# Komplexní systémy

## Klasifikace pomocí transient

Barbora Hudcová

3. března 2020

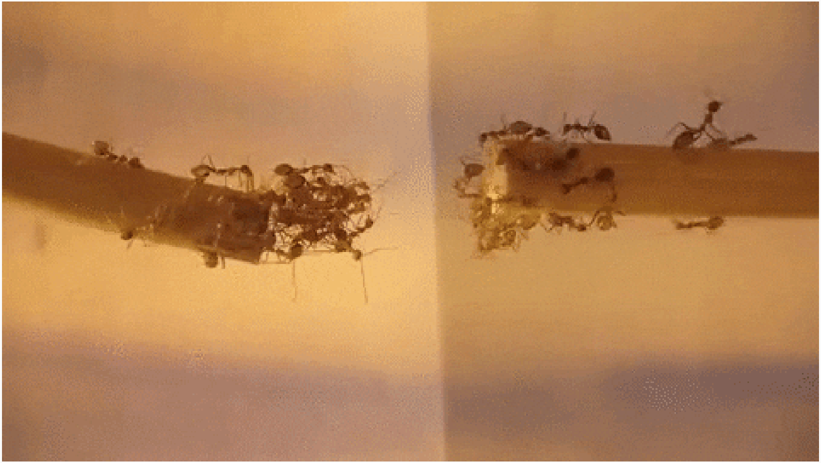
# Komplexní systémy: Úvod

# Základní vlastnosti

Komplexní systém se skládá z **jednoduchých částí**, které spolu **vzájemně interagují** a tím vzniká zajímavé chování - **emergence**.

# Příklad: Synchronizace ptačího hejna

# Příklad: Mravenčí kolonie



# Co dělá systémy komplexní

- Na otázku "Jak bude systém vypadat v čase t?" nejde odpovědět v lepším čase, než jaký potřebujeme k simulaci systému.
- Systém je víc, než jen součet svých částí (nelinearita).
- Chování systému jako celku se kvalitativně liší od chování jednotlivých částí.
- Všechny části systému mění své chování v průběhu vývoje, jsou tedy schopny jakési adaptace.
- Systémy, které nejde stručně/elegantně popsat.

# Co dělá systémy komplexní

- Na otázku "Jak bude systém vypadat v čase t?" nejde odpovědět v lepším čase, než jaký potřebujeme k simulaci systému.
- Systém je víc, než jen součet svých částí (nelinearita).
- Chování systému jako celku se kvalitativně liší od chování jednotlivých částí.
- Všechny části systému mění své chování v průběhu vývoje, jsou tedy schopny jakési adaptace.
- Systémy, které nejde stručně/elegantně popsat.

Klíčový problém: chybí formální definice komplexity a emergence

# Cíle a otevřené problémy

- najít správné definice
- umět systematicky konstruovat/hledat komplexní systémy schopné otevřené evoluce
- pozorováním komplexních systémů studovat evoluční mechanismy, emergenci inteligence
- umět rozlišovat, které komplexní systémy mají netriviální výpočetní kapacitu

# Celulární Automaty (CA)

# Definice

1-dimenzionální celulární automat operující na cyklické mřížce je určen:

- mřížkou $\mathbb{Z}_n$, jejíž prvky nazveme buňkami
- konečnou množinou stavů $S$
- okolím $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, $n_i \in \mathbb{Z}_n$
- lokálním pravidlem $f : S^k \to S$

Každá buňka $i \in \mathbb{Z}_n$ má určené okolí $((i + n_1) \bmod n, \ldots, (i + n_k) \bmod n)$. Prvky množiny $S^n$ nazveme konfiguracemi mřížky. Celulárním automatem pak rozumíme dvojici $(S^n, F)$, kde $F : S^n \to S^n$ je globální pravidlo dané předpisem:

$$F(s)_i = f(s_{i+n_1 \bmod n}, s_{i+n_2 \bmod n}, \ldots, s_{i+n_k \bmod n}).$$

# Elementarní celulární automaty (ECA)

Elementarní celulární automat je 1-dimensionální CA, kde

- množina stavů $S = \{0, 1\}$,
- buněčné okolí je $(-1, 0, 1)$.

Každý ECA je jednoznačně určen svým lokálním pravidlem $f : \{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}$.

# Elementarní celulární automaty (ECA)

Elementarní celulární automat je 1-dimensionální CA, kde

- množina stavů $S = \{0, 1\}$,
- buněčné okolí je $(-1, 0, 1)$.

Každý ECA je jednoznačně určen svým lokálním pravidlem $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$.

