Domácí úkol č. 11 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2017–2018

(11.1) Předpokládáme, že A je regulární symetrická reálná matice řádu n. Dokažte, že funkce $g : \mathbb{R}^n \to R$ definovaná předpisem

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

je zdola omezená pro jakýkoliv vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když je matice A pozitivně definitní.

Nápověda: K důkazu, že z dolní omezenosti funkce g plyne, že matice A je pozitivně definitní, využijte možnost diagonalizovat matici A pomocí symetrických úprav.

K důkazu opačné implikace použijte např. Choleského rozklad matice A.

(11.2) Předpokládáme, že A je čtvercová reálná matice a M je pozitivně definitní reálná matice, obě řádu n. Označme

$$G = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathrm{Ker}\,(A - \lambda M) \neq \{\mathbf{o}\}\} \ .$$

1. Dokažte, že množina G se rovná spektru (tj. množině všech vlastních čísel) nějaké symetrické matice B.
2. Dokažte, že existuje matice Q taková, že $Q^T AQ$ je diagonální matice a $Q^T MQ = I_n$.

Nápověda: Opět použijte Choleského rozklad matice M.