Domácí úkol č. 12 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2017–2018

(12.1) V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme útvar U, který vznikne jako průnik množiny

$$H = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : 7x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1 - 10x_2 - 12x_3 \\ + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4 = 0\}$$

a roviny

$$V = \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathrm{LO}\left\{(1,0,1)^T, (1,-2,0)^T\right\}.$$

Z postupu vyplyne, že U je elipsa. Úkolem je zjistit přesný tvar a umístění, tj. najít střed elipsy a směry a velikosti poloos.

Nápověda: Můžete postupovat následujícím způsobem.

(a) Rozložte výraz definující H na součet kvadratické formy f_2, lineární formy h a konstanty. Označme A matici f vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^3$ (kde f je symetrická bilineární forma příslušná kvadratické formě f_2), tj. $A = [f]_{K_3}$. Označme Y matici h vzhledem ke kanonické bázi, tj. $Y = [h]^{K_3}$. Nyní máme

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + Y\mathbf{x} + 4 = 0\} \ .$$

(b) Označme g restrikci bilneární formy f na $V \times V$ (tj. g je bilineární forma na $\mathbf{V}$). Najděte bázi $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ prostoru $\mathbf{V}$, která je zároveň ortogonální vzhledem ke g a ortonormální vzhledem k restrikci standardního skalárního součinu na $\mathbf{V}$. Můžete postupovat podle důkazu příslušné věty ve skriptech (tj. vyjádřit g vzhledem k nějaké ortonormální bázi prostoru $\mathbf{V}$ atd.) Najděte matici restrikce h na prostor $\mathbf{V}$ vzhledem k bázi C.

To vám dá vyjádření $[U]_C$ ve tvaru

$$[U]_C = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : ?x_1^2 + ?x_2^2 + ?x_1 + ?x_2 + ? = 0\} \ .$$

(d) Doplněním na čtverec a úpravami zjistěte střed a velikosti poloos, podobně jako v jednom z příkladů ve skriptech. (Střed i směry poloos nakonec vyjádřete v kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.)

(12.2) Z předchozího domácího úkolu víme, že pro reálnou pozitině definitní matici A řádu n je funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

zdola omezená pro jakýkoliv vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Najděte vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ve kterém funkce g nabývá minima.