Každé takové lokální pravidlo můžeme ztotožnit s číslem

$$2^0 f(0,0,0) + 2^1 f(0,0,1) + 2^2 f(0,1,0) + \ldots + 2^7 f(1,1,1)$$

$$\in \{0, 1, \ldots, 255\}.$$

# ECA příklad: pravidlo 184

Mějme ECA $(\{0,1\}^{10}, F)$, kde $F$ je dáno lokálním pravidlem $f$:

| $x$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

# ECA příklad: pravidlo 184

Mějme ECA $(\{0,1\}^{10}, F)$, kde $F$ je dáno lokálním pravidlem $f$:

| $x$ | 111 | 110 | 101 | 100 | **011** | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0 | 1 | 1 | **1** | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | | | | | | |

# ECA příklad: pravidlo 184

Mějme ECA $(\{0,1\}^{10}, F)$, kde $F$ je dáno lokálním pravidlem $f$:

| $x$ | **111** | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | | | | | | | |

# ECA příklad: pravidlo 184

Mějme ECA $(\{0,1\}^{10}, F)$, kde $F$ je dáno lokálním pravidlem $f$:

| $x$ | **111** | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | | | | | | |

# ECA příklad: pravidlo 184

Mějme ECA $(\{0,1\}^{10}, F)$, kde $F$ je dáno lokálním pravidlem $f$:

| $x$ | 111 | **110** | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | **0** | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 0 | | | | | |

# ECA příklad: pravidlo 184

Mějme ECA $(\{0,1\}^{10}, F)$, kde $F$ je dáno lokálním pravidlem $f$:

| $x$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

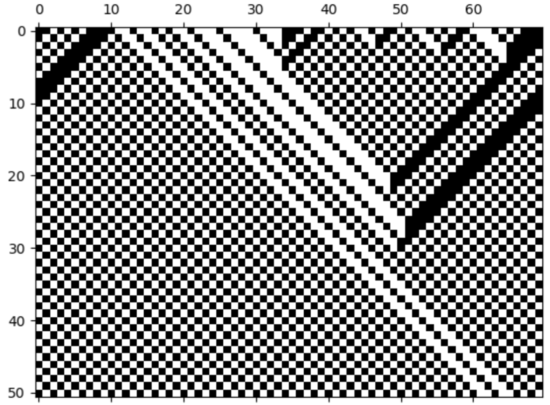
$$\Big\downarrow F$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

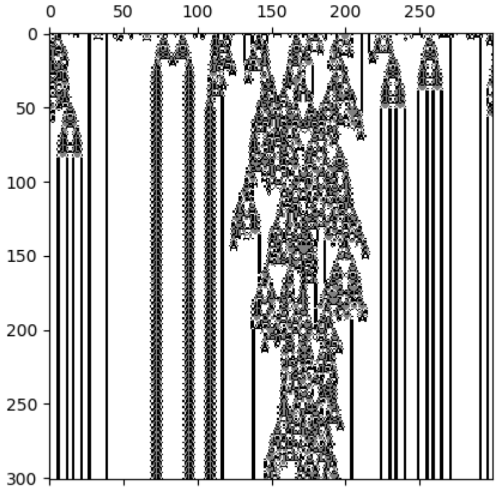
# ECA příklad: pravidlo 184

Mějme ECA $(\{0,1\}^n, F)$, kde $F$ je dáno lokálním pravidlem 184. Typicky nás zajímá dynamika systému, tj. trajektorie

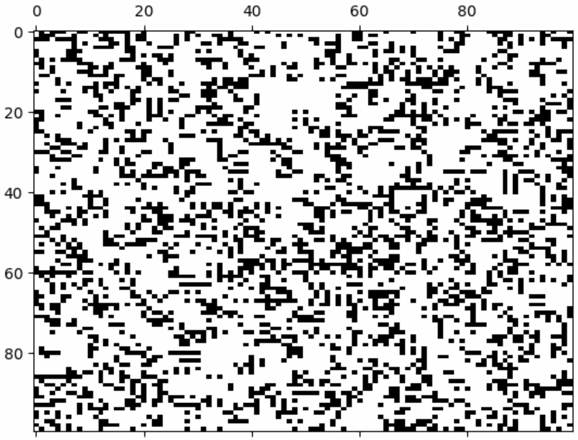
$$(u_0 = u, u_1 = F(u), u_2 = F^2(u), \ldots)$$



