1(t) = y_1(0)e^{-t} + y_2(0)te^{-t} =$

a dostaneme $\mathbf{x}(t) = R\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2te^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} =$

## Chemická reakce

tři chemikálie $E, F, G$ spolu reagují podle schématu

$$E \longrightarrow F \longrightarrow G$$

rychlost přeměny jedné látky v druhou je přímo úměrná koncentraci

vektor koncentrací v čase $t$ je $\mathbf{x}(t) = (x_E(t), x_F(t), x_G(t))^T$ a platí

$x'_E(t) =$

$x'_F(t) =$

$x'_G(t) =$

## Výpočet

najdeme Jordanův tvar $J$ pro $f_A$: $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Jordanovy řetízky zapíšeme do sloupců $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

rovnost $J = R^{-1}AR$ přepíšeme do tvaru $A = RJR^{-1}$ a řešíme

$\mathbf{x}'(t) = RJR^{-1}\mathbf{x}(t)$, neboli $R^{-1}\mathbf{x}'(t) = JR^{-1}\mathbf{x}(t)$, tj.

$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$ s poč. stavem $\mathbf{y}(0) = R^{-1}\mathbf{x}(0)$

## Výsledek

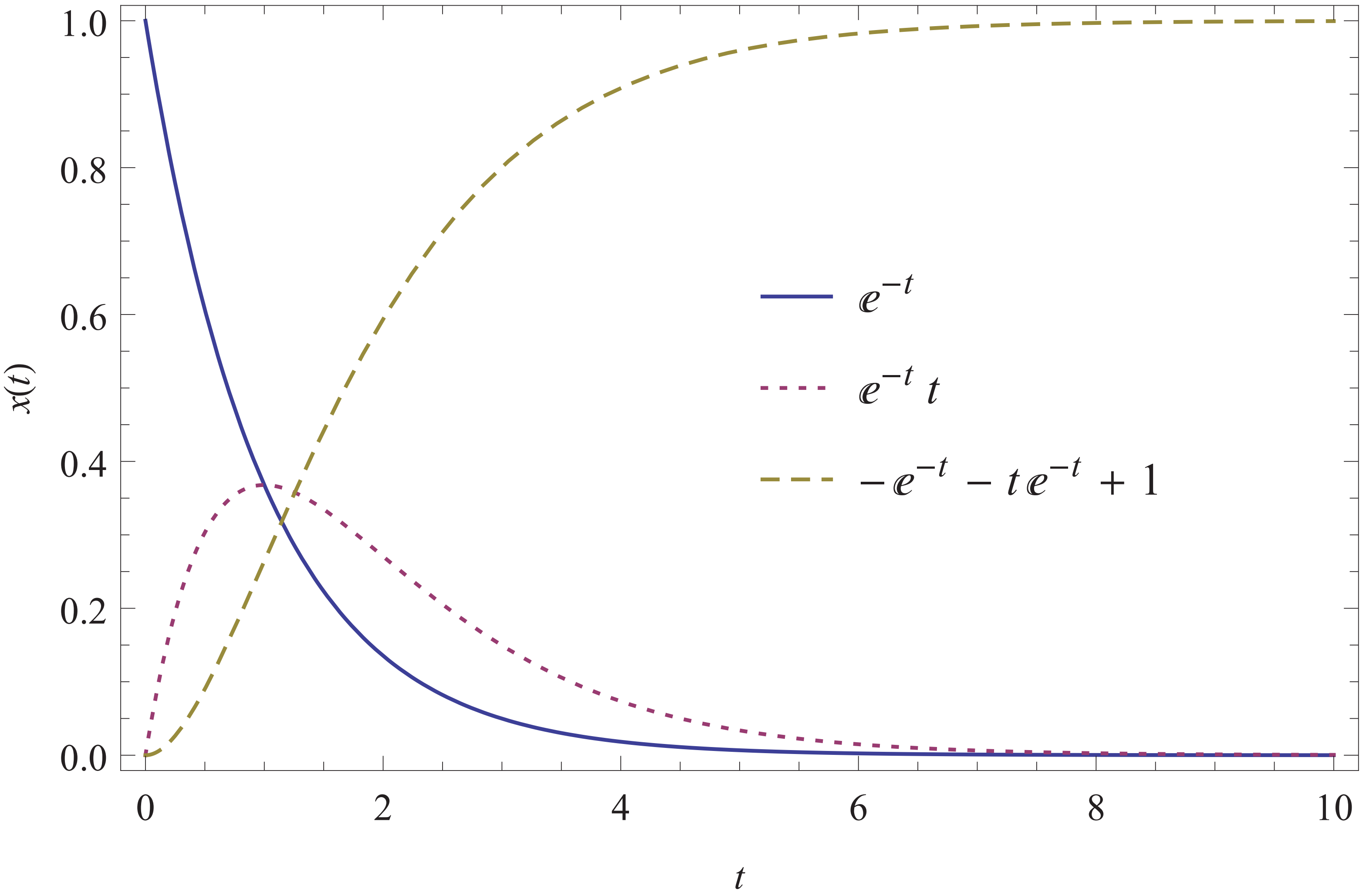
dostaneme

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0t} \end{pmatrix} \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0t} \end{pmatrix} R^{-1}\mathbf{x}(0)$$

a protože $\mathbf{x}(t) = R\mathbf{y}(t)$ a $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)^T$, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = R \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0t} \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \\ -e^{-t} - te^{-t} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Grafy průběhu koncentrací



## Cayleyho-Hamiltonova věta

je-li $A$ čtvercová matice řádu nad $\mathbf{T}$, pak posloupnost

$$I_n = A^0,\ A,\ A^2, \ldots, A^{n-1}, A^{n^2}$$

je

**Cayleyho-Hamiltonova věta**: pro čtvercovou matici $A$ řádu $n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ s charakteristickým polynomem

$$p_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n$$

platí

$$c_0A^0 + c_1A^1 + c_2A^2 + \cdots + c_{n-1}A^{n-1} + (-1)^nA^n = 0_{n\times n}$$

neboli $A^n$ je lineární kombinací matic $A^0, A^1, \ldots, A^{n-1}$

## Dosazování matice do polynomu

výraz $c_0A^0 + c_1A^1 + c_2A^2 + \cdots + c_{n-1}A^{n-1} + (-1)^nA^n = 0_{n\times n}$

můžeme chápat jako „dosazení“ matice $A$ do polynomu $p_A(\lambda)$

Cayleyho-Hamiltonovu větu pak můžeme zapsat stručně $p_A(A) = 0$

**pozorování**: jsou-li $p(t)$ a $q(t)$ dva polynomy s koeficienty v tělese **T** a $A$ čtvercová matice nad $T$, pak

$$(pq)(A) = p(A)q(A)$$

**důkaz**: přímý výpočet, vyžíváme toho, že libovolné dvě mocniny matice $A$ spolu komutují

## Příklady

**příklad 1**: máme reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

její charakteristický polynom je $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$

dosazením $A$ do tohoto polynomu získáme matici

$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2 =$

**příklad 2**: dosadíme matici $A$ do polynomů

$p(t) = t^2 - 5t - 1,\ \ q(t) = (t + 3),\ pq(t) = (t^2 - 5t - 1)(t + 3) =$

dostaneme postupně

## Důkaz Cayleyho-Hamiltonovy věty

budeme předpkládat, že matice $A$ má $n$ vlastních čísel včetně algebraických násobností

v případě reálné matice toho docílíme přechodem k tělesu $\mathbb{C}$

obecné těleso můžeme vždy rozšířit tak, aby to platilo

pak pro matici $A$ existuje Jordanův kanonický tvar $J$

tj. regulární matice $R$ taková, že $R^{-1}AR = J$

platí proto $p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$

tj. $p_A(A) = (-1)^n(A - \lambda_1 I_n)^{l_1}(A - \lambda_2 I_n)^{l_2} \cdots (A - \lambda_s I_s)^{l_s}$

# Dokončení důkazu Cayleyho-Hamiltonovy věty

pro každé $i = 1, 2, \ldots s$ platí

$(A - \lambda_i I_n)^{l_i} = (RJR^{-1} - \lambda_i R I_n R^{-1})^{l_i} = R(J - \lambda_i I_n)^{l_i} R^{-1}$

takže $p_A(A) = (J - \lambda_1 I_n)^{l_1} (J - \lambda_2 I_n)^{l_2} \ldots (J - \lambda_s I_n)^{l_s} R^{-1}$

součin blokově diagonálních matic se násobí se po blocích

každý blok v matici $J$ je $J_{\lambda_i,k}$ pro nějaké $\lambda_i$ a $k \leq l_i$

v matici $(J - \lambda_i I_n)^{l_i}$ pak mocníme blok $J_{0,k}$ a vyjde $J_{0,k}^{l_i} = 0$

proto je $(J - \lambda_1 I_n)^{l_1} (J - \lambda_2 I_n)^{l_2} \ldots (J - \lambda_s I_n)^{l_s} = 0_{n \times n}$

a tedy také $p_A(A) = 0_{n \times n}$

## Cayleyho-Hamiltonova věta v teorii řízení 1

máme diskrétní dynamický systém $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$

přidáme si k němu lineární joystick (nebo knipl), dostaneme

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k$$

$\mathbf{u}_k$ je *vstup* v čase $k$, matice $B$ popisuje joystick

**otázka**: do jakých stavů $\mathbf{x}_k$ můžeme systém „dořídit“ ?

stav $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 + B\mathbf{u}_0 = B\mathbf{u}_0 \in Im\,B$

stav $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 + B\mathbf{u}_1 = AB\mathbf{u}_0 + B\mathbf{u}_1 \in Im\,(AB|B)$

stav $\mathbf{x}_3 =$

## Cayleyho-Hamiltonova věta v teorii řízení 2

možné stavy v čase $n$ jsou

$$\mathbf{x}_n = A^{n-1}B\mathbf{u}_0 + A^{n-2}B\mathbf{u}_1 + \cdots + AB\mathbf{u}_{n-2} + B\mathbf{u}_{n-1}$$

tj. patří do $Im\,(A^{n-1}B|A^{n-2}B|\cdots|AB|B)$; v čase $n+1$ jsou

$$\mathbf{x}_{n+1} = A^nB\mathbf{u}_0 + A^{n-1}B\mathbf{u}_1 + \cdots + AB\mathbf{u}_{n-1} + B\mathbf{u}_n$$

tj. patří do $Im\,(A^nB|A^{n-1}B|\cdots|AB|B)$

## Poruchovost nákladného systému

manager chce pořídit drahý výrobní systém

výrobce mu sdělí parametry poruchovosti systému

systém má tři možné stavy

- 1 - funguje
- 2 - nefunguje
- 3 - je v opravě

na začátku je ve stavu 1, tj. funguje

$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 & 1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$ je *přechodová matice*

## Možné otázky

manager by rád věděl

- pokud systém přestane fungovat, jaká je průměrná doba nutná k tomu, aby opět začal fungovat ?
- jaký je celkový podíl času, kdy je systém funkční ?
- jaký je celkový podíl času, kdy je systém v opravě ?

protože vydržel na matfyzu aspoň rok, tak ví, co má dělat

vektor $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$ mu řekne pravděpodobnosti, se kterými bude systém v jednotlivých stavech v čase $k$

systém kupuje funkční, takže počáteční stav je $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T$

## Stochastické matice

přechodová matice $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 & 1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$ je *stochastická*

má nezáporné prvky a součet v každém sloupci je 1

má vlastní číslo 1

pro vlastní vektor $\mathbf{v}$ příslušný vlastnímu číslu 1 platí

$$A\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

říká se mu *stabilní stav*

jak ho najde ?

## Vlastní čísla matice $A$ a stabilní stav

charakteristický polynom matice $A$ je

$p_A(\lambda) - \lambda^3 + \lambda^2 - 0,02\lambda + 0,02$

má kořeny $\lambda_1 = 1$

k němu najde vlastní vektor, např $\mathbf{u} = (45, 5, 1)^T$

aby viděl pravděpodobnosti, vynásobí jej $1/51$

skoro nezajímavá jsou pro něj další dvě vlastní čísla

$\lambda_2 = i\sqrt{0{,}02} = \sqrt{0{,}02}\,(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$

$\lambda_3 = -i\sqrt{0{,}02} = \sqrt{0{,}02}\,(\cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2))$

## Základní vlastnosti stochastických matic

**věta**: pro jakoukoliv stochastickou matici $A$ platí

1. $|\lambda| \leq 1$ pro jakékoliv vlastní číslo $A$
2. algebraická násobnost vlastního čísla 1 je 1 a příslušné nenulové vlastní vektory mají všechny složky se stejným znaménkem
3. má-li pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ matice $A^k$ všechny prvky kladné, pak $|\lambda| < 1$ pro jakékoliv vlastní číslo $\lambda \neq 1$

pokud je $A^k$ kladná pro nějaké $k$, je 1 *dominantní vlastní číslo*

## Mocninná metoda

používá se k výpočtu vlastního vektoru příslušného k dominantnímu vlastnímu číslu $\lambda_1$

**věta**: je-li 1 dominantní vlastní číslo reálné matice $A$ řádu $n$, pak existuje vektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ takový, že posloupnost

$$\mathbf{x}_0, A\mathbf{x}_0, A^2\mathbf{x}_0 \ldots, A^k\mathbf{x}_0, \ldots$$

konverguje k nenulovému vlastnímu vektoru příslušnému vlastnímu číslu $\lambda = 1$

**důkaz**: k matici $A$ najdeme bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ (v $\mathbb{C}^n$)

složenou ze Jordanových řetízků matice $A$, vektor $\mathbf{v}_1$ přísluší $\lambda = 1$

dostaneme tak vyjádření $R^{-1}AR = J = \mathrm{diag}\,(1, J_2, \ldots, J_s)$,

kde $J_i$ pro $i \geq 2$ jsou Jordanovy buňky příslušné vlastním číslům $\lambda$, pro které platí $|\lambda| < 1$

## Dokončení důkazu

potom $[f_A]_B^B = J$ a

$$[f_A^k]_B^B = J^k = \mathrm{diag}\,(1, J_2^k, \ldots, J_s^k)$$

všechny buňky $J_i^k$ konvergují k nulové buňce pro $k \to \infty$

tj. $J^k$ konverguje k matici, která má jediný nenulový prvek 1 na místě $(1,1)$

vektory $[f_A^k(\mathbf{x}_0)]_B^B = [f_A^k]_B^B[\mathbf{x}_0]_B$ tak konvergují

k vektoru $J^k[\mathbf{x}_0]_B = a\mathbf{e}_1$,

kde $a$ je první složka vektoru $[\mathbf{x}_0]_B$

přechodem ke kanonické bázi dostaneme, že posloupnost $f_A^k(\mathbf{x}_0) = A^k\mathbf{x}_0$ konverguje k $a\mathbf{v}_1$

# Kapitola 10

## Ortogonální a unitární diagonalizovatelnost

# Kolmost vlastních vektorů - obsah

- *Kolmost vlastních vektorů*
  Definice unitární diagonalizovatelnosti

## Přednosti Jordanova kanonického tvaru

- pro každý operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na prostoru $\mathbf{V}$ konečné dimenze $n$ nad $\mathbb{C}$ existuje báze $B$ složená z Jordanových řetízků
- matice $J = [f]_B^B$ má Jordanův kanonický tvar
- umíme snadno spočítat libovolnou mocninu $J^k$
- známe proto také matici $[f^k]_B^B = J^k$ libovolné mocniny operátoru $f$ vzhledem k bázi $B$
- umíme proto popsat dlouhodobý vývoj diskrétních i spojitých dynamických systémů určených operátorem $f$

## Slabiny Jordanova kanonického tvaru

- výpočet Jordanova kanonického tvaru operátoru $f$ nebo matice $A$ není numericky stabilní
- drobná změna matice může způsobit ztrátu složité struktury Jordanových řetízků
- příčina je v tom, že vlastní vektory a zobecněné vlastní vektory mohou být „skoro“ rovnoběžné
- obraz jednotkové kružnice operátorem $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je buď bod, úsečka nebo elipsa se středem v počátku
- víme-li, že matice $[f]_B^B$ operátoru $f$ vzhledem k bázi $B$ je diagonální, není stále jednoduché poznat směr a délky poloos této elipsy
- pokud je ale $B$ ortonormální báze a $[f]_B^B$ má kladné prvky na hlavní diagonále, pak jsou to délky poloos a poloosy mají směr vektorů báze $B$

# Ortogonální a unitární diagonalizovatelnost

abychom mohli mluvit o délkách a úhlech mezi prvky prostoru **V**, musí na něm být definován skalární součin

proto v této kapitole budeme uvažovat pouze prostory nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, na kterých je definovaný skalární součin $\langle\, , \,\rangle$

**definice**: je-li **V** konečně generovaný lineární prostor nad $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) se skalárním součinem $\langle\, , \,\rangle$ a $f$ lineární operátor na **V**, pak říkáme, že $f$ je *unitárně diagonalizovatelný* (resp. *ortogonálně diagonalizovatelný*), pokud existuje ortonormální báze $B$ prostoru **V** taková, že matice $[f]^B_B$ je diagonální

matice $A$ řádu $n$ nad $\mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{R}$) se nazývá *unitárně (ortogonálně) diagonalizovatelná*, je-li unitárně (ortogonálně) diagonalizovatelný operátor $f_A$ na prostoru $\mathbb{C}^n$ (nebo $\mathbb{R}^n$) se standardním skalárním součinem

## Kdy je operátor unitárně diagonalizovatelný

**věta**: je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n$ se skalárním součinem $\langle\, , \rangle$ nad tělesem $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), pak jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní

1. operátor $f$ je unitárně (resp. ortogonálně) diagonalizovatelný
2. operátor $f$
    - má $n$ vlastních čísel včetně algebraických násobností
    - geometrická násobnost každého vlastního čísla operátoru $f$ je rovná jeho algebraické násobnosti
    - pro libovolná dvě různá vlastní čísla $\lambda_1$, $\lambda_2$ operátoru $f$ platí $M_{\lambda_1} \perp M_{\lambda_2}$

**důkaz**:

## Dokončení důkazu

## Co znamená ortogonální diagonalizovatelnost

je-li $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze v prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{R}$

pak pro $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí $\mathbf{v} =$

koeficienty $\langle\, \mathbf{v}_i, \mathbf{x}\,\rangle$ jsou Fourierovy koeficienty

prvek $\langle\, \mathbf{v}_i, \mathbf{x}\,\rangle\, \mathbf{v}_i$ je ortogonální projekce $\mathbf{x}$ do přímky $\langle \mathbf{v}_i \rangle$

má-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ diagonální matici $[f]_B^B = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

platí $f(\mathbf{x}) =$

$f(\mathbf{x})$ je lineární kombinací ortogonálních projekcí prvku $\mathbf{x}$ do navzájem kolmých směrů

## Lineární formy na prostoru se skalárním součinem

**připomenutí**: lineární forma na prostoru $\mathbf{V}$
nad $\mathbf{T}$ je lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{T}^1$

**věta**: pro každou lineární formu $f$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{R}$) se skalárním součinem $\langle\, , \,\rangle$ existuje právě jedno $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ takové, že pro každé $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí

$$f(\mathbf{y}) = \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,\rangle$$

**důkaz**:

## Geometrický význam matic $A^T$ a $A^*$

v prostorech $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ uvažujeme standardní skalární součin

pro každou matici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí

$$\langle\, \mathbf{x}, A\mathbf{y} \,\rangle = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}^T A)\mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \left\langle\, A^T\mathbf{x}, \mathbf{y} \,\right\rangle$$

pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ a každé $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

podobně pro komplexní matici $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ a prostory $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^m$

všimněme si, že $a_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot A\mathbf{e}_j$ pro každé $i, j$

## Normální matice a operátory - obsah

- *Normální matice a operátory*

  Vlastní čísla hermitovsky sdružené matice

  Vlastní vektory normálních matic

  Hermitovské matice

  Symetrické matice

  Pozitivně definitní matice

  Unitární (ortogonální) matice

  Ortogonální operátory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

## Vlastní čísla hermitovsky sdružené matice

v dalším budeme zkoumat vlastnosti hermitovsky sdružených matic

**tvrzení**: je-li $A$ komplexní (nebo reálná) matice řádu $n$, pak $\lambda \in \mathbb{C}$ (nebo $\lambda \in \mathbb{R}$) je vlastní číslo matice $A$ právě když $\bar{\lambda}$ je vlastní číslo matice $A^*$ (nebo $A^T$)

**důkaz**:

## Příklad

najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matic

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A^T = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## Definice normálních matic a operátorů

**definice**: komplexní (nebo reálná) čtvercová matice $A$ se nazývá *normální*, pokud $A^*A = AA^*$ (pro reálné matice můžeme psát $A^TA = AA^T$)

ukážeme, že v prostoru $\mathbb{C}^n$ (nebo $\mathbb{R}^n$) existuje ortonormální báze složená z vlastních vektorů matice $A$ právě když je $A$ normální

příkladem normálních matic jsou např.

nebo reálná matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Dvě jednoduché vlastnosti normálních matic

**tvrzení**: je-li $A$ normální komplexní (nebo reálná) matice a $\lambda \in \mathbb{C}$ (nebo $\lambda \in \mathbb{R}$), pak matice $A - \lambda I_n$ je také normální

**důkaz**:

**tvrzení**: je-li $A$ normální komplexní (nebo reálná) matice řádu $n$, pak pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ (nebo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$) platí

$$\|A\mathbf{v}\| = \|A^*\mathbf{v}\|$$

**důkaz**:

## Vlastní vektory normálních matic

**tvrzení**: je-li $A$ komplexní (nebo reálná) matice řádu $n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (nebo $\lambda \in \mathbb{R}$) a $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ (nebo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$), pak $\mathbf{v}$ je vlastní vektor matice $A$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda$ právě tehdy, když je $\mathbf{v}$ vlastní vektor matice $A^*$ příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$

**důkaz**:

## Spektrální věta pro normální matice

**věta**: je-li $A$ komplexní (nebo reálná) normální matice řádu $n$, pak jsou následující tvrzení ekvivalentní

1. matice $A$ je unitárně (ortogonálně) diagonalizovatelná
2. matice $A$ je normální

**důkaz**:

## Pokračování důkazu

## Dokončení důkazu

## Příklad

viděli jsme už, že $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je normální matice

její charakteristický polynom je

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

nad $\mathbb{R}$ není diagonalizovatelná

nad $\mathbb{C}$ je unitárně diagonalizovatelná podle předchozí věty

má tři vlastní čísla

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

# Dokončení příkladu

## Spektrální věta pro hermitovské matice

**věta**: pro čtvercovou matici $A$ nad $\mathbb{C}$ jsou následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. matice $A$ je unitárně diagonalizovatelná a všechna její vlastní čísla jsou reálná
2. matice $A$ je hermitovská

**důkaz**:

## Dokončení důkazu

## Spektrální věta pro symetrické matice

**věta**: pro reálnou čtvercovou matici $A$ jsou následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. matice $A$ je ortogonálně diagonalizovatelná a všechna její vlastní čísla jsou reálná
2. matice $A$ je symetrická

**důkaz**:

## Příklad

podíváme se na symetrickou matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Dokončení příkladu

## Pozitivně (semi)definitní matice

je-li $A$ hermitovská matice řádu $n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, pak

$$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} =$$

**definice**: komplexní (nebo reálná) matice $A$ řádu $n$ se nazývá

- *pozitivně definitní*, pokud je hermitovská (nebo symetrická) a platí $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} \geq 0$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ (nebo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$)
- *pozitivně semidefinitní*, pokud je hermitovská (nebo symetrická) a platí $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ (nebo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$)

## Spektrální věta pro pozitivně (semi)definitní matice

**věta**: pro hermitovskou (symetrickou) matici $A$ je ekvivalentní

1. $A$ je pozitivně definitní (nebo semidefinitní)
2. všechna vlastní čísla matice $A$ jsou kladná (nebo nezáporná)

**důkaz**:

## Příklady

podíváme se na reálné symetrické matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

## Jiná charakterizace pozitivně (semi)definitních matic

**tvrzení**: komplexní (nebo reálná) matice $A$ je pozitivně semidefinitní právě když $A = B^*B$ (nebo $A = B^TB$) pro nějakou komplexní (nebo reálnou) matici $B$

**důkaz**:

**důsledek**: komplexní (nebo reálná) matice $A$ je pozitivně definitní právě když $A = B^*B$ (nebo $A = B^TB$) pro nějakou regulární komplexní (nebo reálnou) matici $B$

## Spektrální věta pro unitární (ortogonální) matice

**definice**: komplexní (nebo reálná) čtvercová matice $A$ se nazývá *unitární* (nebo *ortogonální*) pokud $A^{-1} = A^*$ (nebo $A^{-1} = A^T$)

**věta**: pro čtvercovou komplexní matici $A$ jsou následující podmínky ekvivalentní

1. matice $A$ je unitárně diagonalizovatelná a pro každé vlastní číslo $\lambda$ matice $A$ platí $|\lambda| = 1$
2. matice $A$ je unitární

# Důkaz

## Unitární (ortogonální) operátory

**definice**: operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na komplexním (nebo reálném) prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\, , \rangle$ se nazývá unitární (ortogonální), pokud pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$$

## Charakterizace unitárních (ortogonálních) operátorů

**tvrzení**: pro lineární operátor $f$ na komplexním (reálném) lineárním prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\, , \rangle$ jsou následující podmínky ekvivalentní

1. $f$ je unitární (ortogonální)
2. $\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

má-li $\mathbf{V}$ navíc konečnou dimenzi, pak jsou předchozí podmínky ekvivalentní také s

3. matice $[f]^B_B$ vzhledem k ortonormální bázi $B$ ve $\mathbf{V}$ je unitární (nebo ortogonální)
4. $f$ zobrazuje každou ortonormální bázi ve $\mathbf{V}$ opět na ortonormální bázi ve $\mathbf{V}$
5. $f$ zobrazuje nějakou ortonormální bázi ve $\mathbf{V}$ opět na ortonormální bázi ve $\mathbf{V}$

## Ortogonální operátory na $\mathbb{R}^2$

$f$ je ortogonální operátor na $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem

matice $[f]_K^K$ vzhledem ke kanonické bázi je unitární

existuje ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ tak, že $[f]_B^B$

pro vlastní čísla $\lambda$ operátoru $f$ jsou možnosti

1. $\lambda = 1$ pro každé $\lambda$
2. $\lambda = -1$ pro každé $\lambda$
3. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$
4. vlastní čísla jsou různá a komplexně sdružená

## Případ komplexních vlastních čísel

# Shrnutí

**tvrzení**: každé ortogonální zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem je buď reflexe (tj. osová symetrie) nebo rotace

zobrazení je reflexe právě když $\det[f]_B^B = -1$ a je rotace právě když $\det[f]_B^B = 1$ pro jakoukoliv bázi $B$ v $\mathbb{R}^2$

**důsledek**:

- složení dvou reflexí v $\mathbb{R}^2$ je rotace
- složení rotace s reflexí je reflexe
- složení dvou rotací je rotace

## Ortogonální operátory na $\mathbb{R}^3$, všechna vlastní čísla reálná

$f$ je ortogonální operátor na $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem

matice $A = [f]_K^K$ vzhledem ke kanonické bázi je unitární

existuje ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ v $\mathbb{C}^3$ tak, že $[f]_B^B$ je diagonální matice

jsou-li všechna vlastní čísla operátoru $f$ reálná, můžeme zvolit bázi $B$ z vektorů v $\mathbb{R}^3$; pro matici $[f]_B^B$ jsou možnosti (až na pořadí $\pm 1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Ortogonální operátory na $\mathbb{R}^3$, dvě komplexní vlastní čísla

má-li matice $A = [f]_K^K$ pouze jedno reálné vlastní číslo $\pm 1$

jsou zbylá dvě vlastní čísla $e^{i\varphi}$ a $e^{-i\varphi}$ pro $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

existuje ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ v $\mathbb{C}^3$ složená z vlastních vektorů operátoru $f$

vlastní vektor $\mathbf{v}_1$ příslušný $\pm 1$ můžeme zvolit reálný

## Ortogonální operátory na $\mathbb{R}^3$, dokončení

pro matici $[f]^C_C$ tak máme dvě možnosti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

## Shrnutí

**tvrzení**: každé ortogonální zobrazení na $\mathbb{R}^3$ je buď

- 
- 
- 

**důsledek**: složení dvou rotací v $\mathbb{R}^3$ je zase rotace v $\mathbb{R}^3$, složení dvou reflexí je rotace (osa rotace je rovná průniku rovin reflexí)

**důkaz**:

## Singulární rozklad - obsah

## Obraz jednotkové kružnice diagonální maticí

**otázka**: čemu se rovná množina

$$\{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \|\mathbf{x}\| = 1\}, \quad \text{kde } A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \ ?$$

## Co znamená singulární rozklad

**otázka**: čemu se rovná množina $\{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \ \|\mathbf{x}\| = 1\}$, je-li

$$A = U \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2)\, V^T$$

pro nějaké reálné ortogonální matice $U, V$ řádu 2 a $\sigma_1 \neq 0 \neq \sigma_2$ ?

# Příklad

zkusíme najít ortogonální matice $U, V$ řádu 2 a diagonální matici $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$ tak, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U \,\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2) V^T$$

# Dokončení příkladu

# Vlastnosti matice $A^*A$

co umíme říct o matici $A^*A$, kde $A$ je typu $m \times n$ nad $\mathbb{C}$ ?

## Definice singulárních čísel

**definice**: je-li $A$ matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{C}$, pak kladné odmocniny z nenulových vlastních čísel matice $A^*A$ nazýváme *singulární čísla* matice $A$

**poznámky k definici**:

- singulární čísla matice $A$ obvykle značíme tak, aby platilo

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$$

  kde $r = rank(A)$
- matici $\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ řádu $r$ budeme označovat $\Sigma_r$
- symbolem $\Sigma$ pak označíme blokovou matici typu $m \times n$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  symboly 0 označují nulové matice vhodných typů

## Věta o singulárním rozkladu, geometrická varianta

**věta**: pro každou matici $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ hodnosti $r$ existují ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ v prostoru $\mathbb{C}^n$, $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ v prostoru $\mathbb{C}^m$, a reálná čísla

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$$

taková, že

$$[f_A]_C^B = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

neboli $f_A(\mathbf{v}_j) = A\mathbf{v}_j = \begin{cases} \sigma_j \mathbf{u}_j, & \text{pro } j = 1, 2, \dots, r \\ \mathbf{o}, & \text{pro } j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$

# Důkaz věty o singulárním rozkladu

# Dokončení důkazu

## Věta o singulárním rozkladu, algebraická varianta

**věta**: pro každou matici $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ hodnosti $r$ existují unitární matice $U$ řádu $m$, unitární matice $V$ řádu $n$, a reálná čísla

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$$

taková, že

$$A = U \Sigma V^*$$

kde $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \Sigma_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$

**důkaz**:

## Příklad

najdeme singulární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Dokončení příkladu

## Jiný příklad

najdeme singulární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Dokončení druhého příkladu

## Dyadická verze součinu matic a singulárního rozkladu

součin matic $A = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n)$ a $B = (b_{jk})$ lze zapsat

říká se tomu *dyadické vyjádření* součinu matic $AB$

singulární rozklad $A = U\Sigma V^*$ pak můžeme zapsat $(r = rank(A))$

## Polární rozklad matice

$A = U\,\Sigma\,V^*$ singulární rozklad čtvercové matice $A$

zapíšeme jej ve tvaru

$$A = (U\,\Sigma\,U^*)\,(UV^*)$$

co to znamená ?

## Spektrální norma

**otázka**: který nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ se zobrazením $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ „nejvíce natahuje" ?

tj. kdy je maximální podíl

$$\frac{\|f_A(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|A\,\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \left\| A\,\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = \left\| f_A\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \right\|$$

stačí se omezit na jednotkové vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$

označíme $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, platí $\|[\mathbf{x}]_B\| =$

pak $\|[f_A(\mathbf{x})]_C\| =$

## Obraz jednotkové sféry zobrazením $f_A$

číslo $\max\{\|A\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,\ \|\mathbf{x}\| = 1\}$ se nazývá *spektrální norma* matice $A$; **označení**: $\|A\|$

platí $\|A\,\mathbf{x}\| \leq \|A\|\,\|\mathbf{x}\|$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$

**tvrzení**: pro každou matici $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ a pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\frac{\|A\,\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \sigma_1$$

kde $\sigma_1$ je největší singulární hodnota matice $A$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $\mathbf{x}$ je vlastní vektor matice $A^*A$ příslušný vlastnímu číslu $\sigma_1^2$

## Numerická stabilita řešení soustavy lineárních rovnic

podobně platí $$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \sigma_r$$

kde $\sigma_r$ je nejmenší sigulární hodnota $A$

řešíme reálnou nebo komplexní soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

s regulární maticí $A$, řešením je $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

v důsledku nepřesnosti měření pravé strany nebo zaokrouhlovacích chyb známe soustavu s nějakým neznámým chybovým vektorem $\delta\mathbf{b}$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

## Chyba ve výsledku

výsledkem tedy nebude řešení $\mathbf{x}$ původní soustavy, ale nějaký vektor $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$, kde $\delta\mathbf{x}$ označuje chybu řešení; platí

$$\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}), \quad \text{tj.} \quad \delta\mathbf{x} = A^{-1}\delta\mathbf{b}$$

pro normu chyby řešení platí $\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta\mathbf{b}\|$

naším cílem je minimalizovat chybu $\delta\mathbf{x}$

je-li $A = U\,\Sigma\,V^*$ singulární rozklad matice $A$, pak

a rovnost $\|\delta\mathbf{x}\| = \sigma_n^{-1}\|\delta\mathbf{b}\|$ může nastat

## Číslo podmíněnosti matice

je-li nejmenší singulární číslo $\delta_n$ matice $A$ hodně malé, výpočet pomocí $A^{-1}$ bude numericky nestabilní

zajímá nás hlavně relativní chyba výsledku, tj. poměr $\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$

protože $\|\mathbf{b}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\,\|\mathbf{x}\|$, platí

číslo $\|A\|\,\|A^{-1}\| = \sigma_1/\sigma_n$ se nazývá *číslo podmíněnosti* matice $A$

## Pseudoinverze

je-li $A = U\Sigma V^*$ singulární rozklad matice $A$ s hodností $r$

je $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde $\Sigma_r$ je regulární matice

označíme $\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

matice $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*$ se nazývá *pseudoinverze* matice $A$

je-li $A$ regulární, platí $A^\dagger = A^{-1}$

# Kapitola 11

## Bilineární a kvadratické formy

# Motivace - obsah

- *Motivace*
  Aproximace funkcí
  Časoprostor

## Funkce jedné proměnné

Taylorův rozvoj funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

## Funkce dvou proměnných

Taylorův rozvoj funkce $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

## Minkowského geometrie časoprostoru

ve speciální teorii relativity se pracuje s *událostmi*

událost je prvek $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

*vzdálenost* mezi událostmi $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ a $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ je

vzdálenost události $(x, y, z, t)$ od počátku $(0, 0, 0, 0)$ je

norma v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$

norma v časoprostoru $\mathbb{R}^4$

## Bilineární formy - obsah

- *Bilineární formy*
  Definice
  Kvadratická forma
  Matice bilineární formy

# Definice

skalární součin je nástroj, jak měřit vzdálenosti a úhly v lineárních prostorech nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

bilineární forma je nástroj, jak zkoumat kvadratické formy v lineárních prostorech na libovolným tělesem **T**

**definice**: je-li **V** vektorový prostor nad tělesem **T**, pak *bilineární forma* na prostoru **V** je zobrazení $f : V \times V \to T$, které je lineární v obou složkách, tj. pro libovolné $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$, $t \in T$ platí

(1) $f(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{v},\mathbf{w})$,
$f(\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{w},\mathbf{u}) + f(\mathbf{w},\mathbf{v})$ a

(2) $f(t\mathbf{v},\mathbf{w}) = t(\mathbf{v},\mathbf{w})$, $f(\mathbf{v},t\mathbf{w}) = tf(\mathbf{v},\mathbf{w})$

## Příklady

**příklad**:

**příklad**: skalární součin na reálném prostoru $\mathbf{V}$

**příklad**: skalární součin na komplexním prostoru $\mathbf{V}$

# Kvadratická forma

**příklad**: determinant matice $A = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2)$ je

determinant matice vyšího řádu je *multilineární forma*

**definice**: je-li $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak zobrazení $f_2 : V \to T$ definované předpisem

$$f_2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \text{pro každé } \mathbf{v} \in V$$

nazýváme *kvadratická forma* vytvořená bilineární formou $f$

také říkáme, že $f_2$ je kvadratická forma příslušná bilineární formě $f$

# Příklady

**příklad**: bilineární forma

vytváří kvadratickou formu

**příklad**: euklidovská norma na $\mathbb{R}^n$ je vytvořená

**příklad**: obecně skalární součin $\langle\,,\,\rangle$ na reálném lineárním prostoru $\mathbf{V}$ vytváří kvadratickou formu

# Matice bilineární formy

**pozorování**: je-li $A$ čtvercová matice řádu $n$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak zobrazení $f : \mathbf{T}^n \times \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}$ definované předpisem

je bilineární forma na $\mathbf{T}^n$

**!!! jde o zcela nový význam pojmu matice !!!**

**definice**: je-li $f : V \times V \to \mathbf{T}$ bilineární forma na lineárním prostoru $\mathbf{V}$ konečné dimenze $n$, pak maticí bilineární formy $f$

## Analytické vyjádření bilineární formy

**příklad**: je-li $\langle\ ,\ \rangle$ skalární součin na reálném prostoru $\mathbf{V}$ a $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ báze prostoru $\mathbf{V}$, pak matice bilineární formy $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y}\, \rangle$ vzhledem k $B$ je

**pozorování**: je-li $f$ bilineární forma $\mathbf{V}$ a $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ;\mathbf{v}_n)$ báze ve $\mathbf{V}$, pak pro libovolné prvky $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$

*analytické vyjádření bilineární formy vzhledem k bázi $B$*

## Každá bilineární forma je určená nějakou maticí

**tvrzení**: je-li $\mathbf{V}$ konečně generovaný prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jeho báze, a $A$ čtvercová matice nad $\mathbf{T}$ řádu $n$, pak zobrazení $f : V \times V \to T$ definované vztahem

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ([\mathbf{x}]_B)^T A\, [\mathbf{y}]_B \qquad \text{pro každé } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

je bilineární forma na $\mathbf{V}$ a platí $[f]_B = A$

**důkaz**:

## Změna báze - příklad

zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$

jeho matice vzhledem ke kanonické bázi $K$ je

zvolíme jinou bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

pak $[f]_B =$

## Známe-li souřadnice vzhledem k bázi $B$

je-li

$$[\mathbf{x}]_B = [(x_1, x_2)^T]_B = (x_1', x_2')^T, \quad [\mathbf{y}]_B = [(y_1, y_2)^T]_B = (y_1', y_2')^T$$

pak $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$

pomocí matice přechodu od $B$ ke $K$:

## Změna báze obecně

**tvrzení**: je-li $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru **V**, jsou-li $B$ a $C$ báze **V**, a je-li $X = [\mathrm{id}]^C_B$ matice přechodu od $C$ k $B$, pak

$$[f]_C = X^T [f]_B \, X = \left([\mathrm{id}]^C_B\right)^T [f]_B \, [\mathrm{id}]^C_B$$

**důkaz**:

## Symetrické a antisymetrické bilineární formy - obsah

- *Symetrické a antisymetrické bilineární formy*
  Definice
  Rozklad bilineární formy

## Příklad

různé bilineární formy mohou vytvořit stejnou kvadratickou formu

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_1$$

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 4x_2y_1$$

vytvářejí stejnou kvadratickou formu

$$f_2((x_1, x_2)^T) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 = g_2((x_1, x_2)^T)$$

platí-li v tělese $\mathbf{T}$, že $1 + 1 \neq 0$, tj. je-li charakteristika $\mathbf{T}$ různá od 2, lze každou kvadratickou formu vytvořit jednoznačně určenou bilineární formou

## Definice

**definice**: bilineární forma $f$ na lineárním prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývá

- *symetrická*, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
- *antisymetrická*, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

skalární součin na reálném lineárním prostoru je symetrická bilineární forma

na lineárním prostoru nad tělesem charakteristiky 2 pojmy symetrické a antisymetrické bilineární formy splývají

je-li forma symetrická nebo antisymetrická poznáme z její matice

## Matice symetrických a antisymetrických forem

**tvrzení**: je-li $\mathbf{V}$ konečně generovaný lineární prostor, je-li $B$ báze $\mathbf{V}$ a $f$ bilineární forma na $\mathbf{V}$, pak

- $f$ je symetrická forma právě tehdy, když je $[f]_B$ symetrická matice
- $f$ je antisymetrická forma právě tehdy, když je $[f]_B$ antisymetrická matice

**důkaz**:

## Operace s bilineárními formami

bilineární formy můžeme přirozeným způsobem sčítat a násobit skalárem

jsou-li $f, g$ dvě bilineární formy na $\mathbf{V}$ a $t \in T$, pak definujeme

$$(f+g)(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \qquad\qquad (t\,f)(\mathbf{x},\mathbf{y}) =$$

s těmito operacemi tvoří množina všech bilineárních forem na $\mathbf{V}$ vektorový prostor

je-li $B$ konečná báze $\mathbf{V}$, snadno ověříme vztahy

$$[f+g]_B = \qquad\qquad [tf]_B =$$

## Rozklad bilineární formy na symetrickou a antisymetrickou

chceme bilineární formu $f$ na $\mathbf{V}$ rozložit na součet symetrické formy $f_s$ a antisymetrické $f_a$

tj. chceme, aby pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platilo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= f_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f_a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

tato soustava má jednoznačné řešení

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= (1+1)^{-1}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \\ f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= (1+1)^{-1}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \end{aligned}$$

pokud $1 + 1 \neq 0$

## Příklad

**tvrzení**: je-li $\mathbf{V}$ lineární prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ charakteristiky různé od 2, pak každou bilineární formu $f$ na $\mathbf{V}$ lze vyjádřit jako součet $f = f_s + f_a$, kde $f_s$ je symetrická a $f_a$ je antisymetrická, tento rozklad je jednoznačný a platí

$$f_s(\mathbf{x},\mathbf{y})) = 2^{-1}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f(\mathbf{y},\mathbf{x})),\ \ f_a(\mathbf{x},\mathbf{y})) = 2^{-1}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - f(\mathbf{y},\mathbf{x}))$$

**příklad**: rozložíme bilineární formu $f$ na $\mathbb{R}^2$

$$f((x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_1y_2 = (x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

## Kvadratická forma závisí pouze na symetrické části

**tvrzení**: jsou-li $f, g$ bilineární formy na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem charakteristiky různé od 2, pak $f_2 = g_2$ právě tehdy, když $f_s = g_s$; navíc

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y}))$$

**důkaz**:

## Příklad

najdeme symetrickou bilineární formu $f$ na $\mathbb{R}^2$, pro kterou platí
$f_2((x_1, x_2)^T) = 2x_1^2 + 7x_1x_2 + 5x_2^2$

## Ortogonalita - obsah

- *Ortogonalita*
  Ortogonální báze
  Hodnost formy
  Metoda symetrických úprav

## Definice ortogonality

nad tělesem charakteristikou různou od 2 jsou

symetrické bilineární formy totéž, co kvadratické formy

můžeme je libovolně zaměňovat

symetrická bilineární forma nad $\mathbb{R}$ se liší od skalárního součinu pouze tím, že nemusí být pozitivně definitní

**definice**: je-li $f$ symetrická bilineární forma na $\mathbf{V}$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, pak říkáme, že $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou *$f$-ortogonální*, pokud $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$
**zapisujeme** $\mathbf{x} \perp_f \mathbf{y}$

báze $B = (\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n)$ prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *$f$-ortogonální*, pokud je $[f]_B$ diagonální, tj. pro libovolné $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, jsou vektory $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ $f$-ortogonální

## Hodnost bilineární formy

má-li symetrická bilineární forma $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ vzhledem k bázi $B$ diagonální matici $[f]_B = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, je

$$f_2(\mathbf{x}) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2, \qquad \text{pro} \qquad [\mathbf{x}]_B = (x_1, \ldots, x_n)$$

**definice**: *hodnost* bilineární formy $f$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ je hodnost její matice vzhledem k libovolné bázi,
**značíme** $r(f)$

hodnost bilineární formy nezávisí na bázi, neboť

je-li $[f]_B$ diagonální matice, je $r(f)$

## Symetrické úpravy

máme symetrickou bilineární formu $f$ na $\mathbf{V}$

chceme najít bázi $B$ ve $\mathbf{V}$ takovou, že $[f]_B$ je diagonální

jinými slovy, chceme najít $f$-ortogonální bázi ve $\mathbf{V}$

klíč k postupu je ve formulce $[f]_B = X^T[f]_C X$, kde $X$ je matice přechodu $[id]_B^C$ od báze $C$ k bázi $B$

matice $X^T = \left([id]_B^C\right)^T$ je regulární

vyjádříme ji jako součin elementárních matic $X^T =$

potom

## Metoda symetrických úprav

zvolíme tedy libovolnou bázi $C$ ve $\mathbf{V}$

matici $A = [f]_C$ upravujeme tak, že provádíme elementární řádkové úpravy a každou z nich ihned doprovodíme odpovídající sloupcovou úpravou

takové dvojici úprav říkáme *symetrické úpravy*, jsou to

- prohození $i$-tého a $j$-tého řádku a následné prohození $i$-tého a $j$-tého sloupce
- vynásobení $i$-tého řádku nenulovým prvkem $t \in T$ a následné vynásobení $i$-tého sloupce prvkem $t$
- přičtení $t$-násobku $i$-tého řádku k $j$-tému, kde $t \in T$ a $i \neq j$, a následné přičtení $t$-násobku $i$-tého sloupce k $j$-tému

## Výpočet pomocí metody symetrických úprav

k matici $A$ přidáme nový blok $I_n$, dostaneme $(A|I_n)$

v druhém bloku budeme zapisovat kroky výpočtu tak, abychom nakonec dostali matici $X^T = \left([id]^B_C\right)^T$

protože $X^T = \left([id]^C_B\right)^T = E_k \cdots E_2 E_1$

a protože chceme docílit $X^T[f]_C X$, budeme postupně dělat

$$(A|I_n) \to (E_1 A E_1^T | E_1) \to (E_2 E_1 A E_1^T E_2^T | E_2 E_1) \to \cdots$$

až dostaneme

$$(E_k \cdots E_2 E_1 [f]_C E_1^T E_2^T \cdots E_k^T | E_k \cdots E_2 E_1)$$

a levý blok $E_k \cdots E_2 E_1 [f]_C E_1^T E_2^T \cdots E_k^T$ bude diagonální

## Příklad

v takovém případě bude $E_k \cdots E_2 E_1 = \left([\mathrm{id}]^B_C\right)^T$

v řádcích matice $E_k \cdots E_2 E_1$ budou tedy souřadnice prvků nějaké báze $B$ vzhledem k bázi $C$

a pro tuto bázi $B$ bude matice $[f]_B$ diagonální

neboli $B$ bude $f$-ortogonální báze ve $\mathbf{V}$

**příklad**: najdeme $f$-ortogonální bázi pro symetrickou bilineární formu na $\mathbb{Z}_5^3$

$$[f]_K = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zadanou maticí vzhledem ke kanonické bázi

# Výpočet

## Existence $f$-ortogonální báze

**věta**: každá symetrická bilineární forma $f$ na konečně generovaném lineárním prostoru nad tělesem charakteristiky různé od 2 má $f$-ortogonální bázi

**důkaz**: zvolíme nějakou bázi $C$ ve $\mathbf{V}$, najdeme matici $A = [f]_C$

stačí ukázat, že každou čtvercovou matici $A$ nad $\mathbf{T}$ lze převést symetrickými úpravami do diagonální matice

to provedeme v $n$ krocích, je-li $n = \dim \mathbf{V}$

po $i$-tém kroku budeme mít matici

$$A' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

kde blok $D$ bude diagonální matice řádu $i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

## Dokončení důkazu

uděláme to indukcí podle $i$

předpokládejme, že $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a že po $i - 1$ krocích máme matici $A'$

## Když vycházejí diagonální prvky nenulové

pak vystačíme pouze s přičítáním $t$-násobků řádků k řádkům pod nimi

děláme tedy vlastně Gaussovu eliminaci s doprovodným vynulováním prvků vpravo od pivotu v příslušném řádku

příslušné elementární matice jsou dolní trojúhelníkové s jedničkami na hlavní diagonále

jejich součin je také takový

a inverzní matice k jejich součinu je také taková

## Další rozklad matice

**tvrzení**: je-li $A$ symetrická matice taková, že při Gaussově eliminaci nemusíme prohazovat řádky, pak existuje dolní trojúhelníková matice $L$ s jedničkami na diagonále a diagonální matice $D$ (složená z pivotů) tak, že

$$A = LDL^T$$

**důkaz**:

## Lagrangeova metoda

kvadratické formy diagonalizoval Joseph Louis Lagrange v 18. stol.

jak to dělal, si ukážeme na dřívějším příkladu bilineární symetrické formy na $\mathbb{Z}_5^3$

$$[f]_K = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

příslušná kvadratická forma je

$f_2((x_1, x_2, x_3)^T) =$

## Ortogonální báze nad $\mathbb{R}$ - obsah

- *Ortogonální báze nad $\mathbb{R}$*

  Setrvačnost a signatura

  Pozitivní definitnost

  Ortonormální diagonalizace

  Příklady

## Nejednoznačnost $f$-ortogonální báze

víme už, že pro symetrickou bilineární formu na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ s charakteristikou různou od 2 existuje $f$-ortogonální báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$

platí tedy $[f]_B = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, kde $a_i =$

vezmeme jinou bázi $C = (t_1\mathbf{v}_1, t_2\mathbf{v}_2, \dots, t_n\mathbf{v}_n)$ ve $\mathbf{V}$

pak $[f]_C =$

pokud je $\mathbf{T} = \mathbb{C}$, pak existuje $f$-ortogonální báze $C$ taková, že

$[f]_C =$

## Věta o setrvačnosti symetrických bilineárních forem

pokud je $\mathbf{T} = \mathbb{R}$, můžeme vždy dosáhnout $a_i t_i^2 \in \{0, 1, -1\}$

volbou $t_i =$ v případě, že $a_i \neq 0$

následující důležitá věta ukazuje, že počet 1 a počet $-1$ na hlavní diagonále matice $[f]_C$ nezávisí na volbě $f$-ortogonální báze $C$

**věta**: je-li $f$ symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n$ a $C, C'$ báze ve $\mathbf{V}$ takové, že

$$[f]_C = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\times}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{l\times}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m\times})$$

$$[f]_{C'} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k'\times}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{l'\times}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m'\times})$$

Pak $k = k', l = l', m = m'$.

# Myšlenka důkazu

zvolíme si nějakou $f$-ortogonální bázi

$$C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$$

pro kterou platí

$$[f]_C = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\times}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{l\times}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m\times})$$

označíme $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$ a $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \rangle$

je-li $\mathbf{x} \in U$, tj. $\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k$, platí

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 > 0 \quad \text{pokud} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$$

je-li $\mathbf{x} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_l\mathbf{v}_l + c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_m\mathbf{w}_m$, je

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_l^2 + 0c_1^2 + 0c_2^2 + \cdots + 0c_m^2 \leq 0$$

## Důkaz

je-li $C' = (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_{k'}, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_{l'}, \mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \ldots, \mathbf{w}'_{m'})$ a

$$[f]_{C'} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k'\times}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{l'\times}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m'\times})$$

pak platí $k' + l' + m' =$

dále $k' + l' =$ neboli $m' =$

pokud by platilo například $k' < k$, vzali bychom podprostor

$$\mathbf{W}' = \langle \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_{l'}, \mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \ldots, \mathbf{w}'_m \rangle$$

spočteme dimenze

## Dokončení důkazu

podle věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů by platilo

$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}') > 0$ a našli bychom nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}'$

z jeho souřadnic $[\mathbf{x}]_C = (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_m)$ bychom dostali

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 > 0$$

a ze souřadnic $[\mathbf{x}]_C = (a'_1, \ldots, a'_{k'}, b'_1, \ldots, b'_{l'}, c'_1, \ldots, c'_m)$

$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -(b'_1)^2 - (b'_2)^2 - \cdots - (b'_{l'})^2 + 0(c'_1)^2 + 0(c'_2)^2 + \cdots + 0(c'_m)^2 \leq 0$

tento spor dokazuje $k \leq k'$ a ze symetrie plyne rovněž $k' \leq k$

proto také $l = l'$

## Indexy setrvačnosti a signatura

**definice**: je-li $f$ symetrická bilineární forma na reálném konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n$, pak číslo $k$ (resp. $l$) z předchozí věty nazýváme *pozitivní (resp. negativní) index setrvačnosti formy* $f$, značíme $n_+(f)$ (resp. $n_-(f)$); *signaturou formy* $f$ rozumíme trojici $(n_0(f), n_+(f), n_-(f))$, kde $n_0(f) = n - r(f)$ (neboli $n_0(f) = m$, kde $m$ je také z předchozí věty)

**příklad**: najdeme signaturu bilineární formy $f$ na $\mathbb{R}^3$ určené maticí

# Další příklad

**příklad**: najdeme signaturu reálné kvadratické formy tří proměnných

## Definice

**definice**: symetrická bilineární forma $f$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je *pozitivně definitní*, pokud $f_2(\mathbf{x}) > 0$ pro libovolný vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in V$

**tvrzení**: pro symetrická bilineární formu $f$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n$ jsou následující podmínky ekvivalentní právě tehdy, když $n_+(f) = n$

1. $f$ je pozitivně definitní
2. $n_+(f) = n$
3. matice $[f]_B$ je pozitivně definitní pro jakoukoliv bázi $B$ prostoru $\mathbf{V}$

# Důkaz

## Charakterizace pozitivně definitních matic

víme už, že symetrická reálná matice je pozitivně definitní právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná

**věta**: pro reálnou symetrickou matici $A$ je řádu $n$ jsou následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. $A$ je pozitivně definitní
2. (Sylvestrovo kritérium) všechny hlavní minory matice $A$ mají kladný determinant
3. Gaussova eliminace použitá na matici $A$ může proběhnout bez prohazování řádků a všechny pivoty vyjdou kladné
4. $A = LDL^T$ pro nějakou dolní trojúhelníkovou matici $L$ s jedničkami na diagonále a nějakou diagonální matici $D$ s kladnými čísly na diagonále
5. (Choleského rozklad) $A = RR^T$ pro nějakou regulární dolní trojúhelníkovou matici $R$

## Důkaz

*hlavním minorem* matice $A$ řádu $n$ rozumíme matici tvořenou prvními $i$ řádky a $i$ sloupci matice $A$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, n\}$

# Dokončení důkazu

## Ortonormální diagonalizace

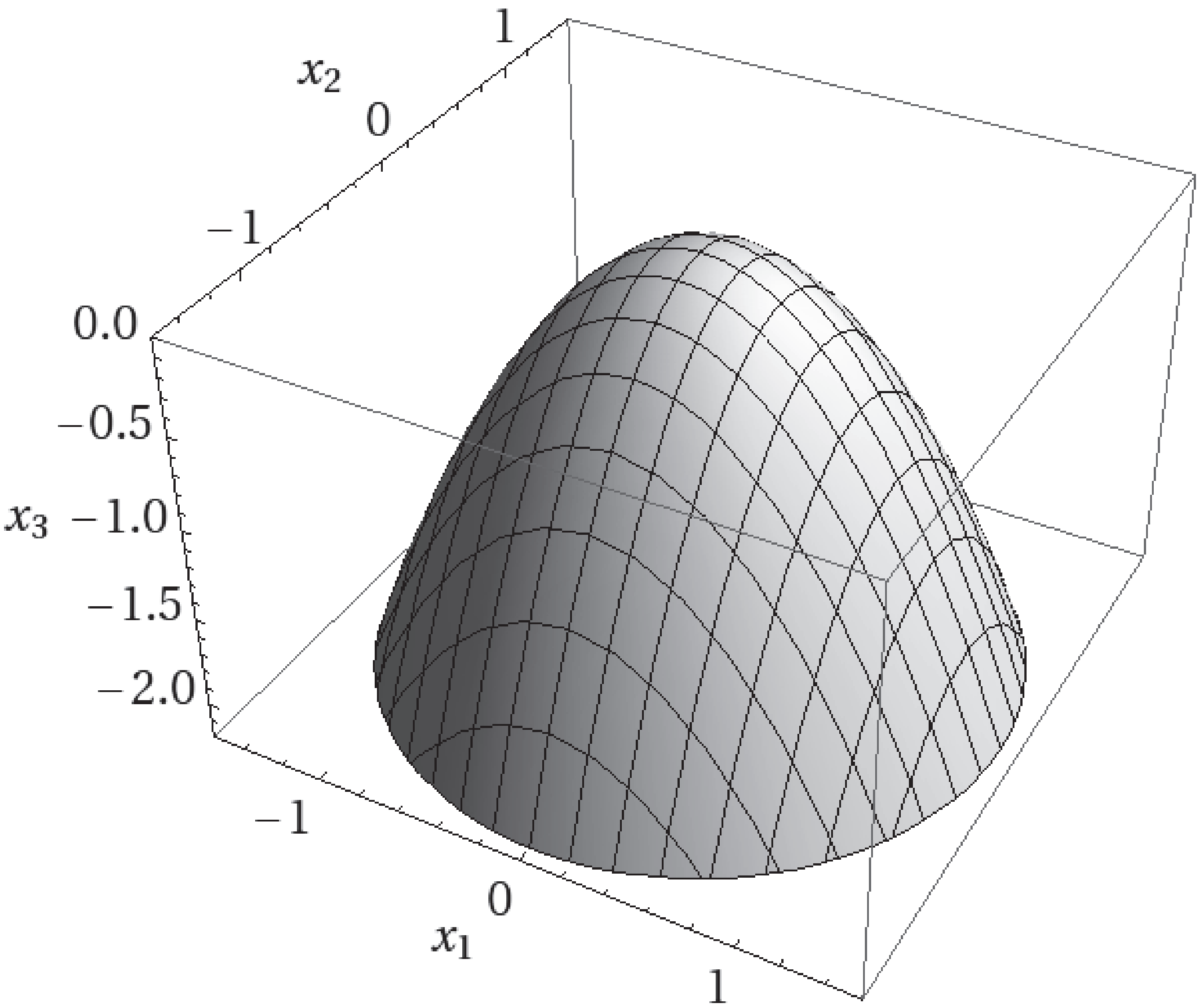
**věta**: je-li $\mathbf{V}$ reálný vektorový prostor dimenze $n$ se skalárním součinem $\langle\, , \,\rangle$ a $f$ symetrická bilineární forma na $\mathbf{V}$, pak existuje báze $B$ prostoru $\mathbf{V}$, která je $f$-ortogonální a zároveň ortonormální vzhledem k $\langle\, , \,\rangle$

**důkaz**:

# Příklad 1

jak vypadá množina bodů $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ splňujících
$x_3 = -x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2$ ?

# Obrázek

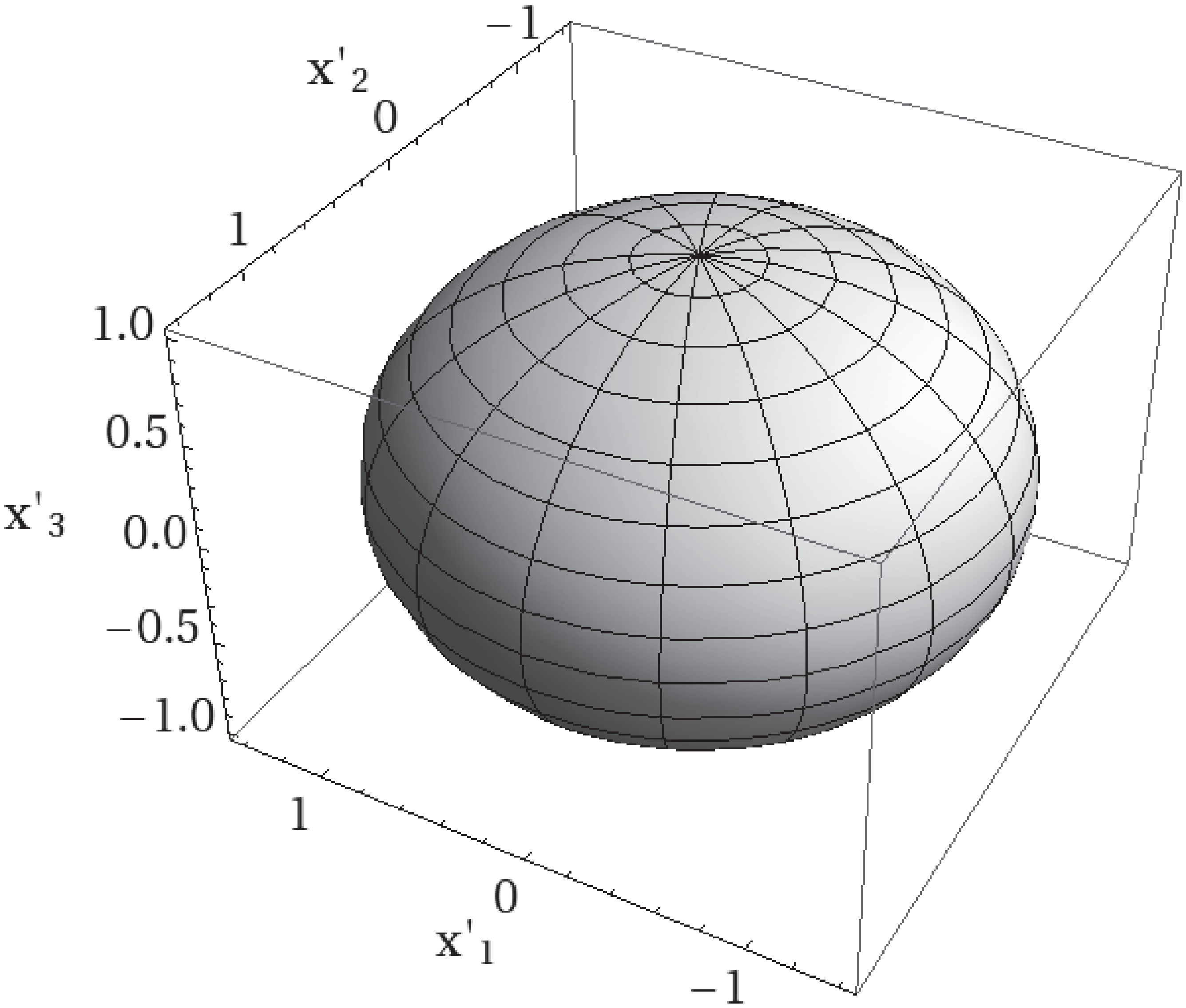


## Příklad 2

množinu bodů $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ splňujících

$$10x_1^2 + 13x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 = 9$$

# Obrázek



## Přesnější výpočet

lepší představu o tvaru množiny bodů $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ splňujících

$$10x_1^2 + 13x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 = 9$$

získáme pomocí ortonormální diagonalizace

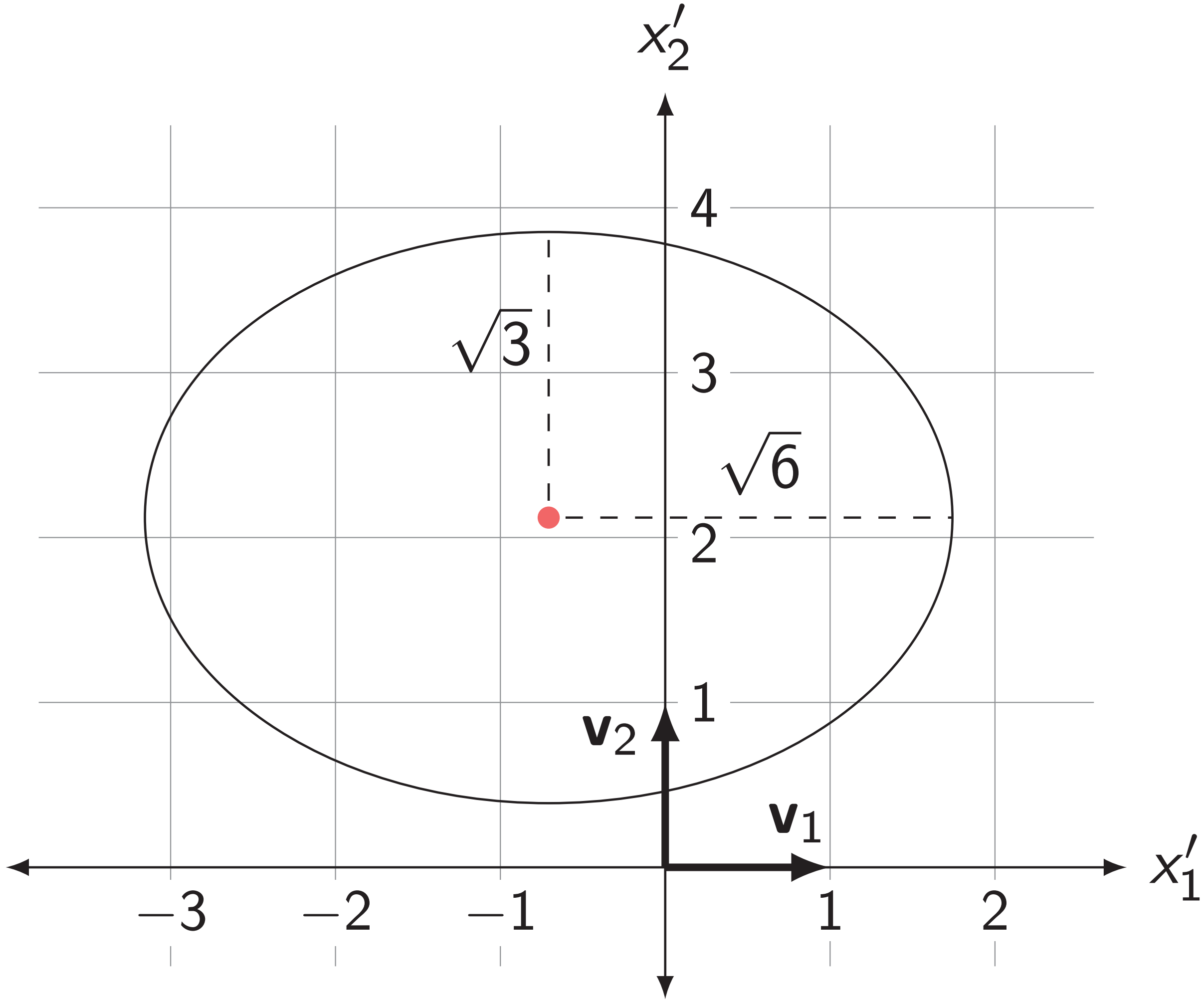
# Příklad 3

jak vypadá následující množina v bodů v $\mathbb{R}^2$

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 7 = 0\} \ ?$$

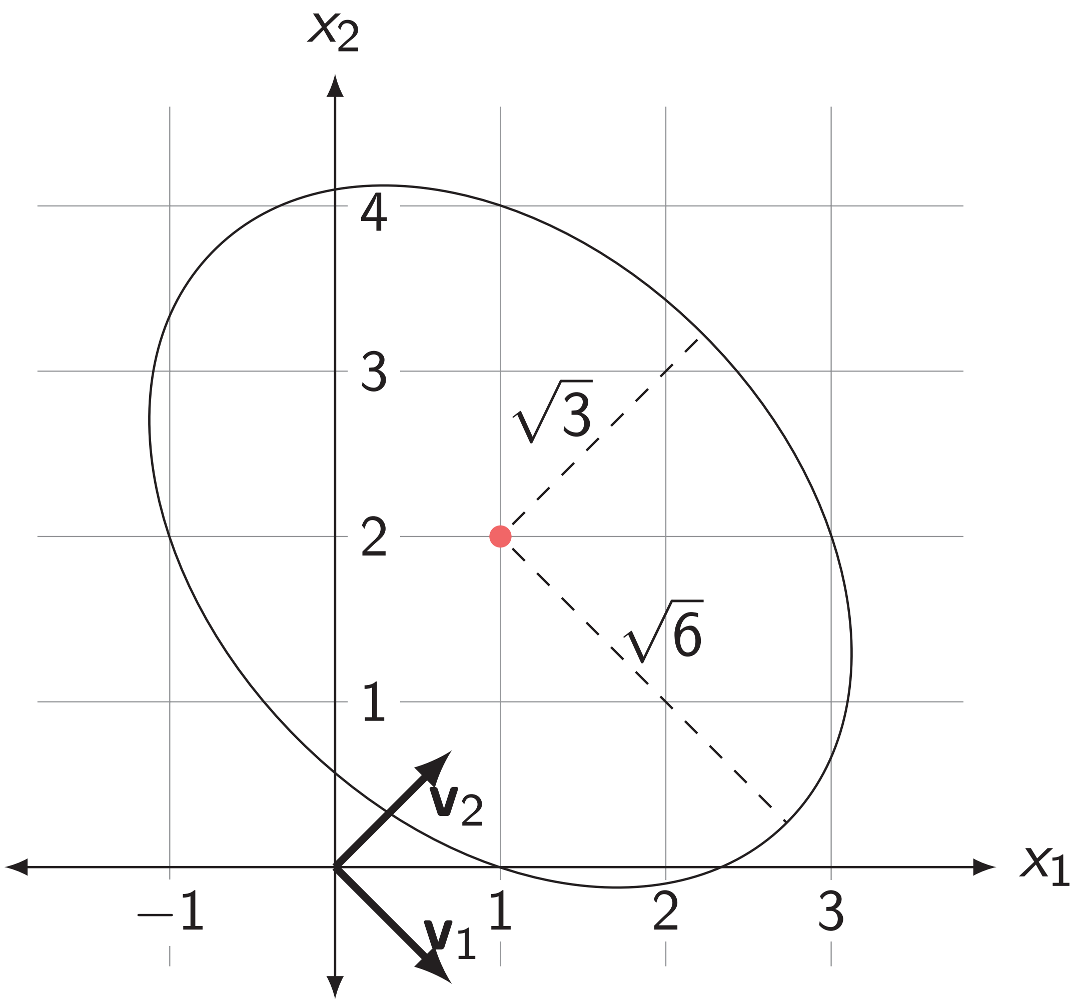
## Pokračování příkladu 3

# Obrázek



# Přepočet do souřadnic vzhledem ke kanonické bázi

## Obrázek



## Lineární formy na prostoru se skalárním součinem

**připomenutí**: lineární forma na prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ je lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{T}^1$

**věta**: pro každou lineární formu $f$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{R}$) se skalárním součinem $\langle\, ,\, \rangle$ existuje právě jedno $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ takové, že pro každé $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí

$$f(\mathbf{y}) = \langle\, \mathbf{x}, \mathbf{y}\, \rangle$$

**důkaz**:

# Kapitola 12

## Afinní prostory

## Definice afinního prostoru - obsah

- *Definice afinního prostoru*

  Operace v afinních prostorech

  Afinní euklidovské a unitární prostory

  Soustavy souřadnic

## Součet bodu s vektorem

každý bod $a$ v rovině a vektor $\mathbf{v}$ určují další bod v rovině

je to koncový bod vektoru $\mathbf{v}$ s počátečním bodem $a$

čemu se bude rovnat bod $(a + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ ?

# Definice afinního prostoru

**definice**: je-li $\mathbf{T}$ těleso, pak afinním prostorem $\mathbf{A}$ nad $\mathbf{T}$ rozumíme množinu $A$, jejíž prvky nazýváme *body*, spolu s vektorovým prostorem $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ a operací $+ : A \times V \to A$, která bodu $a \in A$ a vektoru $\mathbf{v} \in V$ přiřadí bod $a + \mathbf{v} \in A$, splňující axiomy

(aS2) pro libovolný bod $a \in A$ a libovolné vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí $a + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (a + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(aS1) pro libovolný bod $a \in A$ platí $a + \mathbf{o} = a$

(aM) ke každé dvojici bodů $a, b \in A$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v} \in V$, pro který $a + \mathbf{v} = b$, tento vektor označujeme $b - a$

**definice**: *dimenzí* afinního prostoru $\mathbf{A}$ rozumíme dimenzi jeho prostoru vektorů (nebo také směrů) $\mathbf{V}$

## Vlastnosti operací v afinním prostoru

pro libovolné body $a, b, c, d \in A$ a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

- $a - b = -(b - a)$
- $(a + \mathbf{u}) - (b + \mathbf{v}) = (a - b) + \mathbf{u} - \mathbf{v}$
- $(a - b) + (c - d) = (a - d) + (c - b)$
- $(a - b) + (b - c) = a - c$

## Aritmetický afinní prostor

aritmetický afinní prostor $\mathbf{T}^n$

**další příklad**:
$A = (1,2,3)^T + \langle (2,3,4)^T, (6,7,8)^T \rangle, \quad V = \langle (2,3,4)^T, (6,7,8)^T \rangle$

## Afinní euklidovské a unitární prostory

**definice**: *afinním eukleidovským prostorem* (resp. *afinním unitárním prostorem*) rozumíme afinní prostor **A** nad tělesem $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) spolu se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$ na jeho prostoru vektorů

**definice**: vzdáleností dvou bodů $a, b \in A$ v afinním eukleidovském prostoru **A** rozumíme číslo $\|a - b\|$

## Soustava souřadnic v afinním (euklidovském) prostoru

**definice**: *soustavou souřadnic* v afinním prostoru $\mathbf{A}$ dimenze $n$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ rozumíme $(n+1)$-tici $S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, kde $a \in A$ je bod nazývaný *počátek soustavy souřadnic* a $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze $\mathbf{V}$

je-li $S$ soustava souřadnic jako výše, $b \in A$ je bod a $\mathbf{w} \in V$ je vektor, pak *souřadnice vektoru* $\mathbf{w}$ *v soustavě souřadnic* $S$ definujeme jako souřadnice $\mathbf{w}$ vzhledem k bázi $B$ a značíme $[\mathbf{w}]_S$, tj.

$$[\mathbf{w}]_S = [\mathbf{w}]_B$$

a *souřadnice bodu* $b$ *v soustavě souřadnic* $S$ definujeme jako souřadnice vektoru $b - a$ v bázi $B$, tj.

$$[b]_S = [b - a]_S = [b - a]_B$$

## Jiná formulace

souřadnice bodu $b$ v soustavě $S$ se rovnají té jednoznačně určené $n$-tici prvků $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, pro kterou platí

$$b = a + t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_n\mathbf{u}_n \ .$$

**příklad**: je-li $S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ soustava souřadnic, pak

- $[a]_S =$
- $[a + \mathbf{u}_i]_S =$

## Příklad

v aritmetickém afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ je

$$S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

soustava souřadnic

najdeme souřadnice vektoru $\mathbf{w} = (-1, 3)^T$ a bodu $b = (-1, 3)^T$

## Kanonická a kartézská soustava souřadnic

*kanonická soustava souřadnic* v aritmetickém afinním prostoru $\mathbf{T}^n$ je

$$S = ((0, 0, \ldots, 0)^T, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$$

je charakterizovaná tím, že

- $[a]_S =$ a $[\mathbf{w}]_S =$

pro libovolný bod $a$ a libovolný vektor $\mathbf{w}$

v afinním eukleidovském prostoru jsou „nejlepší“ soustavy souřadnic kartézské

**definice**: soustava souřadnic $S = (a, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v afinním eukleidovském prostoru se nazývá *kartézská*, pokud $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze

## Souřadnice a operace

**tvrzení**: je-li $S$ soustava souřadnic afinního prostoru **A** s prostorem vektorů **V** nad tělesem **T**, pak pro libovolné $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $b, c \in A$, $t \in T$ platí

$$[\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]_S = [\mathbf{v}_1]_S + [\mathbf{v}_2]_S, \quad [t\mathbf{v}_1]_S = t[\mathbf{v}_1]_S,$$

$$[b + \mathbf{v}_1]_S = [b]_S + [\mathbf{v}_1]_S, \quad [b - c]_S = [b]_S - [c]_S$$

je-li navíc **A** afinní eukleidovský prostor a soustava $S$ je kartézská, pak

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = [\mathbf{v}_1]_S \cdot [\mathbf{v}_2]_S$$

## Změna souřadnic

**tvrzení**: jsou-li $S = (a, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a $T = (b, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ soustavy souřadnic v afinním prostoru **A** s prostorem vektorů **V** a $[\mathrm{id}]^B_C$ je matice přechodu od $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ k $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, pak pro každý bod $c \in A$ a vektor $\mathbf{w} \in V$ platí

$$[\mathbf{w}]_T = [\mathrm{id}]^B_C\,[\mathbf{v}]_S, \quad [c]_T = [\mathrm{id}]^B_C\,[b]_S + [a]_T$$

**důkaz**:

## Příklad

v aritmetickém afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ máme souřadnice

$$S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left( \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} \right)$$

$$T = (b, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

## Lineární kombinace v afinním prostoru - obsah

- *Lineární kombinace v afinním prostoru*

  Afinní kombinace bodů

  Barycentrické souřadnice

## „Lineární kombinace“ bodů

některé „lineární kombinace“ bodů jsou smysluplné

$$a - b, \qquad a + b - a$$

**otázka**: jak definovat součet bodů $a + b$ ?

## Někdy to jde

někdy to ale funguje – jsou-li $a, b$ body, pak

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$$

**tvrzení**: je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor nad $\mathbf{T}$ dimenze alespoň 1, $a_1, \ldots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry, pak jsou následující tvrzení ekvivalentní

1. bod $b$ o souřadnicích $[b]_S = \lambda_1[a_1]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic $S$
2. $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$

## Důkaz

## Afinní kombinace bodů

**definice**: je-li **A** afinní prostor nad **T**, $a_1, \ldots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, pak *afinní kombinací bodů* $a_1, \ldots, a_k$ *s koeficienty* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ rozumíme bod $b \in A$ takový, že

$$[b]_S = \lambda_1 [a_1]_S + \cdots + \lambda_k [a_k]_S$$

kde $S$ je libovolná soustava souřadnic prostoru **A**

zapisujeme $b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$

bez odkazu na nějakou soustavu souřadnic může afinní kombinaci bodů definovat také rovností

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = a_1 + \lambda_2 (a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k (a_k - a_1)$$

## Jiné vyjádření afinní kombinace bodů

**tvrzení**: je-li **A** afinní prostor nad **T**, a $a_1, \ldots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in T$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, pak bod $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ je roven tomu jednoznačně určenému bodu $b$, pro který

$$\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b) = \mathbf{o}$$

**důkaz**:

## Afinní kombinace dvou bodů na přímce

předpokládáme, že $\mathbf{A}$ je afinní prostor dimenze 1 s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$

zvolíme dva body $a, b \in A$

každý bod $c \in A$ můžeme jednoznačně vyjádřit jako afinní kombinaci $\lambda_1 a + \lambda_2 b$ bodů $a, b$

## Příklad

vyjádříme bod $c = (2, 3)^T \in \mathbb{R}^2$ jako afinní kombinaci bodů $a = (1, 2)^T$ a $b = (5, 6)^T$

*barycentrické souřadnice* bodu $c$ vzhledem k $(a, b)$

## Barycentrická soustava souřadnic

**tvrzení**: je-li **A** afinní prostor dimenze $n$ s prostorem vektorů **V** a $a_1, \ldots, a_k \in A$ jsou bod, pak jsou následující tvrzení ekvivalentní

1. každý bod $b \in A$ lze jednoznačným způsobem zapsat jako afinní kombinaci bodů $a_1, \ldots, a_k$
2. posloupnost vektorů $(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1)$ tvoří bázi prostoru **V** (speciálně $k = n + 1$)

**důkaz**:

# Dokončení důkazu

## Definice barycentrické soustavy souřadnic

**definice**: je-li **A** afinní prostor dimenze $n$ s prostorem vektorů **V**, pak *barycentrická soustava souřadnic* v **A** je $(n+1)$-tice bodů $(a_1, \ldots, a_{n+1})$, které splňují ekvivalentní podmínky z předchozího tvrzení

je-li $Z = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ barycentrická soustava souřadnic afinního prostoru **A** a $b \in A$, pak $(n+1)$-tici skalárů $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})^T$ nazýváme *barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k Z*, pokud $b = \lambda a_1 + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$

## Příklad

v afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ najdeme barycentrické souřadnice bodu $b$ v barycentrické soustavě souřadnic $(a_1, a_2, a_3)$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

## Afinní kombinace pomocí dvojic

za jakých předpokladů platí v afinním prostoru rovnost

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = (\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} b\right) + \lambda_3 c \quad ?$$

## Těžiště v trojúhelníku

## Konvexní kombinace bodů

**definice** afinní kombinace $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$ bodů $a_1, a_2, \ldots, a_k$ afinního prostoru **A** se nazývá *konvexní kombinace*, pokud $a_i \geq 0$ pro každé $i$

*konvexní obal* dvou bodů

*konvexní obal* tří bodů

jak zjistit, že bod leží uvnitř trojúhelníku

*konvexní obal* množiny bodů

## Podprostory - obsah

- *Podprostory*
  Definice
  Jak zadat afinní podprostor

## Definice podprostoru

**definice**: je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$, pak afinní prostor $\mathbf{B}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ s prostorem vektorů $\mathbf{W}$ se nazývá *(afinní) podprostor prostoru* $\mathbf{A}$, pokud $B \subseteq A$, $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, a sčítání bodu a vektoru v $\mathbf{B}$ je zúžením sčítání bodu a vektoru v $\mathbf{A}$

je-li $\mathbf{A}$ afinní eukleidovský prostor, pak $\mathbf{B}$ nazýváme *(afinním eukleidovským) podprostorem* $\mathbf{A}$, pokud je $\mathbf{B}$ afinním podprostorem $\mathbf{A}$ a navíc je skalární součin v $\mathbf{B}$ zúžením skalárního součinu v $\mathbf{A}$

**příklad**: pro libovolný bod $a \in A$ a (lineární) podprostor $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ tvoří množina bodů $a + W$ (spolu se sčítáním zděděným z $\mathbf{A}$) afinní podprostor prostoru $\mathbf{A}$, jehož prostor vektorů je $\mathbf{W}$

## Jak dostat každý afinní podprostor

**tvrzení**: je-li **A** afinní prostor nad tělesem **T** s prostorem vektorů **V** a **B** jeho podprostor s prostorem vektorů **W**, pak pro libovolný bod $b \in B$ platí $B = b + W$ a navíc
$W = \{c - b : c \in B\} = \{d - c : c, d \in B\}$

**důkaz**:

## Podprostory afinního prostoru $\mathbb{R}^3$

každý podprostor afinního prostoru je jednoznačně určený svou množinou bodů

## Podprostory a afinní kombinace

**tvrzení**: je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor a $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, pak $B$ je podprostorem $\mathbf{A}$ právě tehdy, když každá afinní kombinace bodů z $B$ leží v $B$

**důkaz**:

## Afinní obal

**definice**: je-li $X$ neprázdná podmnožina bodů afinního prostoru **A** nad tělesem **T**, pak *afinním obalem* množiny $X$ rozumíme množinu $\langle X \rangle$ všech afinních kombinací bodů z $X$, tj.

$$\langle X \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k : a_1, \ldots, a_k \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in T,\\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1\}$$

**tvrzení**: je-li $X$ neprázdná podmnožina bodů afinního prostoru **A** nad tělesem **T**, pak $\langle X \rangle$ je podprostor afinního prostoru **A** a pro jeho prostor vektorů **W** platí

$$W = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k : a_1, \ldots, a_k \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in T,\\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0\} = \langle \{c - b : c \in X\} \rangle$$

kde $b$ je libovolný bod v $X$

# Důkaz

## Afinní obal dvou bodů

afinní obal dvou různých bodů je

**příklad**: afinní obal bodů $a = (1, 2)^T$, $b = (4, 6)^T$ ve $\mathbb{R}^2$

## Bodově

# Parametricky

## Rovnicově

## Od parametrického zápisu k rovnicovému

**tvrzení**: je-li $b + W$ podprostor dimenze $k$ aritmetického afinního prostoru $\mathbf{T}^n$, pak existuje matice $R$ typu $(n-k) \times n$ nad $\mathbf{T}$ a bod $c \in \mathbf{T}^k$ takový, že množina řešení soustavy rovnic $R\,x = c$ je rovná $b + W$

**důkaz**:

## Od rovnicového zápisu k parametrickému

**příklad**: zapíšeme parametricky podprostor **B** prostoru $\mathbb{R}^5$, který je zadaný jako množina řešení soustavy lineárních rovni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## A zpět

## Možnosti v $\mathbb{R}^3$