Úvod

Otázka povahy zmien v matematike bola prvý krát systematicky diskutovaná v druhej polovici 19. storočia v súvislosti s objavom neeuklidovských geometrií. Táto diskusia je dokladom zásadnej zmeny v pohľade na matematiku. Ešte na začiatku 18. storočia bolo bežné, že matematici dodávali legitimitu a vážnosť svojim objavom tým, že ich pripisovali antickým predchodcom. Pritom implicitne predpokladali, že matematické poučky vyjadrujú večné a nemenné pravdy a ich objav je iba náhodná udalosť, keď si niekto tieto večné pravdy uvedomí. Stratégiu pripisovania vlastných objavov antickým autorom používal ešte aj Newton. Podľa svedectva Nicolasa Facia de Drivilliera bol Newton presvedčený, že všetky podstatné poučky obsiahnuté v jeho *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* boli známe učencom ako Platón či Pytagoras (Rattansi 1999, s. 239).

Osvietenská idea pokroku a romantická predstava tvorivého génia však zásadne zmenili pohľad na problematiku objavov v matematike. Pri diskusii o objave nových geometrií, ktorá sa rozprúdila v druhej polovici 19. storočia, stála už v popredí osoba tvorcu. Kontext, v ktorom bola otázka zmien v matematike diskutovaná bol tak kontextom ***psychológie objavu***. Bolo to prirodzené, lebo väčšina autorov, vystupujúcich v tejto diskusii, ako Hermann von Helmholtz, Eugenio Beltrami, Felix Klein, či Henri Poincaré boli aktívni matematici, ktorí mali k problematike zmeny v matematike osobný, ba možno povedať intímny vzťah. Vo svojich textoch sa pokúšajú o artikuláciu tohto vzťahu. V tejto súvislosti je asi najznámejšia pasáž z Poincarého knihy *Science et Méthode* z roku 1908:

> *„Dva týždne som sa pokúšal dokázať, že nemôžu existovať žiadne funkcie analogické tým, ktoré som neskôr nazval fuchsovskými. Nemal som však pravdu; denne som si sadal k písaciemu stolu a hodinu alebo dve som skúšal veľké množstvo kombinácií, ale nedospel som k žiadnemu výsledku.*
>
> *Raz večer som si proti svojmu zvyku dal čiernu kávu a nemohol som zaspať. Myšlienky sa zhlukovali, cítil som, ako do seba narážajú, pokiaľ sa dve – aby som tak povedal – do seba nezavesili a nevytvorili stabilnú kombináciu. Ráno som potom dokázal existenciu jednej triedy fuchsovských funkcií – tých, ktoré zodpovedajú hypergeometrickému radu. Ostávalo mi už len spísať výsledky a to zabralo pár hodín.*
>
> *Potom som chcel tieto funkcie vyjadriť ako podiel dvoch radov; táto myšlienka bola vedomá a premyslená, viedla ma analógia s eliptickými funkciami. Pýtal som sa, aké vlastnosti by museli mať tieto rady, keby mali existovať a dospel som bez ťažkostí k radom, ktoré som nazval theta-fuchsovskými.*

V tom čase som opustil Caen, kde som vtedy býval, aby som sa zúčastnil nejakej geologickej exkurzie, organizovanou banskou školou. Priebeh tejto exkurzie mi dal zabudnúť na moju prácu. Keď som prišiel do Coutances, nastupovali sme do autobusu na nejaký výlet; v okamžiku, kedy som položil nohu na schod, objavila sa mi idea – bez akýchkoľvek, zdalo by sa, predchádzajúcich úvah – idea, že tie transformácie, ktoré som používal pri definícii fuchsovských funkcií, sú identické s transformáciami neeuklidovskej geometrie. Neoveril som si to, nemal som k tomu ani čas, pretože sotva sme sa v autobuse usadili, pokračoval som v začatom rozhovore. Ale istotu som už mal.“

V uvedenej pasáži Poincaré analyzuje súhru intuície a cieľavedomého myslenia pri matematickej tvorbe. Tento a podobné texty udávali tón diskusie o filozofii matematiky na konci 19. storočia. Učenci, ktorí boli v mladosti protagonistami prevratných zmien v matematike sa v zrelom veku pokúšali o filozofickú reflexiu týchto zmien.

Po objave logických paradoxov na začiatku 20. storočia sa záujem matematikov postupne presunul do oblasti základov matematiky. Ako hlavných iniciátorov debaty o základoch matematiky možno spomenúť Gottloba Fregeho, Bertranda Russella, Davida Hilberta či Ernsta Zermela a možno povedať, že táto debata trvá dodnes (pozri Schirn 1998). Diskusia o základoch matematiky odsunula otázku povahy zmien v matematike na druhý plán záujmu. Jedným z dôležitých rozlíšení, ktoré debata o základoch matematiky priniesla, bolo odlíšenie kontextu objavu a kontextu zdôvodnenia. Podľa tohto rozlíšenia možno v súvislosti s každým (matematickým) poznatkom klásť dve zásadne rozdielne skupiny otázok. Prvá skupina, tvoriaca kontext objavu daného poznatku, sa týka toho kto, kedy a za akých okolností daný poznatok objavil. Kladenie takýchto otázok nasmeruje náš záujem do oblasti psychológie, sociológie, histórie, a po krátkom čase sa ocitneme mimo samotnej filozofie matematiky. Druhá skupina otázok, tvoriaca kontext zdôvodnenia daného poznatku, sa týka toho, za akých predpokladov je poznatok platný, aké podmienky musia byť splnené pri jeho zdôvodnení. Je zrejmé, že pri kladení takýchto otázok zotrvávame v oblasti samotnej filozofie matematiky.

Z pohľadu odlíšenia kontextu objavu a kontextu zdôvodnenia diskusie o základoch matematiky spadali jednoznačne do kontextu zdôvodnenia. Naproti tomu otázka povahy zmien v matematike, ktorá dominovala na konci 19. storočia, spadala skôr do kontextu objavu. Keďže zástanci uvedeného rozlíšenia boli presvedčení, že filozofia matematiky by sa mala obmedziť na kontext zdôvodnenia, zrodili sa snahy otázku o povahe zmien v matematike z filozofie matematiky vylúčiť a presunúť ju do kompetencie psychológie. Do istej miery k takýmto snahám mohol zvádzať psychologický kontext, v ktorom bola táto otázka na konci 19. a začiatku 20. storočia diskutovaná. Aj keď pokus vylúčiť otázku o povahe zmien v matematike z filozofie matematiky neuspel, *kritika psychologizmu* zo strany zástancov fundacionalistického prístupu upozornila na nedostatky v spôsobe nastolenia tejto otázky. Ukázala na nutnosť intersubjektívneho preformulovania problému.

Preto keď zásluhou prác Georga Polyu ako *How to solve it* (Polya 1945), *Mathematics and Plausible Reasoning* (Polya 1954) a *Mathematical Discovery* (Polya 1962), rovnako ako série článkov Imre Lakatosa *Proofs and Refutations* (Lakatos 1963-64) diskusia o povahe zmien v matematike znova ožíva, kontext psychológie objavu je nahradený kontextom ***metodológie zmeny***. Do centra záujmu sa dostali otázky dôkazu, plauzibilnej argumentácie, heuristík a vyvrátenia, teda otázky predstavujúce intersubjektívny aspekt objavu. V tomto kontexte Polya rozvíja svoje „*methods of plausible reasoning*“ a Lakatos formuluje metódu „*proofs and refutations*“. Prechod od psychológie objavu k metodológii zmeny sa ukázal ako šťastný ťah, lebo takto sa filozofia matematiky dostala do kontaktu s diskusiami vo filozofii vedy. Keď roku 1962 vyšla Kuhnova práca *The Structure of Scientific Revolutions,* premostenie filozofie matematiky s filozofiou vedy otvorilo možnosť zaujímavého dialógu. Jednak Lakatos pomocou miernej adaptácie svojich pozícií v oblasti matematiky dospel k *metodológii vedecko-výskumných programov*, čím mohol vstúpiť do diskusií s Kuhnovou koncepciou v oblasti filozofie vedy.

Naopak tým, že diskusia otázky charakteru zmeny v matematike bola formulovaná v kontexte metodológie, otvorila sa možnosť preniesť Kuhnovu pozíciu do oblasti matematiky a položiť otázku o možnosti revolúcií v matematike. V tejto súvislosti treba spomenúť práce Michaela Crowa *Ten ‘laws’ concerning patterns of change in the history of mathematics* (Crowe 1975), Herberta Mehrtensa *T. S. Kuhn’s theories and mathematics: a discussion paper on the ‘new historiography’ of mathematics* (Mehrtens 1976) a Josepha Daubena *Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge* (Dauben 1984). Vo filozofii matematiky sa rozprúdila diskusia, ktorej zhrnutie možno nájsť v knihe *Revolutions in Mathematics* (Gillies 1992). Zdá sa, že kontext metodológie je pre diskusie povahy zmien vo vývine matematiky plodný, a ako o tom svedčia knihy

The Growth of Mathematical Knowledge (Grosholtz a Breger, 2000) alebo *Philosophy of Real Mathematics* (Corfield 2003) dodnes priťahuje záujem.

V 1950-tych a 1960-tych rokoch, kedy v diskusii o charaktere zmien v dejinách matematiky dominovala problematika metodológie zmeny, v analytickej filozofii došlo k významnej zmene. V nadväznosti na dielo Ludwiga Wittgensteina a rady autorov ako Willard van Orman Quine, John Austin, Wilfried Sellars, Paul Grice, Georg Henrik von Wright, Donald Davidson, Hilary Putnam či Jaakko Hintikka sa vo filozofii zmenil spôsob kladenia otázok ako aj rovina, v ktorej sa hľadajú odpovede. Ako ilustráciu tejto zásadnej zmeny pohľadu na úlohu jazyka vo filozofii matematiky možno uviesť diskusiu o *Kantovej filozofii geometrie* v prácach Jaakka Hintikku a Michaela Friedmana. V tejto diskusii išlo o úlohu nazerania pri zdôvodňovaní geometrického poznania u Kanta. Hintikka sa postavil proti všeobecne zdieľanému presvedčeniu, ktoré dominovalo vo filozofii matematiky od čias slávnych Hilbertových *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert 1899). Podľa tohto presvedčenia sú geometrické obrázky iba didaktické pomôcky, ktoré môžu uľahčiť porozumenie teórie, ale ničím neprispievajú k jej obsahu. Hintikkov argument proti tomuto presvedčeniu je, že obrázky a názorné konštrukcie hrajú v Euklidových *Základoch*, čo bol paradigmatický príklad matematickej teórie pre Kanta, dôležitú úlohu analogickú existenčnému dosadeniu v modernej logike (pozri Hintikka 1965, s. 130). Nie sú to teda didaktické či psychologické prostriedky, ale tvoria súčasť logickej výstavby geometrie. Tento argument ďalej rozvinul Friedman a ukázal, že kým neexistovala teória kvantifikácie (teda do vydania Fregeho *Begriffsschriftu* roku 1879) kompenzovali obrázky nedostatky tzv. monadickej logiky (Friedman 1985, s. 466-468).

Na Hintikkových a Friedmanových argumentoch je dôležité to, že na jazyk matematiky sa pozerajú nie ako na nejaký dokonalý nadčasový kalkul, ale chápu ho ***historicky***. Zakladajú tak určitú dejinnosť v pohľade na základy matematiky. Matematika je budovaná vždy určitými prostriedkami a historicita týchto prostriedkov dáva historickú dimenziu základom matematiky. Pritom je to dejinnosť iného druhu než ako sa dejinnosť bežne chápe. Tu nejde o nejaký externý vplyv, o pôsobenie „ducha doby“ či „spoločenských podmienok“. Dejinnosť základov matematiky je interná, tkvie v dejinnosti jazyka matematiky. Ide o to, že logický aparát, pomocou ktorého budujeme matematické teórie, je historicky podmienený. V určitých dobách určité logické odvodenia jednoducho technicky neboli možné. Druhým dôležitým aspektom Hintikkových a Friedmanových úvah je, že ako plnohodnotnú a so symbolickou časťou jazyka rovnocennú zložku uvažujú ***geometrické obrázky***. Zdá sa, že prvýkrát v rámci analytickej tradície sa na obrázky nepozerajú ako na psychologické pomôcky, ale ako na dôležitú súčasť logickej výstavby matematických teórií. Táto myšlienka má rozhodujúci význam, lebo poskytuje zdôvodnenie pre prístup k dejinám geometrie, ktorý je založený na analýze syntaktických a sémantických zmien v chápaní obrázkov, obsiahnutých v matematických textoch. Možno teda povedať, že rekonštrukcia dejín geometrie, ktorá bude prezentovaná v tejto knihe je do veľkej miery rozvinutím možností, ktoré otvoril Hintikka zmenou prístupu ku geometrickým obrázkom.

Ukázali sme ako v minulosti kritika zo strany základov matematiky poskytla impulz pre nový spôsob nastolenia otázky o povahe zmien v matematike a spôsobila prechod od diskusie tejto otázky v rámci *psychológie objavu* k jej analýze v kontexte *metodológii zmeny*. Zdá sa, že aj posun v rámci analytickej filozofie, ktorý sme ilustrovali na myšlienkach Hintikku a Friedmana, môže priniesť zásadný impulz pre posun v chápaní otázky o povahe zmien v matematike. Je možné, že nadišiel čas kontext *metodológie zmeny,* teda kontext v ktorom zmeny v matematike analyzovali Polya a Lakatos, nahradiť kontextom ***zmien jazyka***. Pri tomto nahradení pôjde o to pýtať sa, aké lingvistické inovácie sú spojené s tým-ktorým matematickým objavom, aký je lingvistický rámec v ktorom sa uskutočňuje určitá heuristika, akými lingvistickými prostriedkami sa robí určité vyvrátenie. Ukazuje sa, že významné objavy v dejinách matematiky sú spravidla spojené s lingvistickými inováciami. Veľkí objavitelia sú spravidla aj lingvistickí inovátori. Veľmi často je to práve zmena jazyka, zmena pravidiel syntaxe či sémantiky, ktorá pomôže matematikovi vyjadriť určité súvislosti, ktoré boli dovtedy nevyjadriteľné, a tým umožní objav. Keď diskusiu o zmenách vo vývine matematiky presunieme z kontextu *metodológie zmeny* do kontextu *zmien jazyka*, dostáva sa celá diskusia o zmenách v matematike na pevnejší základ.