# CA příklad: Komplexní chování

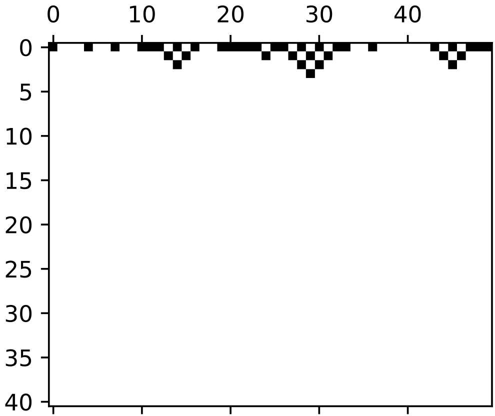


# CA příklad: Komplexní chování



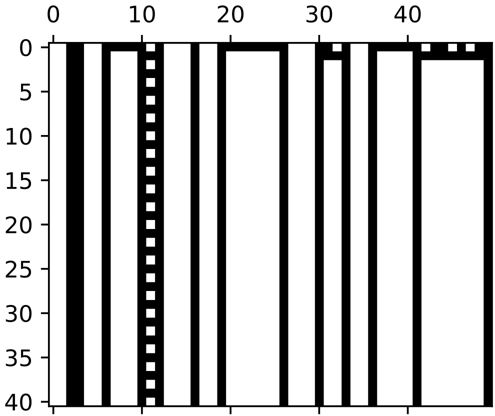
# Klasifikace celulárních automatů

**Třída 1 (homogenní)** Třída 2 (periodická) Třída 3 (chaotická) Třída 4 (komplexní)



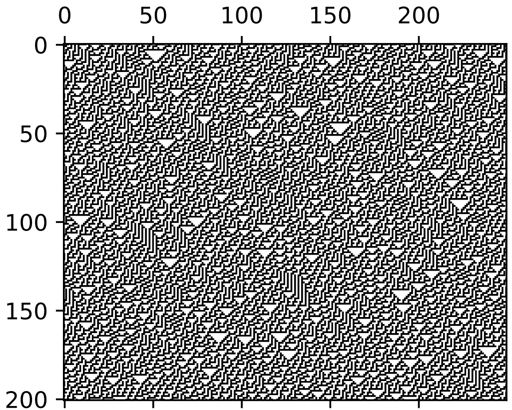
## Wolframova klasifikace

**Třída 1 (homogenní) Třída 2 (periodická) Třída 3 (chaotická) Třída 4 (komplexní)**



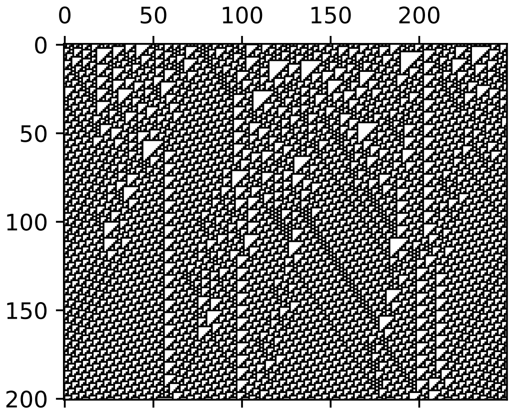
# Wolframova klasifikace

## Třída 1 (homogenní) Třída 2 (periodická) **Třída 3 (chaotická)** Třída 4 (komplexní)



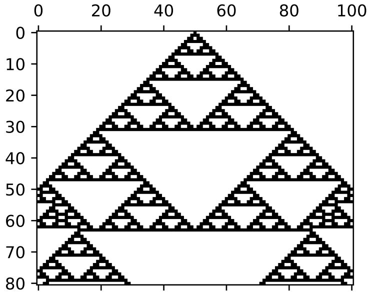
## Wolframova klasifikace

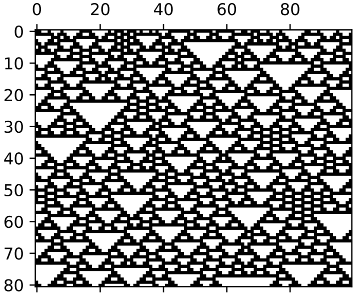
Třída 1 (homogenní) Třída 2 (periodická)
Třída 3 (chaotická) **Třída 4 (komplexní)**



# Wolframova klasifikace

- velmi intuitivní
- **problém: neformální**
- problém: jak vybírat počáteční konfigurace?
- problém: u mnoha automatů může být nejasné, kam je zařadit



# Klasifikace celulárních automatů

Ideální klasifikace celulárních automatů by měla:

- odpovídat intuitivní Wolframově klasifikaci
- být založená na formálně definované vlastnosti CA
- indikovat prostor CA s komplexním chováním
- potenciálně sloužit k automatickému vyhledávání CA s komplexním chováním
- být použitelná na co nejobecněší množinu CA

# Fázový prostor celulárních automatů

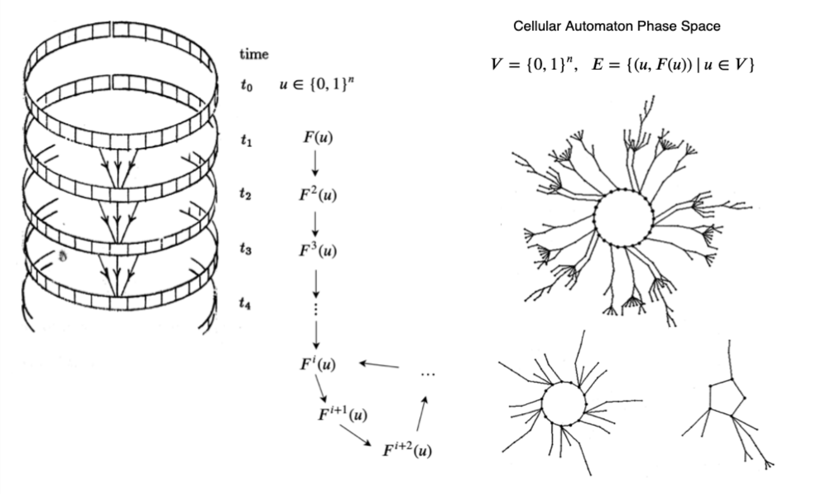
Mějme celulární automat $(\{0,1\}^n, F)$, $u \in \{0,1\}^n$.

$$(u, F(u), F^2(u), F^3(u), F^4(u), \dots)$$

# Fázový prostor celulárních automatů

Mějme celulární automat $(\{0,1\}^n, F)$, $u \in \{0,1\}^n$.

$$(u, F(u), F^2(u), F^3(u), F^4(u), \ldots)$$



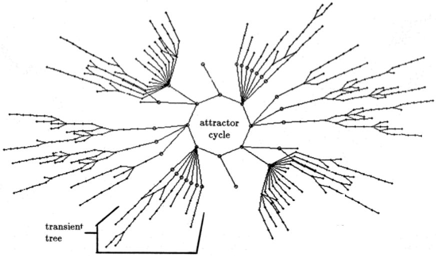
# Fázový prostor celulárních automatů

Mějme celulární automat $(\{0,1\}^n, F)$. $\forall u \in \{0,1\}^n$ je posloupnost $(u, F(u), F^2(u), F^3(u), \ldots)$ eventuálně periodická.
Tj. $\exists\, i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$, takové že $F^i(u) = F^j(u)$ a $(i, j)$ je nejlmenší možné vzhledem k $<_{Lex}$.

$(u, F(u), \ldots, F^i(u))$ … *transienta konfigurace u*

$(F^{i+1}(u), F^{i+2}(u), \ldots, F^j(u))$ … *atraktor konfigurace u*

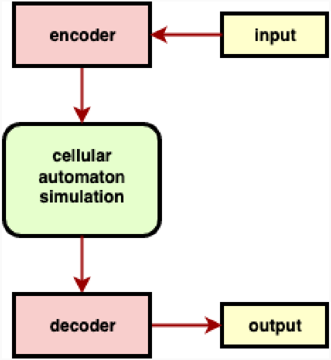
$t_u = i$ … *délka transienty konfigurace u*



# Celulární automaty jako výpočetní model

VSTUP ... zakódován do počáteční konfigurace
VÝSTUP ... obsažen v atraktoru počáteční konfigurace

Informace je zpracovávána v transientách.
Atraktory slouží jako paměťové jednotky.



# Klasifikace transient

Mějme celulární automat $(\{0,1\}^n, F)$.

Cíl:

- odhadnout průměrnou délku transient $\hat{\mu}_n \approx \frac{1}{2^n} \sum_{u \in \{0,1\}^n} t_u$
- obdržet posloupnost $(\hat{\mu}_n)$ pro zvětšující se $n$
- odhadnout asymptotický růst této posloupnosti
- na základně asymptotického chování vytvořit klasifikaci CA

Z výpočetního hlediska: průměrná délka transient $\approx$ průměrná doba výpočtu.

# Klasifikace transient

Mějme celulární automat $(\{0,1\}^n, F)$.

