Domácí úkol č. 8 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2017–2018

(8.1) Přepokládáme, že A je komplexní regulární matice řádu n.

1. Dokažte, že existuje pozitivně definitní matice P taková, že $P^2 = AA^*$. (Použijte spektrální větu pro pozitivně definitní matice.)
2. Označíme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ všechna vlastní čísla matice P a $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vhodnou ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$ složenou z příslušných vlastních vektorů matice P. Označíme $R = (\mathbf{x}_1|\mathbf{x_2}|\cdots|\mathbf{x}_n)$.
3. Označíme $\mathbf{v}_i = \lambda_i^{-1} A^* \mathbf{x}_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Dokažte, že matice $V = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\cdots|\mathbf{v}_n)$ je unitární.
4. Dokažte, že matice $U = RV^*$ je také unitární.
5. Dokažte, že platí rovnost $R^*A = R^*PU$ a z ní odvoďte rovnost $A = PU$.

Poznámka. Dokázali jsme tak, že každou regulární čtvercovou komplexní matici můžeme vyjádřit jako součin nějaké pozitivně definitní matice P a unitární matice U. Je to tvrzení o maticích, které je analogií polárního tvaru nenulových komplexních čísel. Tomuto rozkladu komplexních matic se říká *polární rozklad*.

(8.2) Napište výraz

$$V(a, b, c) = 5a^2 + 4b^2 + 8c^2 - 4ab + 4ac - 6bc \ ,$$

ve tvaru $(a, b, c)A(a, b, c)^T$ pro vhodnou symetrickou matici A. Ukažte, že A je pozitivně definitní (na výpočet kořenů polynomu použijte software). Z toho vyvoďte, že $V(a, b, c) \geq 0$ pro libovolná reálná čísla a, b, c.

Bonusový problém: Dokažte, že čtvercová komplexní matice A řádu n je normální, právě když $\|A\mathbf{v}\| = \|A^*\mathbf{v}\|$ pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.