Samozrejme, otázky jazyka sú ústredným momentom diskusie o základoch matematiky od čias Fregeho, Peana a Hilberta. Problémom však bolo, že v diskusiách o základoch matematiky sa jazyk chápal ako dokonalý, atemporálny logický kalkul. Keď matematiku prestaneme vnímať na pozadí dokonalého logického jazyka a prijmeme historicitu jazykových prostriedkov matematiky, otvára sa možnosť vziať vážne pluralitu jazykových nástrojov, ktoré boli v priebehu dejín v matematike vytvorené. Môžeme sa tak pokúsiť *vyložiť vývin matematiky ako postupnosť lingvistických inovácií*. Pri takomto prístupe k zmenám v dejinách matematiky sa budeme riadiť tromi zásadami:

1. Namiesto psychológie či metodológie budeme otázku o povahe zmien v matematike skúmať v kontexte jej jazyka. Teda zmeny v matematike budeme chápať ako *zmeny* ***jazyka*** *matematiky*.
2. Jazyk matematiky budeme chápať historicky, teda nie ako určitý dokonalý kalkul existujúci mimo času. Budeme rekonštruovať jazyky jednotlivých historických období a pokúsime sa porozumieť prechodom od jazyka jedného obdobia k jazyku nasledujúceho. Teda zmeny v matematike budeme chápať ako ***zmeny*** *jazyka matematiky*.
3. Jazyk matematiky budeme chápať čo najbližšie k jej potrebám. Nebudeme matematike nanucovať nejaké apriorné chápanie jazyka. Do jazyka zahrnieme pravidlá konštrukcie a interpretácie geometrických obrázkov ako aj pravidlá formovania a používania symbolických výrazov. Teda zmeny v matematike budeme chápať ako *zmeny jazyka* ***matematiky***.

Hlavná prednosť jazykového prístupu k rekonštrukcii zmien v dejinách matematiky spočíva v tom, že umožňuje odlíšiť viaceré druhy zmien. Pokiaľ sa na zmeny pozeráme z hľadiska psychológie objavu alebo z hľadiska metodológie, tak všetky zmeny sú v zásade rovnaké. Rozdiely, s ktorými sa stretávame sú dané buď rozdielmi v individuálnom psychickom uspôsobení jednotlivých tvorcov (niekto uvažuje viac vizuálne, iný symbolicky), alebo tým, že rôzni matematici používajú odlišné heuristiky. Naproti tomu ak sa na určitú zmenu v matematike pozrieme z hľadiska jazyka, máme do činenia s dvoma jazykmi - jazykom pred a jazykom po zmene. Jazyk je pritom nepomerne lepšie prístupný analýze ako psychologický akt objavu alebo heuristika, ktorá k objavu viedla. Nový jazyk, ako výsledok procesu objavu, ako produkt heuristík, je nositeľom celého radu objektívnych aspektov, ktoré možno exaktne analyzovať. Čo je však hlavné, jazykový prístup otvára možnosť jednotlivé zmeny porovnávať a triediť. Takto, porovnávaním veľkého počtu jazykových zmien sme dospeli k odlíšeniu troch úrovní, na ktorých dochádza k lingvistickým inováciám.

Na prvej úrovni ide o zmeny spôsobu ***generovania indivíduových deskripcií***. V prípade symbolického jazyka sú to zmeny spôsobu tvorby termov, v prípade geometrického jazyka sú to zmeny pravidiel konštrukcie obrázkov. Na tejto úrovni lingvistické inovácie spájajú do jednej vývinovej línie aritmetiku, algebru, infinitezimálny počet a predikátový počet, ak sa obmedzíme na symbolickú stránku matematiky; respektíve syntetickú geometriu, analytickú geometriu a fraktálnu geometriu, ak sa obmedzíme na stránku geometrickú. V oboch týchto líniách vývin spočíva v zmene spôsobu generovania indivíduových deskripcií. Tento typ zmien jazyka matematiky nazývam ***re-prezentácia***, a je mu venovaná prvá kapitola knihy.

Druhý typ zmien jazyka ponecháva spôsob generovania výrazov jazyka prakticky nezmenený, a mení len ***vzťah výrazov jazyka k objektom, ktoré zastupujú***. Na tejto úrovni lingvistické inovácie spájajú do jednej línie Euklidove *Základy*, projektívnu geometriu, Lobačevského geometriu, Kleinov Erlangenský program a algebraickú topológiu. V tejto línii sa nemenia indivíduové deskripcie jazyka, ide stále o tie isté objekty syntetickej geometrie – body, úsečky a oblúky kružníc. Mení sa však spôsob ako ich interpretujeme, ako im pripisujeme zmysel. Trojuholník u Euklida, v projektívnej geometrii, u Lobačevského či Kleina vyzerá síce na papieri stále rovnako, je zakaždým je to niečo iného, má iné vlastnosti, platia o ňom iné tvrdenia. Tento typ zmien jazyka matematiky nazývam ***objektácia*** a je mu venovaná druhá kapitola knihy.

Tretia úroveň zmien sa týka rôznych spôsobov ***formulácie určitej teórie***. Ako príklad možno uviesť rôzne axiomatizácie Euklidovej geometrie ako sa vyskytli od Euklida až po Hilberta. Tu nešlo o to odkryť pre matematiku nové univerzum objektov (ako pri *re-prezentáciách* spojených so vznikom analytickej alebo fraktálnej geometrii) ani o zásadne nové konceptuálne pochopenie priestoru (aké priniesli objektácie spojené so vznikom neeuklidovskej geometrie alebo algebraickej topológie). Objekty o ktorých má teória hovoriť, ako aj pojmy a vety, ktoré by mali platiť sú v zásade nemenné. Čo sa mení je formulácia východiskových princípov a celkový plán výstavby teórie. Tento typ zmien nazývam ***re-formulácie*** a je im venovaná tretia kapitola.

Odlíšenie jednotlivých úrovní, na ktorých dochádza ku zmenám umožňuje odhaliť regularity, ktoré doteraz ostali skryté. Keď sa totiž na zmeny pozeráme z hľadiska *metodológie*, kladieme všetky zmeny vedľa seba, pretože pri najrôznejších typoch zmien možno uplatniť podobné heuristiky či analogické stratégie plauzibilnej argumentácie. Takto, pri metodologickom prístupe k skúmaniu zmien v matematike, sa špecifiká jednotlivých typov zmien strácajú a ostáva len to, čo majú všetky tri typy spoločné. Rozdiel medzi Kuhnom a Lakatosom je potom len v tom, že spoločné črty všetkých typov zmien opisuje Kuhn prostriedkami sociológie (ako reakciu vedeckého spoločenstva na zmenu), kým Lakatos hľadá spoločné heuristiky (ktoré nazve vedecko-výskumný program).

Až keď sa zameriame na jazyk, pomocou ktorého sa formuluje nová teória (na ktorú reaguje spoločenstvo, resp. ktorá je výsledkom heuristík), až potom sa pred nami otvára možnosť odlíšiť rôzne typy zmien. Keď ich od seba oddelíme a každý typ zmien preskúmame osobitne, bez rušivej interferencie ostatných, odkryjú sa pred nami pozoruhodné regularity. Kuhnova a Lakatosova teória zmien tieto regularity rozmazávala rovnako, ako rozmaže obrysy tváre fotograf, ktorý na seba premietne obrázky troch úplne odlišných tvárí. To čo na výslednej fotografii ostane sú iba hrubé črty spoločné všetkým tváram (dve tmavé škvrny na mieste očí, oválny tvar tváre, etc.). Podobne aj Kuhnovi ostala iba sociálna dynamika adaptácie vedeckého spoločenstva na zmenu, ktorá je spoločná všetkým trom typom zmien, opísaným v tejto knihe. Lakatosovi ostali zas len nešpecifické heuristické stratégie ako *monster barring* či *lemma incorporation*, ktoré možno použiť v každej oblasti. Tieto spoločné črty však zastierajú to, čo je v každom z troch typov lingvistických inovácií špecifické. Lebo nie je jedno, akú povahu má zmena, na ktorú spoločenstvo reaguje, a na akej úrovni sa nasadzujú heuristiky. Preto opis typov zmien v dejinách matematiky, uvedený v tejto knihe, možno považovať za zjemnenie Kuhnovej a Lakatosovej teórie zmien pri ich aplikácii na vývin matematiky.

1. Re-prezentácia ako prvý typ zmeny vo vývine matematiky

Pozornosť, ktorá je v súčasnej filozofii matematiky venovaná geometrii a aritmetike je veľmi rozdielna. Kým štúdium aritmetiky hrá ústrednú úlohu vo fundacionalistických prístupoch (pozri Schirn 1998) a preto logická stavba aritmetiky je podrobne preskúmaná a dobre jej rozumieme, geometria stojí v centre záujmu nefundacionalistických prístupov (pozri Boi, Flament a Salanskis 1992). Tým samozrejme nechceme povedať, že by neexistovali fundacionalistické analýzy geometrie; stačí spomenúť práce Alfreda Tarského (pozri Tarski 1948 a 1959). Avšak pri týchto skúmaniach je geometria iba ďalšou ilustráciou metód, ktoré boli rozpracované pri analýze aritmetiky. Vizuálna stránka geometrie, teda skutočnosť, že geometria má niečo do činenia s priestorom a s nazeraním, je v týchto výskumoch ignorovaná. Tieto výnimky preto nemenia základný fakt, že filozofia aritmetiky je dominantne fundacionalistická, kým vo filozofii geometrie dominuje antifundacionalistický prístup.

Príčina tejto asymetrie spočíva v odlišných prístupoch k jazyku týchto oblastí matematiky. Od Fregeho, Peana a Russella je jazyk aritmetiky plne formalizovaný a aritmetické formuly tvoria konštitutívnu súčasť teórie. Na druhej strane geometrické obrázky sú väčšinou filozofov považované iba za heuristické pomôcky, ktoré síce môžu pomôcť porozumieť teórii, ale do samotnej teórie vlastne nepatria. Od čias Hilberta sa obsah geometrickej teórie považuje za nezávislý od obrázkov; vymedzený je výlučne axiómami. Pri formalizácii aritmetiky sa jej špeciálne znaky ako „34“, „+“, „<“ ako aj pravidlá, ktorým podliehajú, považujú za súčasť jazyka. V geometrii proces formalizácie prebiehal opačným smerom a špeciálne znaky, ako „.“ alebo „———“ boli z jazyka vylúčené. Zaujímavú analýzu dôvodov pre vylúčenie diagramov a diagramatického uvažovania zo základov matematiky možno nájsť u Gravesa v *The Philosophical Status of Diagrams* (Graves 1997).

Aj keď existovali dobré dôvody pre uvedený smer rozvoja základov matematiky, asi by stálo za to pokúsiť sa premostiť medzeru, ktorá oddeľuje filozofiu aritmetiky od filozofie geometrie. Za týmto účelom by bolo potrebné urobiť s jazykom geometrie to, čo Frege urobil s jazykom aritmetiky. V prvom rade to znamená pokúsiť sa formalizovať vizuálnu stránku jazyka geometrie. Mohli by sme sa pokúsiť v obrázkoch prestať vidieť iba heuristické pomôcky a začať ich vnímať ako legitímnu súčasť geometrických teórií. Išlo by o to geometrické obrázky považovať za výrazy ikonického jazyka, výrazy ktoré majú svoju jednoznačnú syntax a sémantiku. Tu by bolo možné sledovať určitú analógiu s aritmetikou alebo algebrou.[1] Ak by sa to podarilo, umožnilo by to zásadne prehĺbiť porozumenie tým úsekom dejín geometrie, v ktorých hrali obrázky a na nich založená argumentácia dôležitú úlohu (teda vlastne celým dejinám geometrie pred Paschom a Hilbertom).

Pre naše účely postačí dať predbežnú charakterizáciu tohto chápania jazyka geometrie. Ak geometrický obrázok vyložíme ako výraz (term) jazyka geometrie, tak geometrická konštrukcia je vlastne opis vytvárajúcej postupnosti tohto výrazu (obrázku). Takto Euklidove postuláty ako „*danými dvoma bodmi viesť priamku*“ alebo „*z daného bodu opísať daným polomerom kružnicu*“ sa stávajú formačnými pravidlami jazyka geometrie, analogickými s Fregeho pravidlami pre symbolické jazyky, ktoré predpisujú, ako z n-árneho funkcionálneho symbolu F a n termov t_1, t_2, ..., t_n, možno utvoriť nový term $F(t_1, t_2,..., t_n)$. Samotný výraz (obrázok) považujem za dobre utvorený, až keď sa konštrukciu podarí dokázať (t.j. keď sa dokáže, že priamky nakreslené na obrázku ako prechádzajúce jedným bodom naozaj jedným bodom prechádzajú, a pod.). Keď prepíšeme Euklidove postuláty 1, 2, 3 a 5 (pozri Euklides, s. 154) do tvaru formačných pravidiel, dostaneme všeobecný opis jazyka geometrie.[2] Kedy sa dva termy rovnajú, ako je možné zaviesť do tohto jazyka predikáty, a ako vyzerajú jeho propozície, to sú zložité otázky, ktorým sa tu nemôžeme venovať, lebo by nás odviedli ďaleko od témy našej knihy. Pre naše ciele stačí keď si uvedomíme, že analýze ikonického jazyka geometrie možno aspoň v princípe dať rovnakú mieru exaktnosti, akú zaviedol Frege do analýz symbolického jazyka aritmetiky, keď definoval jeho konštanty, premenné a funkcionálne symboly.

Matematika preto nie je tvorená exaktným symbolickým jazykom, ktorý je doplnený heuristickými obrázkami. Z nášho hľadiska sa matematika zakladá na dvoch rovnocenných typoch jazykov, jeden z nich je symbolický, druhý ikonický. Rôzne typy jazykov sa nelíšia ani tak stupňom exaktnosti, ale skôr tým, ako k nim pri filozofickej analýze matematiky pristupujeme. Samozrejme, jazyk syntetickej geometrie nie je jediným príkladom ikonického jazyka používaného v geometrii. Medzi ikonické jazyky patrí okrem jazyka syntetickej geometrie aj jazyk analytickej geometrie a jazyk fraktálnej geometrie.

Keď jazyk matematiky doplníme o obrázky syntetickej, analytickej a fraktálnej geometrie, zásadne to rozšíri možnosti nášho jazykového prístupu k analýze zmien v dejinách matematiky. Pri analýze lingvistických inovácií v dejinách matematike sa odhalí zvláštny periodický pohyb, spočívajúci v striedaní období dominancie symbolického jazyka s obdobiami dominancie ikonického jazyka. V civilizáciách starovekého Egypta a Babylonu dominoval kalkulatívny prístup k riešeniu matematických problémov, v antickom Grécku sa do popredia dostala geometria kým 15. a 16. storočie prináša opätovné oživenie symbolického prístupu v podobe algebry. Neskôr, v súvislosti so vznikom analytickej geometrie sa opäť do popredia dostáva geometria, kým 19. storočie prináša návrat k symbolickému jazyku v podobe aritmetizácie matematickej analýzy. Tento fenomén doteraz nebol dostatočne analyzovaný. Príčinou neochoty podrobnejšie ho preskúmať bolo, že striedanie kalkulatívnych a názorných období v dejinách matematiky má pomerne vágny charakter. Domnievame sa však, že táto vágnosť je spôsobená iba nedostatočným pochopením povahy jazyka geometrických obrázkov. Pokiaľ je pre nás obrázok a vôbec geometrický názor čosi neurčité, tak aj jeho striedanie so symbolickým jazykom, ktoré je v dejinách matematiky jasne pozorovateľné, nemôže mať iné, než vágne obrysy. Keď vyložíme geometrické obrázky ako ikonický jazyk, vytvoríme tým rámec, v ktorom bude možné porozumieť vzťahu symbolických a ikonických období v dejinách matematiky a v ich striedaní odhaliť prvý typ zmien v dejinách matematiky.

1.1 Historický opis re-prezentácií

Pri rekonštrukcii lingvistických inovácií v dejinách matematiky, ktoré sme označili termínom *re-prezentácie*, sa necháme viesť Gottlobom Fregem. Frege vydal roku 1879 *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, v ktorej predložil modernú teóriu kvantifikácie a axiomatické vybudovanie predikátového počtu. V záverečnej časti práce sú definície niektorých pojmov teórie postupností. Rozvíjaniu myšlienok o číselnom rade sa Frege venoval najbližších štrnásť rokov, a roku 1893 vydal prvý diel svojho hlavného diela *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet*. Keď porovnáme logický aparát týchto dvoch prác, zistíme celý rad zmien. *Begriffsschrift* sa zakladal na syntaktickom prístupe k logike – Frege prehlásil určitý počet formúl za axiómy a z nich odvodil celú sústavu predikátového počtu. *Grundgesetze* obsahuje rad sémantických rozšírení logického systému, z ktorých najdôležitejším je zavedenie *priebehov funkcií*, pomocou ktorých Frege modeluje vo svojom systéme pojmy. Úvahy, ktoré viedli k týmto zmenám možno nájsť v trojici článkov z rokov 1891 a 1892: *Funktion und Begriff, Über Begriff und Gegendstand* a *Über Sinn und Bedeutung*. Prvý z nich obsahuje myšlienky ktoré prijmeme ako východisko pre rekonštrukciu vývinu jazyka matematiky. V jej závere Frege charakterizoval vývin matematiky od aritmetiky až k predikátovému počtu ako nárast všeobecnosti jej symbolického jazyka:

> „Keď sa teraz pozrieme späť na vývin aritmetiky, môžeme postrehnúť postupný vývin. Najprv sa počítalo s jednotlivými číslami 1-tkou, 3-kou atď. Príslušné tvrdenia sú
>
> $$2 + 3 = 5 \qquad\qquad 2 .3 = 6.$$
>
> *Potom prešli* ku všeobecnejším tvrdeniam, ktoré platia pre každé číslo. Z hľadiska označovania tomu zodpovedá prechod na písmenové počítanie. Napríklad
>
> $$(a + b) .c = ac + bc$$
>
> je tvrdenie tohto druhu. Tým dospeli ku skúmaniu jednotlivých funkcií, avšak ešte bez toho, že by v matematickom zmysle použili toto slovo a že by chápali jeho význam. *Ďalším vyšším stupňom* je spoznanie všeobecných zákonov týkajúcich sa funkcií, a tým vznik umelého termínu "funkcia". Ohľadom označenia tomu zodpovedalo zavedenie písmen neurčite ukazujúcich na funkcie, ako *f, F*. Príslušné tvrdenia sú
>
> $$\frac{df(x).F(x)}{dx} = F(x).\frac{df(x)}{dx} + f(x).\frac{dF(x)}{dx}.$$
>
> Tu už figurujú jednotlivé funkcie druhého rádu, avšak bez toho, aby uchopili to, čo my nazývame funkciou druhého rádu. Pokiaľ toto urobíme, spravíme *ďalší krok vpred*“ (Frege 1891, s. 38 a 39).

Náš výklad vývinu jazyka matematiky sa od Fregeho výkladu bude líšiť v dvoch aspektoch. Prvý je terminologický, keď algebru či analýzu považujeme za samostatné ***symbolické jazyky***. Dôležitejší je druhý aspekt, ktorý spočíva v tom, že ukážeme, ako v tomto vývine, opísanom Fregem, spolupôsobil geometrický názor. Chceme Fregeho analýzu „vývinu aritmetiky" doplniť o podobnú analýzu vývinu geometrie a ukázať, ako sú tieto dve vývinové línie prepojené. Frege identifikoval hlavné udalosti v rozvoji symbolického jazyka ako zavedenie „*jednotlivých funkcií*" v algebre, vznik „*umelého termínu funkcie*" v diferenciálnom počte a zavedenie všeobecného pojmu „*funkcie druhého rádu*" v predikátovom počte. Vedený Fregeho analýzou sa pokúsime identifikovať rozhodujúce udalosti vo vývine ***ikonického jazyka*** geometrie. Ukáže sa, že udalosti, paralelné k tým, ktoré opísal Frege, spočívajú vo vzniku analytickej a fraktálnej geometrie. Zjednotenie symbolického a ikonického jazyka nám umožní pojať vývin matematiky vcelku, ako vývin jazyka. Pri vývine jazyka matematiky budeme sledovať nasledovných šesť aspektov:

1. ***logickú silu,*** ktorá ukazuje nakoľko zložité formuly je možné v jazyku dokázať
2. ***expresívnu silu,*** ktorá ukazuje, čo nového, čo sa v predošlých štádiách vymykalo vyjadreniu, teraz jazyk umožňuje vyjadriť
3. ***explanatorickú silu,*** ktorá ukazuje, ako nový jazyk umožňuje vysvetliť zlyhania jazyka ktoré boli na predošlom štádiu nepochopiteľné
4. ***integratívnu silu,*** ktorá ukazuje, ako nový jazyk umožňuje vidieť jednotu a poriadok tam, kde na báze predošlého jazyka sa ukazovali len navzájon nesúvisiace prípady
5. ***logické medze,*** ktoré prinášajú nečakané a prekvapivé ohraničenia možností nového jazyka, obmedzenia jeho možností riešiť určité problémy, či zodpovedať isté otázky
6. ***expresívne medze,*** ktoré sa prejavujú tým, že napriek tomu, že se prísne dodržiavajú syntaktické pravidlá, v jazyku sa začínajú objavovať nezmyselné výrazy

Vývin jazyka spočíva v náraste logickej a expresívnej sily – jazyk umožňuje dokázať stále viac tvrdení a opísať stále bohatšiu oblasť javov. Postupne narastá aj jeho explanatorická a integratívna sila – jazyk umožňuje stále hlbšie porozumenie svojim metódam a poskytuje stále ucelenejší a jednotnejší pohľad na svoj predmet. Na prekonávanie jeho logických a expresívnych medzí sa rozpracovávajú stále jemnejšie a dômyselnejšie techniky a teórie. Predmetom tejto kapitoly je opis postupného narastania logickej, expresívnej, explanatorickej a integratívnej sily jazyka matematiky.[3]

Matematika má tendenciu svoje jazyky dodatočne vylepšovať. Preto sa už do jazyka aritmetiky zavádza pojem premennej (aby bolo možné v tomto jazyku dokazovať všeobecné vety), algebraická symbolika (aby bolo možné v tomto jazyku zapísať rovnice) a za základný číselný obor sa zvolia komplexné čísla (aby sa jazyk imunizoval proti problémom s odmocninami zo záporných čísel). Toto počínanie je pragmaticky veľmi výhodné, lebo aritmetike poskytuje silný jazyk, v ktorom sa možno pohodlne pohybovať. Na druhej strane nás však znecitlivuje voči historicky existujúcim jazykom. Staré jazyky nevnímame ako samostatné systémy s vlastnou logickou, expresívnou, explanatorickou a integratívnou silou, ako aj s vlastnými logickými a expresívnymi medzami. Javia sa nám skôr ako akési fragmenty nášho silného jazyka. Keďže naším cieľom je analýza vývinu jazyka matematiky, tento pragmatický prístup je pre nás nevhodný. Každý jazyk budeme charakterizovať na tej úrovni, na akej bol vytvorený. Budeme teda ignorovať dodatočné vylepšenia ktoré spočívajú v zapracovaní výdobytkov neskorších štádií (napríklad algebraického pojmu premennej) do skorších jazykov (do jazyka aritmetiky). Pre nás bude jazyk aritmetiky jazykom bez premenných. Domnievame sa, že takéto rozvrstvenie jazyka matematiky na jednotlivé historické vrstvy bude prínosné aj pre logické skúmania. Ukáže totiž, ako sa jednotlivé syntaktické inovácie postupne vynárali.

1.1.1 Elementárna aritmetika

Počítanie je tak staré, ako ľudstvo samo. V každom jazyku, ktorý poznáme, existujú slová pre označenie aspoň prvých niekoľkých čísel. Napríklad austrálske kmene z Cooperovho zálivu označujú 1 - guna, 2 - barkula, 3 - barkula guna, 4 - barkula barkula (Kolman 1961, s. 15). Postupne s rozvojom spoločnosti sa zdokonaľoval aj spôsob počítania a pri počítaní väčších množstiev sa začali používať rôzne pomôcky: najčastejšie prsty, kamienky, šnúrky s uzlami a pod. Pozoruhodná pomôcka, ktorá slúžila našim predkom v staršej dobe kamennej (19 000 - 12 000 pnl.) na počítanie väčších množstiev, bola nájdená pri vykopávkach na Morave (Ifrah 1981, s. 111). Je to vretenná kosť mladého vlka, na ktorej je 55 zárezov. Prvých 25 je zoskupených do pätíc, pričom dvadsiaty piaty zárez je dvakrát tak dlhý ako ostatné. Toto usporiadanie naznačuje zárodky päťkovej sústavy. S rozvojom civilizácie a s nutnosťou počítať stále väčšie množstvá je spojený rozhodujúci objav v dejinách ľudstva – zavedenie čísloviek ako špeciálnych znakov určených na počítanie. Prakticky každá vyspelejšia civilizácia si vytvorila svoj vlastný číselný systém, ktorý umožňoval *previesť úlohu počítania na úlohu manipulácie s číselnými znakmi*. Dochovalo sa široké spektrum rôznych spôsobov, ako je to možné urobiť. Niektoré civilizácie si zobrali za základ číselného systému číslo 60, iné číslo 10; niektoré vytvorili pozičnú sústavu, iné nepozičnú. Prehľad princípov rôznych číselných systémov možno nájsť v knihe Georgea Ifraha *Histoire Universelle des Chiffres*. Čo majú všetky tieto systémy spoločné je vytvorenie prvého ***symbolického jazyka*** v dejinách, jazyka elementárnej aritmetiky.

Jazyk elementárnej aritmetiky je najjednoduchším symbolickým jazykom. Je to jazyk založený na manipulácii s číselnými znakmi. Jeho najrozšírenejší variant obsahuje desať základných znakov 1, ..., 9, 0 a rôzne pomocné znaky ako +, –, x, :, =. Podstatnou črtou tohto jazyka je, že nemá symbol pre premennú, preto v ňom nemožno sformulovať žiadne všeobecné tvrdenie, ani napísať nijaký vzorec. Pravidlá na počítanie, napríklad pravidlo pre delenie so zvyškom alebo pre prechod cez desiatku, keďže sú to všeobecné tvrdenia, nie je možné v tomto jazyku zapísať. Nie sú to tvrdenia jazyka aritmetiky, ale inštrukcie sformulované v prirodzenom jazyku. ***Nedajú sa v jazyku aritmetiky vyjadriť, ale iba ukázať***. Napríklad pravidlo, že násobenie desiatimi spočíva v pridaní 0 na koniec čísla sa v jazyku elementárnej aritmetiky nedá zapísať. Možné je ho len ukázať na príkladoch ako $17 \times 10 = 170$, alebo $327 \times 10 = 3270$. Z niekoľkých podobných príkladov človek pochopí, že 17 a 327 nie sú podstatné a naučí sa všeobecné pravidlo.

Zvláštny je i zápis čísel. Ak považujeme mená za jednoduché výrazy, tak považovať výraz 257 za meno predstavuje problém, lebo pravidlá pre počítanie, napríklad pravidlo pre násobenie dvoch trojciferných čísel, odkazujú k jeho zložkám (k jednotlivým cifrám), čo je pre mená neprípustné. Musí to teda byť zložený výraz. Preto primitívnymi znakmi jazyka elementárnej aritmetiky sú cifry a nie čísla. Zápis čísla, napríklad 257, je term vytvorený z konštánt 2, 5 a 7 pomocou operácie zreťazenia, ktorá spôsobí, že 2 v terme 257 už neoznačuje jednotky, ale stovky. Táto operácia je však implicitná, je zabudovaná do spôsobu zápisu.

a) logická sila jazyka – schopnosť odvodiť jedinečné tvrdenia

Ako typické tvrdenia elementárnej aritmetiky možno vziať napríklad:

$$135 + 37 = 172 \qquad \text{alebo} \qquad 24 \times 19 > 456.$$

Sú to jedinečné tvrdenia.[4] Jazyk elementárnej aritmetiky obsahuje pravidlá, ktoré pomocou formálnej manipulácie so znakmi umožňujú takéto tvrdenia overiť. V dejinách je to prvý formálny systém, umožňujúci na báze explicitných pravidiel manipulácie so symbolmi, rozhodnúť o pravdivosti nejakého tvrdenia. Aj keď sú to zatiaľ len jedinečné tvrdenia, význam tohto objavu je nesmierny. Tieto pravidlá sú totiž formálne, teda intersubjektívne, explicitné a preto naučiteľné a prístupné kontrole. Treba zdôrazniť, že tento jazyk sa zásadne odlišuje od toho, čo sa jazykom aritmetiky dnes bežne rozumie tým, že neobsahuje premenné. To, že jazyk aritmetiky neobsahoval premenné viedlo Egypťanov k nutnosti formulovať všetky úlohy s konkrétnymi číselnými hodnotami. Zoberme ako ilustráciu príklad z *Moskovského papyrusu* (Kolman 1961, s. 41):

> „Spôsob výpočtu pyramídy nemajúcej vrchol. Ak máš danú pyramídu bez vrcholu vysokú 6 (lakťov), s dolnou hranou 4 (lakte) a hornou 2, umocni 4 na druhú, dostaneš 16, zdvojnásob 4, dostaneš 8, umocni 2 na druhú, dostaneš 4,
>
> (1) pripočítaj týchto 16
>
> (2) k týmto 8 a 4
>
> (3) dostaneš 28, vypočítaj
>
> (4) 1/3 zo 6, obdržíš 2, počítaj
>
> (5) s 28 dvakrát, dostávaš 56,
>
> (6) hľa: je to skutočne 56. Našiel si správne.“

Počtár postupne berie čísla figurujúce v zadaní a robí s nimi rôzne úpravy, až napokon dostane to, čo hľadá. Pomocou konkrétneho výpočtu takto ukazuje všeobecný postup riešenia, ktorý sa v jeho jazyku nedá vyjadriť. Jazyk elementárnej aritmetiky bol prvým symbolickým jazykom v dejinách, ktorý umožňoval riešiť problémy prostredníctvom manipulácie so symbolmi. Jeho logická sila je zúžená na odvodenie jedinečných tvrdení.

b) expresívna sila jazyka – schopnosť vyjadriť ľubovoľné prirodzené číslo

Jazyk elementárnej aritmetiky umožňuje vyjadriť ľubovoľne veľké prirodzené číslo. Nám to môže pripadať málo, my sme zvyknutí na záporné, iracionálne a komplexné čísla, preto prirodzené čísla nám pripadajú ako čosi chudobného, ako značne obmedzený systém, v ktorom nemožno slobodne ani odčítať, ani deliť, ani odmocňovať. Keď si však na chvíľu odmyslíme tieto výdobytky neskoršieho vývoja, možno sa nám podarí precítiť fascináciu, ktorú musel pociťovať egyptský (babylonský, indický, čínsky) počtár, keď si uvedomil, že ***pomocou čísel možno všetko spočítať***. Tento pocit je základom „byrokratického univerzalizmu“, podľa ktorého všetko možno spočítať, zaznačiť do výkazov a tým uviesť do evidencie. Byrokratické plánovanie bolo jedným z najväčších objavov egyptskej (babylonskej, indickej a čínskej) civilizácie. Univerzálnosť byrokracie sa zakladá na expresívnej sile jazyka aritmetiky. Zvyšky prvotnej fascinácie počítaním možno vidieť v mýtoch, v ich záľube vo veľkých alebo zvláštnych číslach, ďalej v Kabale a u pytagorejcov. Archimedov spis *O počte piesočných zŕn* asi najlepšie demonštruje expresívnu silu jazyka elementárnej aritmetiky. Ukazuje, že číselný systém umožňuje odhadnúť počet zrniek piesku na Zemi:

> „Sú takí, kráľ Gelon, ktorí si myslia, že ***počet zŕn piesku je nekonečne veľký***; pričom pieskom myslím nie len ten, ktorý sa nachádza okolo Syrakúz a na zvyšku Sicílie, ale aj ten, ktorý sa nachádzav každej oblasti či už obývanej alebo nie. A sú takí, ktorí bez toho, aby ho považovali za nekonečné, si myslia, že ***nemožno vysloviť číslo***, ktoré je dostatočne veľké, aby presiahlo ich množstvo. A je tiež jasné, že tí, čo hlásajú tento názor, keby si predstavili masu tvorenú pieskom tak veľkú ako masa Zeme, vrátane všetkých jej morí a dutín Zeme vyplnenú do výšky najvyšších hôr, boli by mnohonásobne viac vzdialení od uznania, že nemožno vyjadriť žiadne číslo, ktoré presahuje množstvo zrniek piesku takto vzatých. Ale ja sa pokúsim ukázať vám, ***pomocou geometrických dôkazov***, ktoré budete schopný sledovať, že, čísla mnou vytvorené a dané v práci, ktorú som poslal Zeuxippovi, niektoré presahujú nielen masu piesku rovnako veľkú ako Zem vyplnenú opísaným spôsobom, ale aj masu rovnú veľkosti univerza. ... Tvrdím, že dokonca aj keby bola vytvorená sféra z piesku tak veľká, ako veľká je podľa Architasových predpokladov sféra stálic, tak ešte stále dokážem, že z čísel menovaných v Princípoch niektoré presiahnu svojou veľkosťou počet zrniek piesku v práve opísanej sfére...“ (Heath 1921, s. 81-85).

Samozrejme, geometrické dôkazy, pomocou ktorých Archimedes dokazuje, že je možné vytvoriť číslo, ktoré je väčšie ako počet zŕn v celom univerze, nepatria do aritmetiky. Ale samotný fakt, že aj tak obrovské číslo existuje, ilustruje expresívnu silu jazyka elementárnej aritmetiky. Egyptskí či Babylonskí počtári síce podobné tvrdenia, ilustrujúce expresívnu silu jazyka aritmetiky nevedeli dokázať, ale asi cítili, že od najmenších čiastočiek až po tie najväčšie všetko možno počítať.

c) explanatorická sila jazyka – jazyk je neexplanatorický

Jazyk elementárnej aritmetiky je ***neexplanatorický***. Dochované matematické texty sú súbory praktických návodov, bez akéhokoľvek vysvetľovania. Túto črtu jazyka aritmetiky si všimli aj historici. Jeremy Gray píše v súvislosti s Egyptskou a Babylonskou matematikou o „protirečivých a neexplanatorických výsledkoch“ (Gray 1979, s. 3). Je to aj pochopiteľné. Kým jazyk nie je schopný vyjadriť všeobecnosť, nie je v ňom možné vysvetľovať ale iba ukazovať.

d) integratívna sila jazyka – jazyk je neintegratívny

Možno konštatovať, že jazyk elementárnej aritmetiky je ***neintegratívny***, neumožňuje vytvoriť jednotiaci pohľad. Tento aspekt nachádza potvrdenie v dochovaných textoch, ktoré sú zbierkami riešených príkladov bez pokusu o nejaký jednotiaci pohľad. Ak sa na papyruse vyskytuje nejaké usporiadanie úloh, toto usporiadanie je spravidla dané obsahom (osobitne sa uvádzajú úlohy na výpočet polí, úlohy na výpočet daní, úlohy na výpočet násypov, úlohy na výpočet kanálov). Teda jednotiaci princíp do problematiky nevnáša jazyk, ale pramení z toho, čoho sa príslušné úlohy týkajú.

e) logické medze jazyka – existencia úloh nemajúcich riešenie

Starí Babylončania mohli naraziť na skutočnosť, že niektoré úlohy nemajú riešenie (Gray 1979, s. 24). Na babylonských tabuľkách sa dochovala úloha vedúca v dnešnej symbolike na sústavu:

$$x + y = 10, \qquad x.y = 16,$$

ktorá má riešenia (2, 8) a (8, 2). Babylončania dokázali túto úlohu vyriešiť prostriedkami elementárnej aritmetiky. Keď však zoberieme úlohu, ktorá sa od predošlej odlišuje iba nepatrne

$$x + y = 10, \qquad x.y = 40$$

tak tu zrazu výpočet zlyháva. Pritom v rámci elementárnej aritmetiky ***nemožno pochopiť, čo sa stalo***. Postup, ktorý funguje pre určité hodnoty, pre iné hodnoty v zadaní beznádejne zlyháva.

f) expresívne medze jazyka – nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca

Pytagorejci priniesli kvalitatívne nový druh jazyka – ikonický jazyk syntetickej geometrie. Spočiatku nový geometrický jazyk spájali s pozoruhodným druhom „aritmetického atomizmu“. Pytagorejci predpokladali, že každá úsečka, teda aj strana a uhlopriečka štvorca je zložená z určitého počtu „jednotiek“, a že pomer dĺžok úsečiek sa rovná pomeru počtov týchto „jednotiek“. Objav nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky štvorca, podľa ktorého pomer ich dĺžok nie je možné vyjadriť v pomere celých čísel, ukazuje neudržateľnosť pytagorejského „aritmetického atomizmu“. Okrem toho ukazuje, že jazyk geometrie je všeobecnejší ako jazyk aritmetiky. V rámci aritmetiky nie sme schopní pojať stranu a uhlopriečku do jedného výpočtu. Buď zvolíme jednotku súmerateľnú so stranou, potom sa dĺžka uhlopriečky nedá vyjadriť žiadnym (prirodzeným) číslom, alebo zvolíme jednotku súmerateľnú s uhlopriečkou, a potom sa nám nepodarí zachytiť stranu. Nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca odkrýva expresívne medze jazyka elementárnej aritmetiky.

Toto obmedzenie bolo neskôr prekonané prechodom k reálnym číslam, ale nás zaujíma jazyk aritmetiky v jeho pôvodnom stave. V rámci jazyka elementárnej aritmetiky je nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca paradox, ktorý sa vymyká chápaniu. Až neskôr, keď sa prešlo k reálnym číslam, bolo možné tento paradox odstrániť tým, že ho zmeníme v pozitívny fakt, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo. Tu vidíme jednu zo základných stratégií boja s paradoxmi, spočívajúcu v rozšírení jazyka, a premene paradoxu na pozitívny poznatok. Vytvoríme nový výraz, ktorým označíme paradoxný objekt a vytvoríme pravidlá, ako s ním počítať.

1.1.2 Syntetická geometria

Od raných štádií svojho rozvoja boli poľnohospodárske civilizácie staroveku konfrontované s radom úloh úzko súvisiacich s geometriou. Či ide o vymeriavanie polí v súvislosti s ich zdaňovaním, o tvorbu máp určených na administratívne, stavebné alebo vojenské účely alebo o problémy súvisiace so stavbou zavodňovacích kanálov, ochranných opevnení a valov, prirodzene sa vynárala potreba názorne zachytiť reálnu situáciu v podobe určitého náčrtu či plánu. Takto sa začalo hromadiť špecifické poznanie, ktoré patrí do oblasti geometrie. Aj samotný termín geometria, ktorý je prebratý z Gréčtiny, jasne dokladá praktické korene tejto disciplíny. Slovo geometria etymologicky poukazuje na zememeračstvo. A boli to zememerači starých civilizácií (Gréci ich nazývali *harpenadoptai* – napínači povrazov), ktorí objavili rad poznatkov, ako napríklad že v trojuholníku so stranami 3, 4, 5 je oproti strane 5 pravý uhol. Napriek nahromadenému praktickému poznaniu sa však v týchto civilizáciách geometria neosamostatnila a ostala súčasťou rámca praktických počtárskych úloh. Svedčí o tom aj úloha z *Moskovského papyrusu*, ktorú sme uviedli na strane 16. Vytvorenie geometrie ako samostatnej matematickej disciplíny sa uskutočnilo až v antickom Grécku. Podľa tradície Táles aj Pytagoras, zakladatelia gréckej geometrie, podnikli cesty do Egypta, kde sa oboznámili s poznatkami zememeračov. Toto poznanie priniesli do Grécka a obohatili ho o rad nových poznatkov, ktoré dodnes nesú ich meno v podobe Tálesovej a Pytagorovej vety. Čo je však ešte dôležitejšie, vytvorili nový jazyk, určený na reprezentáciu geometrických objektov.

Jazyk geometrie, na rozdiel od jazyka aritmetiky je jazykom ikonickým a nie symbolickým. Jeho výrazmi sú obrázky tvorené súbormi bodov, úsečiek a oblúkov kružníc, v rôznych vzájomných polohách, a nie lineárne reťazce aritmetických symbolov. Geometrický jazyk je podstatne silnejší než jazyk elementárnej aritmetiky. Umožňuje dokázať všeobecné tvrdenia a nemá problémy ani s nesúmerateľnosťou. Pre jazyk geometrie sú strana i uhlopriečka štvorca rovnoprávne objekty. Jazyk geometrie vie objasniť aj príčinu neriešiteľnosti niektorých aritmetických úloh. Prechodom k jazyku geometrie možno teda prekonať viaceré nedostatky jazyka elementárnej aritmetiky.

a) logická sila jazyka – schopnosť dokázať všeobecné tvrdenie

Ikonický jazyk geometrie bol prvým jazykom umožňujúcim dokázať všeobecné tvrdenia. Je toho schopný vďaka tomu, že obsahuje zaujímavú inováciu – ***úsečku neurčitej dĺžky*** – ktorá je vlastne predchodcom pojmu neznámej. Keď napríklad chceme dokázať, že súčet dvoch párnych čísel je číslo párne, tak si párne číslo znázorníme ako obdĺžnik, ktorého výška je rovná dvom (párne číslo), ale ktorého šírka ostane neurčitá. Dôkaz sa potom zakladá na nahliadnutí skutočnosti, že spojením dvoch obdĺžnikov s výškou dva vznikne opäť obdĺžnik s výškou rovnou dva. Keďže sme v našej úvahe pracovali s obdĺžnikmi, ktorých šírka ostala počas celej úvahy neurčitá, dokázali sme tvrdenie pre ľubovoľné dva obdĺžniky, a teda vlastne pre dve ľubovoľné párne čísla. Toto ukazuje zásadnú logickú prevahu jazyka geometrie nad jazykom elementárnej aritmetiky.

Tu sa ukazuje jeden zaujímavý aspekt, ktorý podporuje výklad geometrických obrázkov ako výrazov jazyka. Totiž, keď v spomenutom dôkaze nakreslíme príslušný obdĺžnik, tak ho samozrejme musíme nakresliť s konkrétnymi stranami. Preto to, čo je nakreslené na papieri neobsahuje žiadnu úsečku neurčitej dĺžky, všetky nakreslené úsečky sú presne také dlhé, ako dlhé sme ich nakreslili. Ale keď tieto úsečky používame v dôkaze, tak s ich dĺžkami pracujeme, ako keby boli neurčité. Teda idea neznámej sa v matematike objavuje najprv v implicitnej podobe – ako konštanta (konkrétna úsečka), s ktorou sa narába ako s neznámou (úsečkou neurčitej dĺžky).

b) expresívna sila jazyka – schopnosť prekonať nesúmerateľnosť

Ďalšou výhodou jazyka syntetickej geometrie je, že umožňuje prekonať problémy spojené s nesúmerateľnosťou. Pre jazyk aritmetiky predstavuje nesúmerateľnosť závažný problém, ktorý ukazuje, že je nemožné dĺžku strany a uhlopriečky štvorca vyjadriť pomocou (prirodzených) čísel. Naproti tomu pre jazyk geometrie neznamená nesúmerateľnosť žiadnu prekážku. Strana a uhlopriečka štvorca sú úsečky, s ktorými môžem robiť geometrické konštrukcie, bez ohľadu na to, či sú zhodou okolností súmerateľné alebo nie. Vidíme, že ikonický jazyk syntetickej geometrie má expresívnu prevahu nad symbolickým jazykom elementárnej aritmetiky.

Pomer dĺžok nesúmerateľných úsečiek nie je možné vyjadriť ako pomer celých čísel. Napriek tomu však jazyk geometrie umožňuje rôzne takéto pomery porovnávať. Za týmto účelom vznikla Eudoxova teória proporcií. Uvedená je v V. knihe *Základov* a zakladá sa na nasledovnej definícii:

> „Hovoríme, že veličiny stoja v rovnakom pomere, prvá k druhej ako tretia ku štvrtej, keď pri ľubovoľnom vynásobení rovnaké násobky prvej a tretej oproti rovnakým násobkom druhej a štvrtej, vzaté v pároch sú alebo naraz väčšie alebo naraz rovné alebo naraz menšie.“ (Euklides V., def. 5)

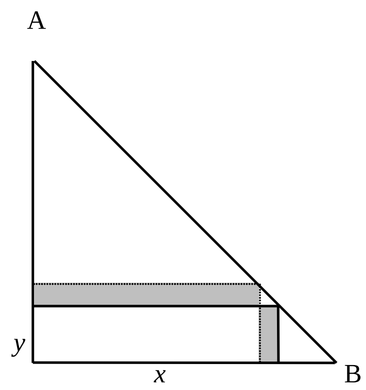
Táto definícia umožňuje porovnať nesúmerateľné veličiny, a ukázať, že napríklad obsahy dvoch kruhov sú „jeden k druhému ako štvorce nad ich priemermi“ (Euklides XII, prop. 2). Obsah kruhu a obsah štvorca nad jeho preponou sú síce (ako dnes vieme) nesúmerateľné veličiny, ale napriek tomu jazyk geometrie umožňuje dokázať konštantnosť ich pomeru. To jasne ukazuje prevahu expresívnej sily jazyka syntetickej geometrie nad expresívnou silou jazyka elementárnej aritmetiky, ktorá o pomeroch nesúmerateľných veličín nedokáže nič povedať.

c) explanatorická sila jazyka – schopnosť vysvetliť neexistenciu riešenia

Ako ilustráciu logických medzí jazyka elementárnej aritmetiky sme uviedli, že z pohľadu aritmetiky je nepochopiteľné, prečo niektoré sústavy rovníc, ako napríklad

$$x + y = 10, \qquad x.y = 40$$

nemajú riešenie. Zo samotného výpočtu nemožno pochopiť, čo sa deje. Jazyk geometrie umožňuje porozumieť tejto situácii. Keď si úlohu preložíme do jazyka geometrie, tak ide o to, nájsť obdĺžnik, ktorého súčet dĺžok dvoch susedných strán je 10 a obsah je 40. Po úvahe zistíme, že množina vrcholov všetkých obdĺžnikov, so súčtom dĺžok susedných strán rovným 10 tvorí úsečku AB, ktorá je preponou pravouhlého rovnoramenného trojuholníka s odvesnou dlhou 10.



Keď zväčšíme dĺžku strany *y* obdĺžnika o Δ (samozrejme, aby sa nezmenil súčet, musím skrátiť jeho stranu *x* o rovnaké Δ), pribudne plocha *x*.Δ ale na druhej strane ubudne plocha *y*.Δ. Pokiaľ je $x > y$, bude týmto spôsobom plocha pribúdať. Preto zo všetkých obdĺžnikov so súčtom dvoch susedných strán 10 má najväčšiu plochu obdĺžnik, v ktorom $x = y$, čo je štvorec. Jeho strana je 5 a jeho obsah je 25. Z toho je zrejmé, prečo uvedená úloha nemá riešenie – jej zadávateľ chcel malým obvodom obopnúť príliš veľký obsah. Aby sa úloha stala riešiteľnou, buď treba súčin zmenšiť zo 40 na 25, alebo zväčšiť súčet strán z 10 na $4\sqrt{10}$, čo je približne 12,65. Jazyk geometrie tak objasňuje neexistenciu riešenia. Navyše umožňuje porozumieť aj podmienkam, za ktorých sú úlohy aritmetiky riešenie majú. Je toho schopný, lebo dokáže explicitne vyjadriť medze jazyka elementárnej aritmetiky, medze, ktoré sú v jazyku aritmetiky nevyjadriteľné.

d) integratívna sila jazyka – jednota Euklidových základov

Doteraz sme ukázali, že jazyk geometrie má nad jazykom elementárnej aritmetiky logickú, expresívnu a explanatorickú prevahu. Umožňuje tiež jednotiaci prístup k matematike. Najlepšou ilustráciou tejto jednoty sú Euklidove *Základy*, ktoré zjednocujú do jedného organického celku teóriu čísel, planimetriu, stereometriu ako aj teóriu proporcií, čo je antický ekvivalent teórie reálnych čísel. Dnes prevláda názor, že Euklidove *Základy* sú len sčasti originálnym výtvorom samotného Euklida, a mnohé partie naopak Euklides prebral z diel, ktoré sa nedochovali. *Teóriu proporcií,* uvedenú v V. knihe *Základov,* Euklides pravdepodobne prebral od Eudoxa. Od Eudoxa pochádza aj *metóda exhaustácie,* uvedená v XII. knihe. *Klasifikáciu iracionalít*, obsiahnutú v X. knihe, Euklides prebral od Theaiteta a *teóriu čísel*, obsiahnutú v VII.-IX. knihe, od Archyta z Tarentu. Euklidovým originálnym výkonom je *teória Platónskych telies,* uvedená v XIII. knihe, ktorá tvorí vrchol celého diela. Vidíme, že *Základy* sú rozsiahlym kompilátom, obsahujúcim myšlienky radu významných matematikov. Napriek tomu tvoria jednotný celok, ktorý čitateľa upúta svojou systematickou výstavbou a vzájomnou prepojenosťou jednotlivých tvrdení. A túto jednotu výstavby *Základom* prepožičiava práve jazyk syntetickej geometrie. Jednota Euklidových *Základov* je tak vyjadrením integratívnej sily jazyka syntetickej geometrie.

e) logické medze jazyka – neriešiteľné úlohy

Podľa tradície boli na počiatku gréckej matematiky sformulované tri úlohy – *trisekcia uhla, duplicita kocky* a *kvadratúra kruhu*. Napriek úsiliu najlepších matematikov antiky sa týmito úlohami nepodarilo pohnúť. Je to divný a z hľadiska geometrie nepochopiteľný fakt, že tak prirodzene vyzerajúce úlohy sa nedarí nájsť odpoveď. Neskôr sa podarilo dokázať, že tieto úlohy sú ***neriešiteľné prostriedkami syntetickej geometrie***. Nebola to netrpezlivosť, či nedostatočná duchaplnosť, kvôli ktorým grécki matematici neuspeli. Tieto úlohy sa prostriedkami syntetickej geometrie nedajú vyriešiť. Ale na to, aby bolo možné neriešiteľnosť týchto úloh dokázať, bolo treba opustiť jazyk geometrie a prejsť k celkom inému jazyku, k symbolickému jazyku algebry. Pre jazyk syntetickej geometrie predstavujú uvedené problémy (a niektoré ďalšie, ako napríklad úloha zostrojiť pravidelný sedemuholník) jeho logické medze. Tieto medze jazyka syntetickej geometrie sa prostriedkami tohto jazyka nedajú vyjadriť a nieto ešte prekročiť.

f) expresívne medze jazyka – rovnice vyššieho stupňa ako tretieho

Geometrický jazyk ovládol grécku matematiku natoľko, že Euklides, keď mal riešiť kvadratickú rovnicu, riešil ju konštrukčne. Je to prirodzené, lebo takto netreba rozlišovať, či sú parametre zo zadania úlohy súmerateľné alebo nie. Keď úlohu riešime konštrukčne, je to jedno.

> „Objav nesúmerateľnosti a nemožnosť vyjadriť pomer ľubovoľných dvoch úsečiek pomerom dvoch celých čísel viedli Grékov k tomu, že začali miesto aritmetických pomerov používať pomery medzi veličinami geometrickými a ich prostredníctvom vyjadrovať všeobecné proporcie medzi veličinami... Aby rozriešili rovnicu $a.x = b^2$, považovali Gréci b^2 za danú plochu, a bola daná úsečka, x hľadaná. Úlohu teda previedli na zostrojenie obdĺžnika z ktorého poznáme jeho plochu a jednu stranu. Alebo ako hovorili, na priloženie plochy k danej úsečke... Metódy prikladania plôch vo všeobecnejšom tvare používali Gréci pri riešení úloh, ktoré vedú – ako by sme povedali dnes – k riešeniu kvadratických rovníc o jednej neznámej... Riešenie rovnice $a.x - x^2 = b^2$ hľadali pomocou konštrukcie, ktorej v staroveku hovorili eliptické prikladanie plochy (od elleipsis nedostatok). Rovnakým spôsobom uvažovali Gréci aj pri hyperbolickom prikladaní plochy (z hyperbolé prebytok). Táto úloha zodpovedá riešeniu kvadratickej rovnice $a.x + x^2 = b^2$.“ (Kolman 1961, s. 115).

Aj keď jazyk syntetickej geometrie znamená pokrok oproti jazyku elementárnej aritmetiky, prináša aj isté nevýhody. Jazyk geometrie sa hodí len na riešenie lineárnych a kvadratických rovníc. Rovnice tretieho stupňa znamenajú problém, lebo tretia mocnina neznámej predstavuje objem určitej kocky. A rovnice vyššieho, ako tretieho stupňa, sa jazyku Euklidovskej geometrie úplne vymykajú. Priestor so svojimi tromi rozmermi predstavuje expresívne medze jazyka geometrie.

1.1.3 Algebra

Ako naznačuje názov, algebra pochádza od Arabov. Gréci nepoznali algebraický spôsob uvažovania. To neznamená, že by nepoznali matematické úlohy, ktoré dnes považujeme za algebraické. Takéto úlohy sú známe od nepamäti. Už v starovekom Babylone dosiahli učenci majstrovstvo v riešení úloh, ktoré sú ekvivalentné našim *kvadratickým rovniciam*. Babylonskí učenci však boli v zajatí počtárskeho umenia a neprešli k symbolickým manipuláciám. Na druhej strane Gréci počty vylúčili z matematiky a takmer celú matematiku redukovali na geometriu. Tým stratili kontakt s kalkulatívnym spôsobom uvažovania, ako aj s celým svetom formálnych úprav. Euklides to, čo dnes považujeme za úlohu vedúcu na kvadratickú rovnicu a zapisujeme ako $x^2 + bx = C$, považoval za úlohu čisto geometrickú. Pre neho to bola úloha nájsť úsečku x tak, aby štvorec nad ňou a obdĺžnik, ktorého jedna strana je b, spolu mali obsah C. Euklides uvádza konštrukciu, pomocou ktorej možno úsečku x zostrojiť (Euklides VI., úloha 28). Snaha založiť riešenie podobných problémov na geometrických konštrukciách má nevýhodu v tom, že veličina x^2 je plocha štvorca so stranou x, veličina x^3 je objem kocky s hranou x, ale tvorbe mocnín vyšších stupňov bráni priestor. Grékom geometrický jazyk umožnil zachytiť len malý fragment sveta algebraických rovníc, fragment, ktorý bol asi príliš chudobný na to, aby sa z neho mohla vyvinúť samostatná matematická disciplína.

Keď sa pozrieme na algebru u Arabov, zistíme, že z hľadiska náročnosti neprevyšuje úroveň Euklidových *Základov*. Práve naopak, v porovnaní so zložitým spôsobom Euklidovej argumentácie je arabská algebra omnoho jednoduchšia. To, že Gréci neobjavili algebru, teda nebolo spôsobené nedostatkom subtílnosti myslenia. Situácia pôsobí dojmom, akoby Grékom čosi bránilo vniknúť do sveta algebry. Do tohto nového sveta prenikla až arabská matematika. Samozrejme, Arabi boli v matematike žiakmi Grékov, od Grékov sa naučili, čo je to dôkaz, čo sú to axiómy, čo je to definícia. Ale ich kultúra bola iná. Jej stredom bol islám, náboženstvo, ktoré odmietlo založiť transcendenciu na metafore zraku. Tým zaniká prepojenie poznania so zrakovou odkrytosťou, ktoré tvorilo jadro gréckej *epistéme*. Grécke slovo *teória* pochádza od termínu *teoros*, čo bol pôvodne vyslanec obce, ktorý dozeral na priebeh náboženského obradu, ale bez toho, že by sa obradu zúčastnil. Teória bolo to, čo videl *teoros*, teda to čo vidíme vtedy, keď nemáme aktívnu účasť na dianí. Základná metafora, ktorá stojí za gréckym teoretickým poznaním, je ***pohľad z odstupu***. Aby človek mohol získať vhľad do určitej problematiky, musí si utvoriť odstup, musí sa oslobodiť od všetkého, čo ho k príslušnej problematike viaže a čo by mohlo narušiť nestrannosť jeho pohľadu. Až z odstupu zahliadne pravdu.

Z toho je zrejmé, že Gréckemu duchu je algebra, v ktorej ide o manipulácie s formulami, cudzia. Algebraické manipulácie sa totiž nezakladajú na teoretickom vhľade, ale na kalkulatívnom cite. Nejde o to, uvidieť výsledok, ale skôr získať cit pre to, ako k nemu dospieť, získať cit pre rôzne úpravy a triky, získať cit pre možnosti, ktoré ponúka jazyk. Tieto možnosti však nie sú aktualizované, nie sú odkryté pohľadu. V jazyku algebry je vždy vyzdvihnutý len jeden výraz, ten, ktorý práve upravujeme. Samozrejme, pamätáme si mnohé výpočty a úpravy a na ich pozadí vnímame postup, ktorý práve uskutočňujeme. Cítime analógie, podobnosti, vnímame poukazy, ktoré nás vedú cez húštinu možných úprav, cez nepreberné množstvo možných substitúcií až k výsledku. Ale algebra je vždy v procese, jej úpravy stále plynú. Keď arabská algebra prenikla cez Španielsko do Európy, začal sa dialóg západného ducha s jemu bytostne cudzím, ale nepopierateľne hlbokým duchom algebry. Tento dialóg je vedený snahou vizualizovať, snahou dostať triky, úpravy a manipulácie pred oči, získať do nich vhľad. Ako nástroj tejto vizualizácie sa rodí nový jazyk, symbolický jazyk algebry. Tento jazyk sa líši od jazyka elementárnej aritmetiky tým, že obsahuje symbol pre neznámu. Možno povedať, že v algebre sa podarilo do symbolického jazyka preniesť základnú prednosť geometrie, schopnosť vyjadriť všeobecnosť.

a) logická sila jazyka – schopnosť dokázať modálne predikáty

Jazyk algebry prináša ako základnú inováciu explicitný symbol pre premennú. V jazyku geometrie bola idea premennej prítomná iba implicitne, v podobe úsečky neurčitej dĺžky. Na tejto idei sa zakladala schopnosť jazyka geometrie dokázať všeobecné tvrdenie. Keďže jazyk algebry má ideu premennej prítomnú v explicitnom tvare, aj on je schopný dokázať všeobecné tvrdenia. Dokáže však viac. Zoberme vzorec pre riešenie kvadratickej rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

Parametre *a*, *b*, *c* dávajú tomuto vzorcu všeobecnosť analogickú tej, ktorú dáva úsečka neurčitej dĺžky geometrickým dôkazom. Avšak *x* na ľavej strane znamená, že tento výraz ako celok vyjadruje jediné indivíduum, a ***vzorec predstavuje zápis postupu na jeho výpočet***. Takto sa postup výpočtu stáva vyjadriteľným v jazyku.

Prevaha jazyka geometrie nad jazykom aritmetiky súvisel s tým, že jednotlivé kroky geometrickej konštrukcie sa nestrácajú (ako sa strácajú kroky pri výpočte), ale tvoria trvalú súčasť obrázka. Čo sa však v obrázku stráca je postupnosť krokov. Preto je nutné ku geometrickým konštrukciám dodávať komentár v prirodzenom jazyku, nazývaný ***zápis konštrukcie***, v ktorom sa zachytí postupnosť krokov, pomocou ktorej bol obrázok vytvorený. Zápisy konštrukcie, ktorými profesori trápia stredoškolákov, teda nepredstavujú ani tak rozmar pedagógov, ako sú skôr dôsledkom nedokonalosti jazyka geometrie. Zápis konštrukcie je komentár v prirodzenom jazyku, čo znamená, že sa odohráva mimo jazyka geometrie. A práve postupnosť krokov je v algebre zabudovaná do jazyka.

K algebraickej formule netreba dodávať žiaden „zápis výpočtu“ analogický zápisu geometrickej konštrukcie. Nie je to potrebné, lebo vzorec postupnosť krokov výpočtu priamo vyjadruje.[5]

Táto okolnosť umožňuje v algebre ***dokázať modálne predikáty***, ako napríklad neriešiteľnosť. Neriešiteľnosť, napríklad neriešiteľnosť rovnice piateho stupňa, ktorú dokázali Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel a Evariste Galois začiatkom 19. storočia, je jemnejšia vec ako neexistencia riešenia, o ktorej sme hovorili v súvislosti s logickými medzami jazyka aritmetiky. Vieme, že každá rovnica piateho stupňa má práve päť riešení. V tom nie je problém. Problém je v tom, že tieto riešenia nie je možné nájsť prostriedkami algebry. Teda v prípade neriešiteľnosti všeobecnej rovnice piateho stupňa, riešenia existujú ako objekty, ale jazyk algebry nie je schopný tieto riešenia explicitne nájsť. Na rozdiel od jazyka aritmetiky, jazyk algebry si je tohto svojho nedostatku plne vedomý, vie ho aj dokázať. A v tom je jeho prevaha v porovnaní s jazykmi aritmetiky alebo syntetickej geometrie. Preto práve dôkazy neriešiteľnosti považujem za najlepšiu ilustráciu logickej sily jazyka algebry.

V jazyku geometrie nemáme prostriedky, ktoré by umožnili *vyjadriť*, že nejaká úloha je neriešiteľná. V jazyku geometrie sa neriešiteľnosť dá iba ukázať. Neriešiteľnosť je pre geometriu predikát, ktorý sa dá vyjadriť iba v prirodzenom jazyku. Jazyk algebry, na rozdiel od geometrie, umožňuje vyjadriť neriešiteľnosť. Tým, že postup (riešenia) je *vyjadrený* vo formule, je otázka riešiteľnosti z pohľadu algebry vlastne otázkou vyjadriteľnosti určitej veličiny v požadovanom tvare. Dôkazy neriešiteľnosti majú potom spravidla tvar argumentácie, že daný prvok nie je možné vyjadriť v požadovanom tvare. Takúto stavbu mal Gaussov dôkaz nemožnosti konštrukcie pravidelného 17-uholníka, ako aj Galoisov dôkaz neriešiteľnosti rovnice piateho stupňa.

b) expresívna sila jazyka – schopnosť vyjadriť mocniny ľubovoľného stupňa

Oproti geometrickému jazyku, ktorý má neznámu v tvare úsečky neurčitej dĺžky, druhú mocninu neznámej v podobe štvorca s neurčitou stranou a tretiu mocninu v podobe kocky s neurčitou hranou, jazyk algebry umožňuje slobodne tvoriť mocniny vyšších rádov. Terminológia, pomocou ktorej matematici 15. storočia tieto nové mocniny vytvárali, bola ešte poznačená geometrickými analógiami, keď napríklad tretiu mocninu neznámej nazývali *cubus* a označovali ju písmenom *c*. Nič im však nebráni čisto formálne pokračovať ďalej aj za tretiu mocninu, za ktorú už Euklida nepustil priestor. Neznámu nazývali *res* a označovali písmenom *r*, jej druhú mocninu nazývali *zensus* a označovali z. Pre štvrtú mocninu písali *zz* (*zensus de zenso*), pre piatu *rzz,* pre šiestu *zzz* a tak ďalej. Takto jazyk algebry umožňuje prekročiť medze, ktoré geometrii ukladá priestor a slobodne tvoriť mocniny ľubovoľného stupňa. Tieto výrazy síce nevieme názorne interpretovať, nevieme, čo si máme pod sedemnástou mocninou neznámej predstaviť, ale to nie je podstatné. Jazyk algebry obsahuje formálne pravidlá, ktoré umožňujú s týmito výrazmi narábať s rovnakou istotou, s akou Euklides narábal s prvou či druhou mocninou neznámej.

Vďaka týmto inováciám sa podarilo nájsť riešenie rovnice tretieho stupňa. Je to prvý výsledok európskej matematiky, ktorý prekračuje antické dedičstvo. Publikovaný bol roku 1545 v knihe *Ars Magna Sive de Regulis Algebraicis* talianskeho matematika Girolama Cardana. Cardanov vzorec pre rovnicu $x^3 = bx + c$, zapísaný v dnešnej symbolike má tvar

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} \qquad (2)$$

Cardano nikdy takýto vzorec nenapísal. (Podrobnosti objavu riešenia rovnice tretieho stupňa, ako aj pôvodnú Cardanovu formuláciu tohto výsledku uvádzame v kapitole 2.1.B.2). Na takéto formuly bolo treba čakať zhruba storočie, po Descarta. Tak či onak, tento výsledok dal algebraikom sebavedomie, vďaka ktorému sa postupne emancipovali spod područia geometrie. Algebraická symbolika umožňuje riešiť problémy, ktoré v rámci geometrického jazyka nie je možné poriadne ani len sformulovať.

c) explanatorická sila jazyka – schopnosť pochopiť, prečo je trisekcia uhla neriešiteľná

Jazyk algebry umožňuje pochopiť, prečo sú tri geometrické problémy – trisekcia uhla, duplicita kocky a konštrukcia pravidelného sedemuholníka neriešiteľné prostriedkami euklidovskej geometrie. V rámci geometrie je nepochopiteľné, prečo tak prirodzene formulované úlohy sa napriek intenzívnemu úsiliu nedarí vyriešiť. Jazyk algebry to umožňuje pochopiť, lebo dokáže charakterizovať úlohy, ktoré sú riešiteľné pomocou euklidovských konštrukcií. Sú to úlohy, v ktorých sa vyskytujú iba také úsečky, ktorých dĺžky sú buď racionálne čísla, alebo ich možno z racionálnych čísel dostať konečnou postupnosťou operácií druhej odmocniny. Na dôkaz skutočnosti, že uvedené tri úlohy sú prostriedkami euklidovskej geometrie neriešiteľné potom stačí ukázať, že pri ich riešení nevyhnutne potrebujeme úsečky, ktorých dĺžky nemajú uvedený tvar. (Pozri Courant a Robins 1941, s. 120-140 alebo Stewart 1989, s. 50-60). V jazyku geometrie neriešiteľnosť nie je možné ani len vyjadriť, a nie to ešte dokázať. Jazyk algebry umožňuje pochopiť príčinu neriešiteľnosti spomenutých úloh. Ide o to, že kružidlo a pravítko sú prostriedky, ktoré nám neumožňujú vytvoriť iné úsečky než také, ktoré možno vyjadriť pomocou druhých odmocnín. Naproti tomu príslušné úlohy sú svojou povahou kubické a vyžadujú úsečky, ktorých dĺžky sú tretími odmocninami racionálnych čísel. Jazyk algebry má teda explanatorickú prevahu nad jazykom geometrie.

d) integratívna sila jazyka – schopnosť vytvoriť univerzálne analytické metódy

Euklidovská geometria predstavuje zbierku nesúvisiacich konštrukčných trikov. Každá úloha sa rieši inak. Niektoré úlohy vyžadujú dômyselné pomocné konštrukcie, ktoré tak dávajú široký priestor pre predvádzanie duchaplnosti. Ich zapamätanie je však zbytočné, lebo ďalšia úloha vyžaduje úplne iný trik. Preto síce iným spôsobom, ako egyptské počty, ale aj geometria je náročná na pamäť. Netreba sa síce memorovať postupy typu „*spôsob výpočtu pyramídy nemajúcej vrchol*“, ako počtár. Stačí si zapamätať triky rôznych konštrukcií. Ale aj týchto trikov je veľa. Algebra umožňuje záplavu konštrukčných trikov radikálne zmenšiť a jednotlivé izolované postupy zjednotiť do ***univerzálnych metód***. Je toho schopná vďaka myšlienke, pochádzajúcej od Francoisa Viéta.

V knihe *In Artem Analyticam Isagoge* (Viéte 1591) Viéte zavádza na označenie veličín dva druhy premenných: jeden druh pre neznáme, druhý pre parametre úlohy. Pôvodná Viétova konvencia (používať na označenie neznámych veľké samohlásky *A*, *E*, *I*, *O*, *U* a na označenie parametrov veľké spoluhlásky *B*, *C*, *D*, *F*, *G*) sa neujala a dnes používame Descartovu konvenciu, ktorá pre neznáme používa malé písmená z konca abecedy (*x*, *y*, *z*, *v*, *w*) a pre parametre malé písmená zo začiatku abecedy (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*). Napriek tomu, že sa nezachovala konkrétna podoba Viétovej symboliky, jeho idea zaviesť dva typy premenných bola myšlienkou prvoradého významu. Až vďaka nej sme totiž schopní vyjadriť určitý matematický problém vo všeobecnom tvare (keď namiesto konkrétnych hodnôt parametrov zo zadania zapíšeme aj parametre pomocou premenných) a potom pomocou algebraických úprav vieme nájsť jeho všeobecné riešenie v tvare vzorca. Príkladmi takýchto všeobecných vzorcov boli vzťahy (1) a (2) vyjadrujúce riešenie rovníc druhého respektíve tretieho stupňa. Keď dostaneme za úlohu vyriešiť nejakú konkrétnu rovnicu, nemusíme celý postup zopakovať, ale stačí dosadiť do vzorca konkrétne hodnoty parametrov. Vzorec tak vyjadruje v tvare jedinej formuly nekonečný počet konkrétnych postupov. Vďaka Viétovmu vynálezu tak algebra získava roku 1591 jednotu metód, aká bola v syntetickej geometrii nemysliteľná.

Viéte si bol plne vedomý významu svojho objavu. Svoju metódu nazval analytickým umením. Takto sa v algebre zrodila metóda, ktorá sa odvtedy stala modelom pre mnohé ďalšie matematické disciplíny a tiež základným nástrojom pre opis prírody. Prírodné zákony dnes zapisujeme v tvare analytických výrazov, ku ktorým dospievame v procese formálneho odvodzovania z podmienok problému. Analytická metóda prešla postupne z algebry cez geometriu (Descartes 1637), matematickú analýzu nekonečne malých (Euler 1748), mechaniku (Lagrange 1788), teóriu vedenia tepla (Fourier 1822) až do logiky (Boole 1847). Univerzálna metóda na riešenie problémov predstavovala prednosť algebry pred geometriou. Euklidovská geometria žiadne univerzálne metódy nepoznala, bola zbierkou konštrukčných trikov, z ktorých každý sa hodil len na úzku paletu príbuzných problémov.

e) logické medze jazyka – casus irreducibilis

V súvislosti s rovnicami tretieho stupňa sa objavil paradox. Rovnica $x^3 = 7x + 6$ má riešenie $x = 3$ (a ďalšie dve riešenia $x = -1$ a $x = -2$, ktoré sa v Cardanovej dobe nepovažovali za riešenia) ale keď jej koeficienty $b = 7$ a $c = 6$ dosadíme do vzťahu (2), dostaneme čosi nepochopiteľné, keď pod znakom druhej odmocniny dostávame záporné číslo:

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}\ .$$

Cardano nazval tento prípad *casus irreducibilis*, neriešiteľný prípad. Pripomína nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca. V oboch prípadoch máme do činenia s narazením na hranice jazyka. Jazyk je konfrontovaný so situáciou, pri opise ktorej zlyháva. V prípade nesúmerateľnosti sa dostávame do paradoxov, v prípade *casus irreducibilis* vznikajú výrazy, ktoré, striktne vzaté, nemajú zmysel. A terapia je v oboch prípadoch rovnaká – spočíva v rozšírení základnej bázy indivíduí, v rozšírení číselného univerza. Keď pojem čísla rozšírime tak, aby zahŕňal aj iracionálne čísla, t.j. keď prejdeme k reálnym číslam ako základnému oboru veličín, nesúmerateľnosť prestane spôsobovať problémy. Podobne, keď medzi indivíduá zaradíme aj imaginárne čísla, t.j. číselné univerzum rozšírime o komplexné čísla, záporné číslo pod odmocninou prestane byť problémom. Pre Cardana, ktorý tento paradox objavil, bol však *casus irreducibilis* záhadný jav, a bolo treba čakať temer dvesto rokov, kým boli komplexné čísla dostatočne pochopené, aby druhé odmocniny so záporných čísel prestali pôsobiť paradoxne. Pritom je dôležité si uvedomiť, že komplexné čísla si matematici nevymysleli. Zrodili sa proti ich vôli. Cardano by bol spokojnejší, keby žiaden *casus irreducibilis* neexistoval. Preto Cardanov objav *casus irreducibilis* je peknou ilustráciou „zákona“ sformulovaného Michaelom Crowom: „Nové matematické pojmy sa často rodia nie na podnet ale proti snahám, a často veľmi intenzívnym snahám, matematikov ktorí ich vytvoria“ (Crowe 1975, s. 16).

f) expresívne medze jazyka – transcendentné čísla

Napriek úspechom ako bol dôkaz neriešiteľnosti trisekcie uhla či duplicity kocky, posledný z trojice antických problémov, problém kvadratúry kruhu, odolával metódam algebry. Postupne sa zrodilo presvedčenie, že tento problém je síce neriešiteľný rovnako ako dva ostatné, ale na rozdiel od nich, príčina jeho neriešiteľnosti nemá algebraickú povahu. Toto podozrenie našlo exaktné vyjadrenie v odlíšení algebraických a transcendentných čísel. Algebraické čísla sú čísla, ktoré sú koreňom polynómu s celočíselnými koeficientmi (napríklad číslo $\sqrt[3]{2}$ je koreňom polynómu $x^3 - 2$, alebo imaginárna jednotka i je koreňom polynómu $x^2 + 1$). Transcendentné čísla sú čísla, ktoré nie sú koreňom žiadneho polynómu, teda čísla ktoré nemožno zadať žiadnou algebraickou rovnicou. Sú to čísla, ktoré sa jazyku algebry vymykajú, transcendujú ho. Prvý príklad transcendentného čísla podal Joseph Liuville roku 1851. Je to číslo

$$l = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + 10^{-5!} + 10^{-6!} + 10^{-7!} + \ldots =$$

$$= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + 10^{-120} + 10^{-720} + 10^{-5040} + \ldots =$$

$$= 0{,}110001 \ldots (17 \text{ núl}) \ldots 1 \ldots (96 \text{ núl}) \ldots 1 \ldots (600 \text{ núl}) \ldots 100 \ldots$$

V desatinnom rozvoji tohto čísla sú jednotky na *n!*-tych miestach[6], a inak sú tam samé nuly. Teda jednotka je na prvom, druhom, šiestom, dvadsiatom štvrtom, ... desatinnom mieste. Napriek tomu, že toto číslo je pomerne jednoducho definované, dá sa dokázať, že nie je koreňom žiadnej algebraickej rovnice. Práve to je zmyslom pojmu transcendentný. (Dôkaz transcendentnosti Liovillovho čísla je v Courant a Robbins 1941, s. 104-107. Liouvillove číslo *l* ukazuje expresívne medze jazyka algebry. Roku 1873 Charles Hermite dokázal transcendentnosť čísla e (základu prirodzených logaritmov), a roku 1882 Ferdinand Lindemann dokázal transcendentnosť čísla π (koeficient vo vzťahu pre obsah kruhu). Uvedené čísla predstavujú veličiny, o ktorých v jazyku algebry nemožno nič povedať, čísla ktoré nespĺňajú žiaden algebraický vzťah.

1.1.4 Analytická geometria

Analytická geometria vznikla zo spojenia niekoľkých myšlienok či myšlienkových tradícií, ktoré izolovane od seba existovali mnoho storočí. Prvou z nich bola idea ***súradníc***. V geografii sa súradnice používali od staroveku. Vrchol antickej geografie predstavuje Ptolemaiov spis *Úvod do geografie* (*Geógrafiké Hyfégésis*) napísaný okolo roku 150 n. l.. Možno v ňom nájsť zemepisnú šírku a dĺžku pre 8 000 miest, z ktorých viaceré ležia v Indii a Číne. Intenzívny rozvoj kartografie nastáva začiatkom 15. storočia, kedy sa vďaka rozvoju moreplavby neustále spresňujú mapy. Práve vtedy objavil Giacomo d'Angli v byzantskom kníhkupectve grécky rukopis Ptolemaiovej *Geografie*, ktorý preložil do latinčiny. Tlačou vyšiel až roku 1477 v Bologni spolu s mapami, ktoré boli nakreslené talianskymi kartografmi. Ptolemaiova metóda, založená na používaní súradnej siete sa tak rozšírila v Európe. Z hľadiska geometrie je fascinujúca skutočnosť, že kartografi na základe údajov získaných od moreplavcov dokázali dať jednotlivým kontinentom presné obrysy. Dnes každý pozná tvar afrického kontinentu, ale iba málokto si uvedomuje, že pred letmi do kozmu vlastne Afriku nik nemohol priamo vidieť. Teda tvar afrického kontinentu bol novým druhom tvaru. Bol to tvar vytvorený vynášaním súradníc bodov pobrežia do súradnej siete. Podobne ako kartografi aj analytická geometria vytvára tvary, aké predtým nik nevidel. Miesto moreplavcov si však berie na pomoc algebru.

Takto sa dostávame k druhej tradícii, ktorá stála pri zrode analytickej geometrie, k ***algebre***. Algebra priniesla prelomenie zovretia trojrozmerného priestoru, do ktorého je človek svojím telom vnorený. Al-Chwárizmí, keď zavádzal termíny pre mocniny neznámej (*šai*, *mál* a *káb*) vychádzal z geometrickej predstavy, a tretej mocnine neznámej dal meno *káb*, čo v arabštine znamená kocka. Ale na rozdiel od Grékov, ktorí sa pri tretej mocnine zastavili, arabský matematik šiel ďalej a napísal pre ďalšie mocniny mená mál-mál, káb-mál, mál-mál-mál na označenie štvrtej, piatej a šiestej mocniny. Na rozdiel od prvých troch mocnín neznámej, pre ktoré máme geometrickú interpretáciu, pre štvrtú a vyššie mocniny neznámej neexistuje názorná predstava. Ale to mu nebránilo v tom, aby pre ne zaviedol algebraické operácie. Al-Chwárizmího práce boli v polovici 12. storočia preložené do latinčiny (1126 Abelardom z Bathu a 1145 Robertom z Chesteru) a na pôde západnej matematiky tým začína vývin algebraickej symboliky (ktorý prebiehal paralelne a nezávisle od rozvoja kartografie), a ktorého výsledkom bola nakoniec symbolika, ktorú používame podnes.

Tretia myšlienka, ktorá umožnila prepojiť obe spomínané tradície, bola nová geometrická interpretácia algebraických operácií. Táto idea má konkrétneho tvorcu v osobe René Descarta. Od čias Euklida bol súčin $x.y$ dvoch veličín (znázornených úsečkami) chápaný ako obsah obdĺžnika so stranami x a y, teda ako veličina iného druhu než boli pôvodné veličiny. Je zaujímavé, že vo svojich *Regulae ad directionem ingenii* (napísanej medzi 1619-1628) Descartes ešte interpretuje súčin dvoch úsečiek ako obsah (Regula XVIII). Ale pri definícii súčinu troch úsečiek $a.b.c$ píše, že „*je vhodné chápať a.b ako úsečku*“. Teda myšlienka interpretovať výsledok súčinu úsečiek opäť ako úsečku je už v spise prítomná, avšak jej význam ešte nie je plne pochopený. Descartes ju uvádza iba mimochodom, ako trik, ktorý umožní súčin $a.b.c$ pochopiť ako obdĺžnik (s jednou stranou $a.b$ a druhou stranou c) a nie ako hranol (so stranami a, b a c). Tak súčin vedie ešte stále k veličine vyššej dimenzie, a spomenutý trik sa používa iba na to, aby touto vyššou dimenziou nebol objem ale iba obsah. Keď roku 1637 vydáva *Geometriu*, ako dodatok k spisu *Rozprave o metóde*, je už význam novej interpretácie súčinu úsečiek plne rozpoznaný. Súčinom dvoch (a aj ľubovoľného vyššieho počtu) úsečiek je opäť úsečka, a $a.b$ je dĺžka tejto úsečky. Teda súčin a rovnako ani podiel úsečiek nevedie ku zmenám dimenzie. Descartes tak vytvoril súbor veličín ktorý je uzavretý voči štyrom základným aritmetickým operáciám, a tak s trochou anachronizmu možno povedať, že vytvoril prvé ***algebraické pole***. Podarilo sa mu prekonať bariéru rozmernosti, ktorá obmedzovala dovtedajšiu geometriu. Od antiky až po Viéta bolo násobenie dvoch úsečiek interpretované ako plocha a násobenie troch úsečiek ako objem. Ale neexistovala interpretácia súčinu štyroch a viac úsečiek. Descartovým rozhodujúcim krokom bolo, že súčin úsečiek dĺžky a a b neinterpretuje ako plochu obdĺžnika so stranami a a b, ale ako ***úsečku*** dĺžky ab. Uskutočnil tým desubstancionalizáciu operácie násobenia. Súčin dvoch veličín, ktorý ešte aj u Viéta (a dodnes vo fyzike) vytváral veličinu vyššieho rádu, u Descarta stráca svoju substancionálnu interpretáciu. Súčin je číslo, nič viac. Vďaka desubstancionalizácii algebraických operácií možno definovať súčin ľubovoľného počtu úsečiek a tak preniesť do ikonického jazyka geometrie základnú expresívnu prednosť symbolického jazyka algebry – schopnosť tvoriť mocniny ľubovoľného rádu.

Zo spojenia uvedených troch myšlienok sa zrodila analytická geometria, ikonický jazyk, ktorý sa zakladá na úplne novom spôsobe generovania geometrických objektov. Ako východisko berie mnohočlen, teda *algebraický výraz*, napríklad $x^5 - 4x^3 + 3x + 2$. Z pohľadu algebry je to čisto symbolický objekt, ktorý nemá ku geometrii žiaden vzťah. V druhom kroku na mnohočlen aplikujeme Descartovu ***geometrickú interpretáciu algebraických operácií***. Pre $x = 1$ bude hodnotou mnohočlena úsečka dlhá $1 - 4 + 3 + 2$, teda 2 jednotky, pre $x = 2$ dostaneme úsečku dlhú $32 - 32 + 6 + 2$, teda 8, atď. V treťom kroku dvojice hodnôt x a y, ktoré takto dostávame, vynesieme do *súradnicovej siete*. Keď vynesieme dostatočné množstvo bodov, pred našimi očami sa objaví čosi úplne nové, krivka akú pred rokom 1637 nik nevidel. Podobne ako pred očami kartografov sa postupne vynáral tvar jednotlivých kontinentov, pred matematikmi sa začalo vynárať úplne nové univerzum kriviek.

Algebraici zaviedli polynóm ako formálny výraz bez akejkoľvek geometrickej interpretácie. Aby mohli prekročiť medze, ktorými euklidovskú geometriu obmedzoval priestor, zriekli sa možnosti názorne si čokoľvek za svojimi symbolmi predstavovať. Descartes každému polynómu priradil tvar. Pomocou novej interpretácie algebraických operácií a pomocou súradnej sústavy každému polynómu priradil krivku. Priradenie kriviek polynómom pripomína pytagorejskú ***vizualizáciu počtu***, ktorá pomocou psefofórie priradila aritmetickým vlastnostiam tvar (napríklad párnosti priradila dvojrad). Podobne ako Pytagorejci vizualizovali aritmetiku, Descartes ***vizualizoval algebru***. V oboch prípadoch ide o vytvorenie nového ikonického jazyka, ktorý umožňuje integrovať základné prvky pôvodného symbolického jazyka. Descartova metóda generovania kriviek pomocou algebraických formúl bola zovšeobecnená a používa sa aj na vizualizovanie funkcií zadaných pomocou nekonečných radov, integrálov alebo diferenciálnych rovníc.

a) logická sila jazyka − dôkaz základnej vety algebry

Carl Friedrich Gauss vo svojej doktorskej dizertácii *Demonstratio nova Theorematis omnem Functionem algebraicam rationalem integram unis Variabilis in Factores reales primi et secundi Gradus resolvi posse* z roku 1799 použil pri dôkaze základnej vety algebry rovinu na reprezentáciu komplexných čísel. Základná veta algebry tvrdí, že pre každý polynóm $f(x)$ existuje bod α taký, že $f(\alpha) = 0$. Číslo nula na pravej strane je len z historických dôvodov. V algebre je zvykom upraviť polynóm tak, že sa všetky členy presunú na ľavú stranu a na pravej strane ostane nula. Je zaujímavé si uvedomiť, že základná veta algebry vlastne hovorí, že polynóm zadáva surjektívne zobrazenie. Teda táto veta nie je čisto algebraickým tvrdením. Je to skôr geometrické tvrdenie o tom, že polynomické funkcie sú surjektívne zobrazenia. Algebra slúži na vymedzenie polynomických funkcií, ale vlastnosť, ktorá sa o týchto funkciách v základnej vete algebry tvrdí, je geometrická.

Gauss podal štyri dôkazy základnej vety algebry. Prvý z nich vo svojej doktorskej dizertácii. Tento dôkaz bol analytický, zakladal sa na vlastnostiach komplexných funkcií. O 16 rokov neskôr podal ďalší dôkaz, ktorý sa neopieral o geometriu komplexnej roviny, ale bol vedený algebraickými prostriedkami, pomocou teórie symetrických polynómov. Tento dôkaz je podstatne dlhší a náročnejší. Elementárny dôkaz základnej vety algebry možno nájsť v (Courant a Robbins 1941, s. 269-271). Základná veta algebry je existenčné tvrdenie, ktoré možno považovať za vzor celého radu podobných tvrdení pre diferenciálne rovnice, integrálne rovnice ako aj pre úlohy variačného počtu. Čo je pri takýchto tvrdeniach rozhodujúce je na jednej strane existencia určitého formalizmu, prostriedkami ktorého sa opisuje objekt, ktorého existencia sa má dokázať. Druhou dôležitou súčasťou existenčných dôkazov je určitý priestor, v rámci ktorého sa ukáže existencia príslušného objektu. Daný priestor má spravidla vlastnosť určitej úplnosti, uzavretosti, spojitosti alebo kompaktnosti.

Zdá sa, že analytická geometria bola prvou teóriou, ktorá obsahovala obe zložky úspešného existenčného dôkazu. Jednak to bol algebraický formalizmus, v rámci ktorého bolo možné formulovať algebraické rovnice, a potom priamka alebo rovina, teda geometrické kontinuum, ktorého body boli spojené s algebraickým formalizmom prostredníctvom súradnicovej sústavy. Po tom, ako v 19. storočí došlo k aritmetizácii analýzy, geometrické existenčné dôkazy už nie sú považované za dostatočne striktné. Napriek tomu sa zdá, že jazyk analytickej geometrie bol prvým jazykom, ktorý vôbec umožňoval dokázať niečo takého ako existenčné tvrdenie pre širokú triedu úloh.

b) expresívna sila jazyka – schopnosť vyjadriť krivky ľubovoľného stupňa

Analytická geometria priniesla nový spôsob vytvárania geometrického útvaru. Útvar je konštruovaný bod po bode pomocou súradníc určených pomocou algebraického vzťahu. To je niečo zásadne iné ako u Euklida. Euklides vytváral útvar z úsečiek a oblúkov kružníc. Euklidovská konštrukcia je konštrukciou pomocou kružidla a pravítka. Teda Euklides má akési „mechanické“ formy, ktoré umiestňuje na papier. Naproti tomu Descartes rozbil každý útvar na body a vynáša ho bod po bode: „*Ak budeme brať postupne nekonečný počet rôznych hodnôt pre úsečku y, dostávame nekonečný počet hodnôt pre úsečku x, a preto nekonečný počet bodov takých ako C, pomocou ktorých možno nakresliť požadovanú krivku*“ (Descartes 1637, s. 319). Descartovi sa takto odkryl omnoho bohatší svet geometrických tvarov, než ako bol svet Euklidov.

Keď sa pozrieme z hľadiska analytickej geometrie na geometriu syntetickú, možno povedať, že až na zopár výnimiek (ako Hippiasova *kvadratrix*, Archimédova *špirála*, Nikomédova *konchoida* alebo Dioklova *cissoida* (Heath 1921, s. 226, 230, 238 a 264)) sa celá syntetická geometria točí okolo kvadratických kriviek (kriviek, ktorých rovnice sú dané polynómom druhého stupňa). To ukazuje, že svet analytickej geometrie je bohatší, obsahuje neporovnateľne väčšie množstvo objektov, ako svet euklidovský. Každý významnejší matematik 17. storočia prišiel s príkladom nejakej novej krivky. Stačí spomenúť Descartov *list*, Bernoulliho *lemniskátu,* Pascalovu *ulitu* alebo tiež *kardiódu*, *astroidu* či *strofoidu*. Analytická geometria vlastne naplno využíva bohatstvo, ktoré ponúka algebra. Stačí vziať polynóm, vhodne zvoliť koeficienty a pred našimi očami sa odkrýva tvar, aký Euklides určite nevidel.

Pri výklade algebry sme spomenuli, že hlavná prednosť formuly oproti obrázku syntetickej geometrie je, že formula je schopná vyjadriť poradie jednotlivých krokov výpočtu. To sa plne využíva pri konštrukcii krivky. Jednotlivé body krivky sa vynášajú tak, že sa vypočíta hodnota polynómu pre príslušnú hodnotu argumentu. Tu sa formula používa rovnakým spôsobom ako v algebre: ako vzťah medzi konkrétnymi veličinami. Avšak pre skonštruovanie krivky potrebujeme ísť ďalej, za hranice algebry a vyniesť jej body vedľa seba. Potrebujeme uskutočniť nekonečný počet konštrukcií (ako píše Descartes). A v priebehu tohto nekonečného procesu vynášania bodov sa vynorí tvar. Žiaden z jednotlivých bodov tvar nezadáva. Až keď sú všetky body vynesené, vynára sa tvar krivky. Tvar krivky tak vyjadruje ***nie vzťah*** medzi hodnotami premennej x a y (na tomto vzťahu bola založená logická sila jazyka algebry); tvar krivky odkrýva vzájomnú ***závislosť*** premenných x a y. Descartes ešte nemal pojem funkcie, ten prinesie až Leibniz pri budovaní jazyka diferenciálneho a integrálneho počtu. Ale pojem vzájomnej závislosti premenných je rozhodujúcim krokom smerom k pojmu funkcie. Pripomína pojem úsečky neurčitej dĺžky. Podobne ako bola úsečka neurčitej dĺžky predchodcom pojmu neznámej, je aj pojem závislosti premenných predchodcom pojmu funkcie. Závislosť premenných ešte nie je funkcia, podobne ako úsečka neurčitej dĺžky nie je neznáma. V oboch prípadoch sú to prvky ikonického a nie symbolického jazyka. Ale začína sa črtať úloha geometrických medzistupňov pri formovaní pojmov ako neznáma či funkcia.

c) explanatorická sila jazyka – schopnosť pochopiť casus ireducibilis

Analytická geometria umožňuje pochopiť, prečo algebraické vzorce v niektorých prípadoch zlyhávajú. Myšlienka pochádza od Newtona. Keď si uvedomíme, že riešiť algebraickú rovnicu znamená hľadať priesečníky krivky, zodpovedajúcej príslušnému polynómu, s osou x, tak, keby vzorce fungovali univerzálne, t.j. mali by pri všetkých hodnotách koeficientov riešenie, znamenalo by to, že všetky krivky musia pretať os x. To je zrejme nezmysel, nie je ťažké nakresliť polynóm, ktorý os x nepretína. Preto musí existovať možnosť, kedy vzorce zlyhajú a táto možnosť zodpovedá situácii neexistencie priesečníka. Nie je ťažké nahliadnuť, že je to vtedy, keď sa pod odmocninou zjavia záporné čísla. Napríklad vzorec pre riešenie kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

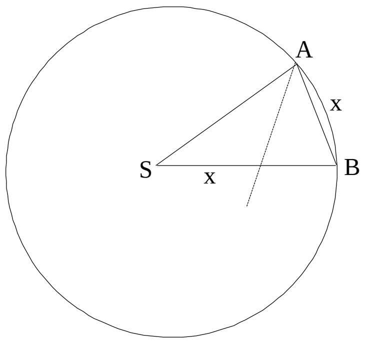
prestáva fungovať (v obore reálnych čísel), keď je číslo $b^2 - 4ac$ záporné. A to nastáva práve vtedy, keď parabola, daná rovnicou $y = ax^2 + bx + c$, nepretne os x.

Zlyhanie algebraických vzorcov nie je teda prejavom nešikovnosti algebraika. Práve naopak, keďže algebraické rovnice vyjadrujú priebeh určitých kriviek, tak vzorce na ich riešenie musia v určitých situáciách zlyhať, aby dopriali krivkám potrebnú slobodu. Zlyhanie vzorcov, ktoré z hľadiska algebry mohlo pôsobiť ako nedostatok, nie je nedostatkom. Nie je to ani nejaký výnimočný jav, ale ide o systematický rys väčšiny algebraických formúl. Takže jazyk analytickej geometrie umožňuje pochopiť zlyhanie jazyka algebry, ktoré bolo z algebraického hľadiska záhadou.[7] Máme tu do činenia s niečím podobným, ako keď syntetická geometria umožnila vysvetliť neriešiteľnosť niektorých aritmetických úloh. V oboch prípadoch geometrický jazyk odhalil netušené bohatstvo možných situácií a v ich rámci vyčlenil tie, ktoré boli zodpovedné za zlyhanie symbolického jazyka. Preto tieto vysvetlenia nie sú prejavom duchaplnosti konkrétnych matematikov. Skôr odhaľujú explanatorickú silu príslušných ikonických jazykov. Kto, kedy a za akých okolností objavil explanatorickú silu určitého jazyka, je historická otázka. Avšak samotná explanatorická sila jazyka je epistemologický fakt, ktorý si vyžaduje skôr filozofickú než historickú analýzu.

d) integratívna sila jazyka – zjednotenie geometrických úloh

Descartova *Geometria* je rozdelená do troch kníh. Prvá má názov „*Problémy, ktorých konštrukcia vyžaduje iba rovné čiary a kružnice*“ a otvára sa tvrdením: „*Každý problém geometrie možno ľahko redukovať na tvar, v ktorom znalosť dĺžok určitých úsečiek postačuje pre jeho konštrukciu*“. Descartes ukazuje, že problémy, ktoré možno skonštruovať pomocou kružidla a pravítka sú ekvivalentné konštrukcii koreňov rovníc druhého stupňa. Jadrom tejto časti *Geometrie* je všeobecná stratégiu na riešenie všetkých geometrických problémov. Možno ju rozdeliť na tri kroky: pomenovanie, vypísanie rovníc a konštrukcia. Prvý krok spočíva v tom, že predpokladáme, že problém už bol vyriešený a dáme mená všetkým úsečkám, ktoré sú potrebné pri jeho riešení. V druhom kroku, ignorujúc rozdiel medzi známymi a neznámymi úsečkami, nájdeme vzťahy medzi ich dĺžkami, a zapíšeme ich pomocou rovníc. Tretí krok spočíva v geometrickej konštrukcii koreňov rovnice. Descartes uzatvára túto časť tvrdením, že všetky problémy klasickej geometrie možno vyriešiť uvedenou metódou, ktorá tak vlastne znamená smrť konštrukčnej geometrie. Analytická geometria umožňuje preniesť univerzálne metódy z algebry do geometrie. Aby sme si ilustrovali prevahu analytických metód nad konštrukčnými, uvedieme úlohu zostrojiť pravidelný päťuholník.

> „Začnime s pravidelným desaťuholníkom. Predpokladajme, že máme pravidelný desať-uholník vpísaný do jednotkového kruhu a označme dĺžku jeho strany *x*. Keďže uhol ASB je 36^{o}, a zvyšné dva uhly sú rovnako veľké, sú oba rovné 72^{o}. Preto prerušovaná čiara, ktorá rozpoľuje uhol SAB rozdelí trojuholník na dva rovnoramenné trojuholníky (plynie to z veľkosti uhlov). Preto prerušovaná čiara rozdelí polomer kružnice na dve úsečky dlhé x a 1 − x. Z podobnosti trojuholníka SAB s menším z dvoch trojuholníkov vieme, že $1/x = x/(1-x)$, teda $x^2 + x - 1 = 0$. Kladné riešenie tejto rovnice je $x = (\sqrt{5}-1)/2$." (Courant a Robbins 1941, s. 122)



Túto úsečku vieme ľahko zostrojiť. $\sqrt{5}$ je uhlopriečka obdĺžnika so stranami 2 a 1. Odčítame od nej úsečku dĺžky 1 a výslednú úsečku rozpolíme. Keď takto získanú dĺžku zoberieme do kružidla a začneme nanášať na obvod jednotkovej kružnice, pričom si budeme všímať iba každý druhý bod, dostaneme vrcholy pravidelného päťuholníka. Tu vidíme výhodu analytickej geometrie. Úlohu konštruovať pravidelný päťuholník previedla na úlohu skonštruovať úsečku určitej dĺžky, presne ako hovorí Descartes. Konštrukčná geometria bola náročná, lebo na konštrukciu každého útvaru si bolo treba pamätať špeciálny postup. V analytickej geometrii sa nekonštruujú útvary. Individuálne určenia útvaru sa zapíšu do tvaru algebraických rovníc a tie sa všeobecnými metódami algebry vyriešia. Konštruujú sa potom iba riešenia rovníc, čo sú úsečky určenej dĺžky. Napríklad namiesto konštrukcie pravidelného desaťuholníka sme dostali úlohu zostrojiť úsečku s dĺžkou $(\sqrt{5}-1)/2$. Na konštrukciu úsečiek existujú štandardné metódy. Poznáme postupy ako sa konštruuje súčet, súčin, rozdiel, podiel a druhá odmocnina úsečky danej dĺžky. A to je všetko, čo si z geometrie potrebujeme pamätať.[8]

Keď sa z hľadiska analytickej geometrie pozrieme na syntetickú geometriu, tak tam, kde bola pôvodne iba neprehľadná spleť konštrukčných trikov, sa začína črtať systém. Už si nepotrebujeme pamätať triky, analytická metóda umožňuje riešiť každý problém štandardným postupom. Nezaujíma ju elegancia riešenia. Je možné, že klasickí geometri dokázali zostrojiť päťuholník s menším počtom krokov, ako treba pri postupe uvedenom vyššie. Výhoda analytického postupu spočíva v tom, že vlastne nijako nesúvisí s päťuholníkom. V prípade ľubovoľného iného útvaru bude postup v hlavných rysoch rovnaký – zmení sa iba rovnica, ktorej koreň budeme konštruovať. Celková schéma však ostane nezmenená. Tá schéma sa zakladá na poznaní, že v geometrii pod zjavným povrchom, na ktorom sa zakladajú triky geometrov, leží vrstva vzťahov, vďaka ktorým sú tieto triky vôbec možné. Je potrebné zmocniť sa tejto hlbšej algebraickej úrovne problému a v nej hľadať riešenie. Vždy sa možno ľahko vrátiť späť, ku zjavnému povrchu. Takto analytická geometria odhaľuje hlbšiu jednotu, ktorá sa skrýva za zdanlivou rôznorodosťou geometrických úloh. Všetky úlohy spočívajú v zostrojení úsečiek, ktorých dĺžka je zadaná nepriamo, pomocou vzťahov k iným úsečkám. A tieto vzťahy majú tvar algebraických rovníc. To je všetko. Preto integratívnu silu jazyka analytickej geometrie budeme charakterizovať jeho schopnosťou zjednotiť postupy syntetickej geometrie .

e) logické medze jazyka – nemožnosť kvadratúry kruhu

Tnscendentnosť čísla π bola dokázaná roku 1882 Lindemannom (pozri Stewart 1989, Dörrie 1958 alebo Geľfond 1952). Toto tvrdenie ukazuje na medze jazyka analytickej geometrie. Analytická geometria je vybudovaná na základe algebry. Transcendentnosť čísla π, teda jeho neuchopiteľnosť metódami algebry znamená, že úloha o kvadratúre kruhu, v ktorej číslo π figuruje podstatným spôsobom, je metódami analytickej geometrie neriešiteľná. V jazyku analytickej geometrie sa neriešiteľnosť tejto úlohy nedá vyjadriť, a prejavuje sa len zlyhaním pokusov o jej riešenie.

f) expresívne medze jazyka – neschopnosť vyjadriť transcendentné funkcie

Krátko po objave analytickej geometrie sa ukázalo, že jazyk algebry je príliš chudobný na opísanie fenoménov, s ktorými sa stretávame vo svete kriviek. Predovšetkým dve skupiny kriviek – exponenciálne (e^x a jej inverzná ln(x)) a goniometrické (cos(x), sin(x), tg(x), cotg(x), arccos(x), arcsin(x), arctg(x) a arcctg(x)), ktoré hrajú významnú úlohu v mnohých aplikáciách matematiky, nie sú algebraické. Nie je možné vyjadriť ich pomocou polynómu. