Domácí úkol č. 2 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2017–2018

(2.1) Báze B je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle , \rangle$ na $\mathbb{C}^2$. Určete $\left\langle (x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T \right\rangle$.

$$B = \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \right)$$

(2.2) Označíme ℓ_2 reálný vektorový prostor všech posloupností $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ reálných čísel takových, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konverguje, s obvyklými operacemi sčítání posloupností a násobení posloupnosti reálným číslem. Na tomto prostoru definujeme skalární součin dvou posloupností $\mathbf{a} = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ a $\mathbf{b} = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ jako

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad .$$

Bez důkazu vezmeme jako fakt, že ℓ_2 je reálný vektorový prostor a že uvedená formulka definuje skalární součin na tomto prostoru. (Důkaz obou faktů není těžký. Pro ten druhý stačí ověřit, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje, všechny ostatní vlastnosti skalárního součinu jsou pak skoro zřejmé. A ke konvergenci řady stačí dokázat, že konverguje absolutně, což je jednoduché cvičení.)

Pro každé $i \geq 1$ definujeme posloupnost $\mathbf{e}_i \in \ell_2$, která má i-tý člen rovný 1 a všechny ostatní členy rovné 0. Pomocí Kroneckerova symbolu ji můžeme zapsat jako $\mathbf{e}_i = (\delta_{ik})_{k=1}^{\infty}$.

1. Dokažte, že nekonečná posloupnost $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots)$ je lineárně nezávislá v ℓ_2.
2. Dokažte, že orotogonální projekce posloupnosti $\mathbf{v} = (1/k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ na podprostor $\mathbf{U} = \mathrm{LO}\,\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots\}$ neexistuje.
3. Dokažte, že
$$\mathbf{v} \in \left(\mathbf{U}^{\perp}\right)^{\perp} \setminus \mathbf{U} \quad .$$

Bonusový problém: Ukažte, že skalární součin je až na násobek určen kolmostí. Přesněji: Nechť $\langle , \rangle_1$ a $\langle , \rangle_2$ jsou dva skalární součiny na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ takové, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ právě když $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2 = 0$. Pak existuje kladné reálné číslo t takové, že $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2$ pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.