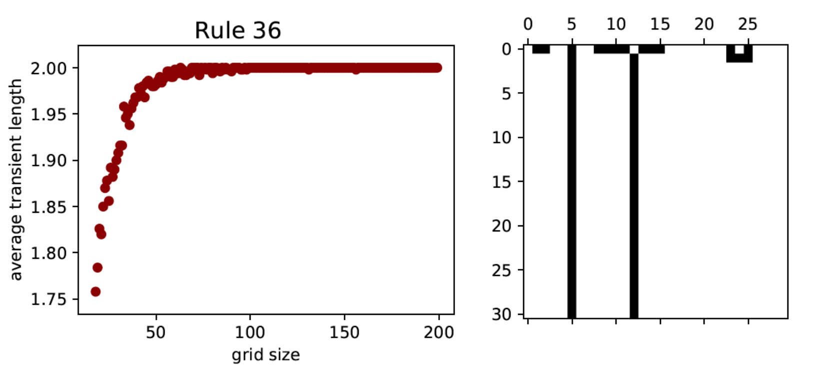
Cíl:

- odhadnout průměrnou délku transient $\hat{\mu}_n \approx \frac{1}{2^n} \sum_{u \in \{0,1\}^n} t_u$
- obdržet posloupnost $(\hat{\mu}_n)$ pro zvětšující se $n$
- odhadnout asymptotický růst této posloupnosti
- na základně asymptotického chování vytvořit klasifikaci CA

Z výpočetního hlediska: průměrná délka transient ≈ průměrná doba výpočtu.
V případě 256 ECA vyšel velmi jasný asymptotický růst pro většinu pravidel. Dominance čtyř tříd.

**Konstantní** Log Lin Exp

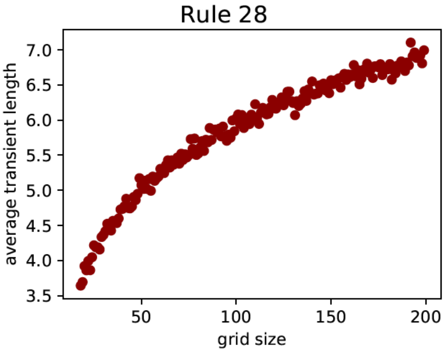
$30,68\%$

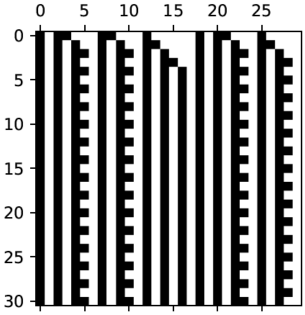


# Klasifikace transient - ECA

**Konstantní** **Log** **Lin** **Exp**

$44,32\%$

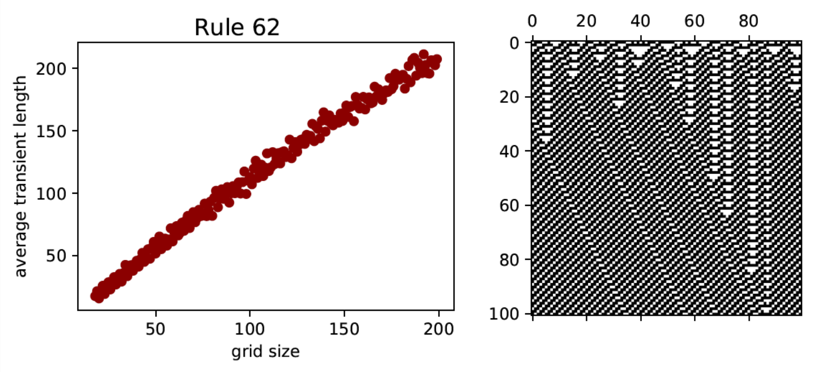


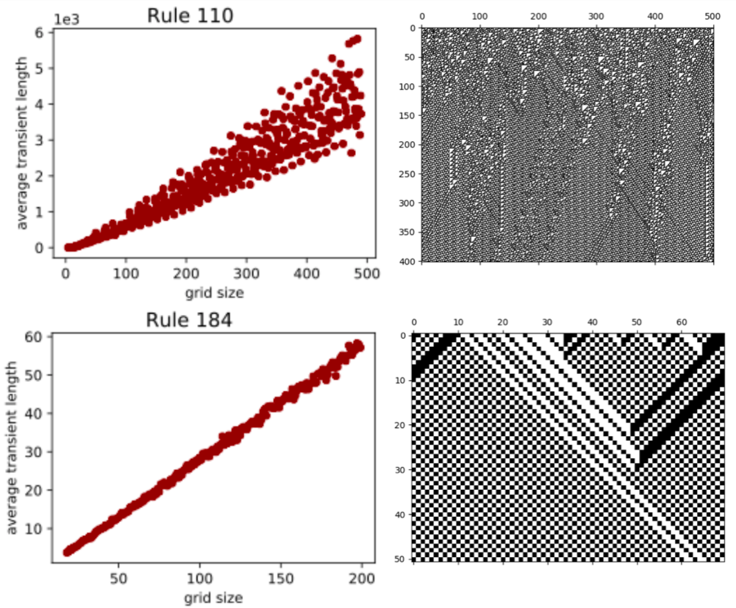
# Klasifikace transient - ECA

**Konstantní** **Log** **Lin** **Exp**

$9,09\%$



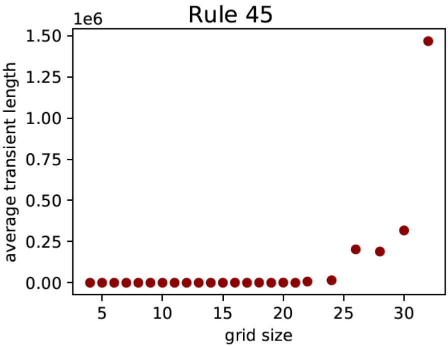
# Klasifikace transient - lineární třída

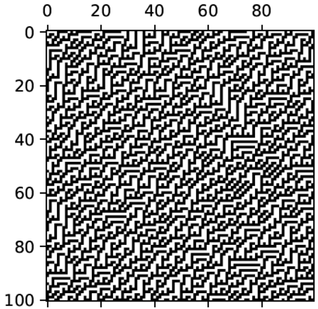


# Klasifikace transient - ECA

Konstantní **Log** Lin **Exp**

$6,82\%$

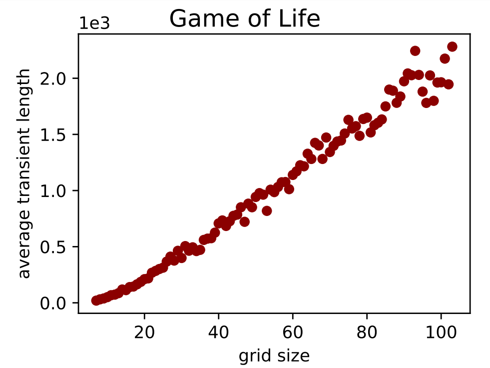


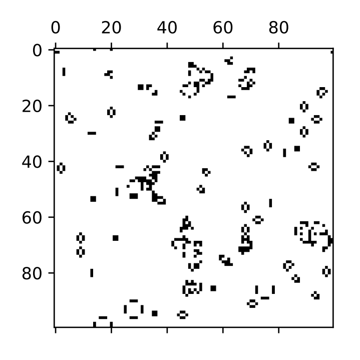



# Klasifikace transient - vlastnosti

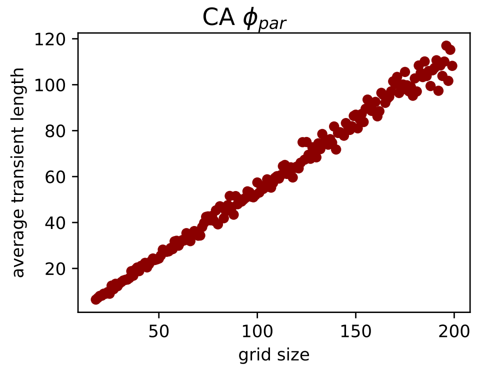
- pro ECA máme velmi dobrou korespondenci s Wolframovou klasifikací
- je založena na formálně definovaném pojmu
- **platí i pro obecnější množiny CA?**

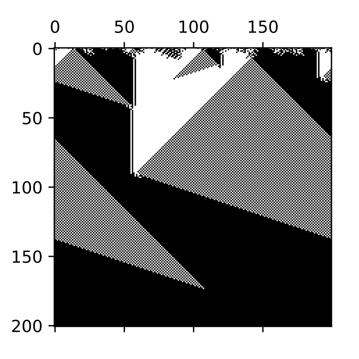
# Game of Life


Game of Life
1e3
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
average transient length
20
40
60
80
100
grid size

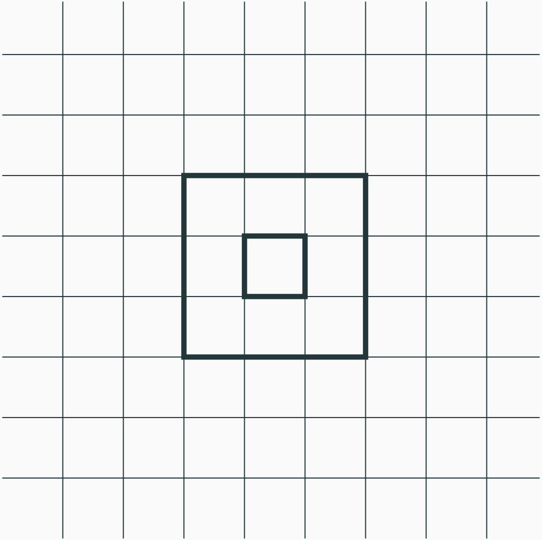

0
20
40
60
80
0
20
40
60
80

# Majoritní CA



# Klasifikace transient - 2D 3S CA

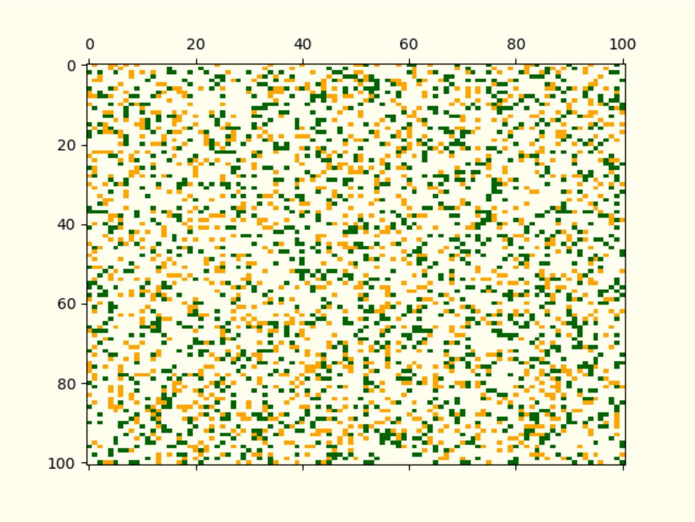


$S = \{0, 1, 2\}$

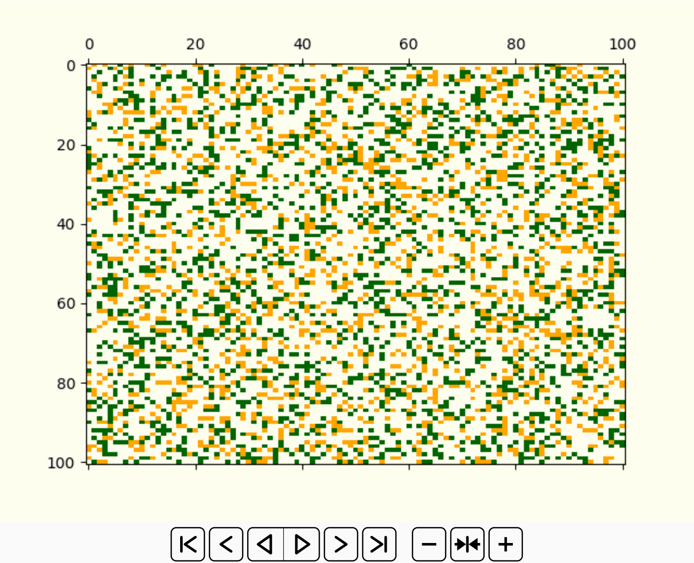
# Klasifikace transient - 2D 3S CA

| Classification of 2D 3state CAs (10 000 samples) | |
|---|---|
| Transient Class | Percentage of CAs |
| Bounded Class | 0% |
| Log Class | 18.21% |
| Lin Class | 1.17% |
| Poly Class | 1.03% |
| Exp Class | 72.62% |
| Unclassified | 6.97% |

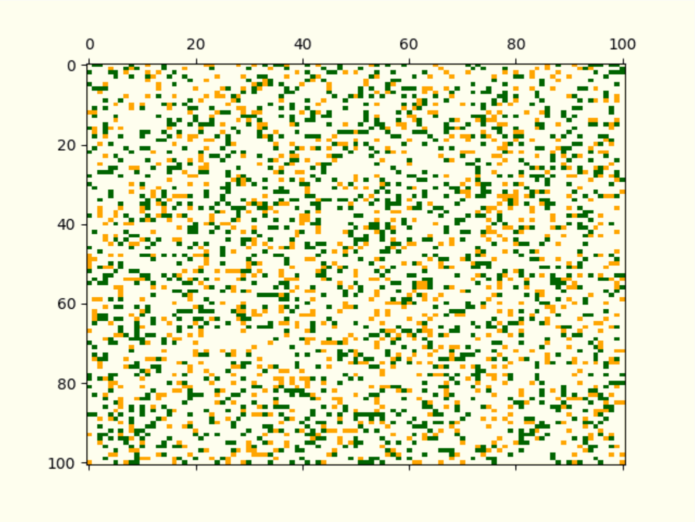
# Příklad z logaritmické třídy



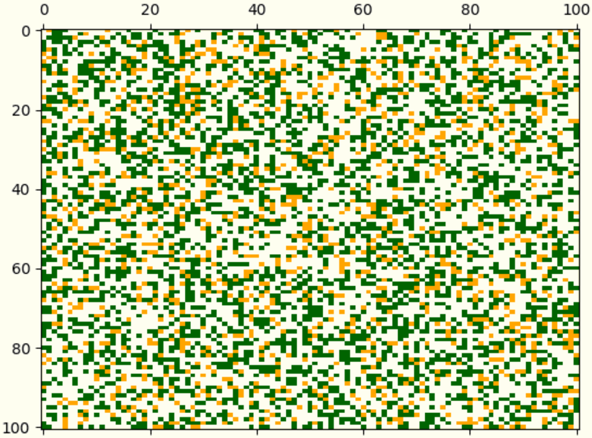
# Příklad z exponenciální třídy



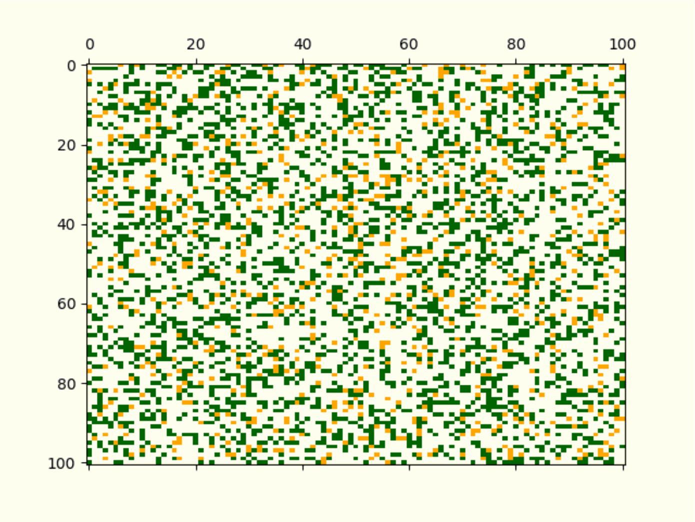
# Příklad z lineární třídy



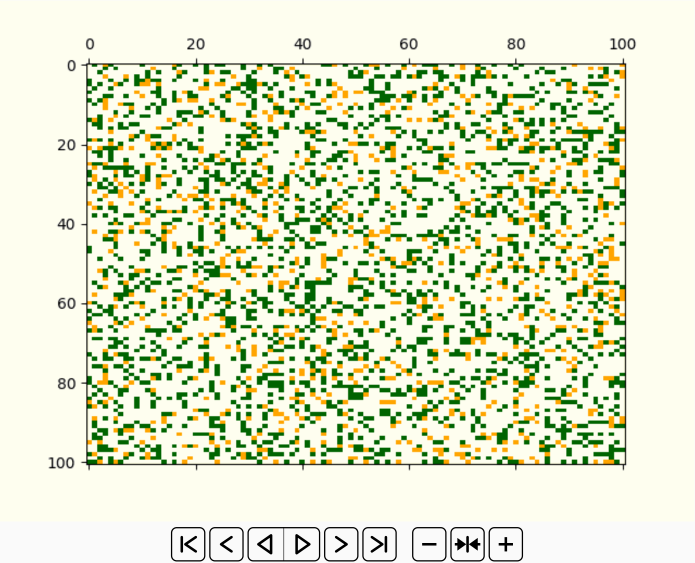
# Příklad z lineární třídy



# Příklad z lineární třídy



# Příklad z lineární třídy



## Závěr a další otevřené problémy

- lineární třída obsahuje netriviální množství zajímavých CA
- dala by se klasifikace rozšířit na další diskrétní dynamické systémy?
- jak dokázat/vyvrátit, že chaotické CA mají triviální výpočetní kapacitu?
- jak programovat celulární automaty?

## Zábavné zdroje

- https://www.complexityexplorer.org/
- http://www.complexity-explorables.org/

**Děkuji za pozornost.**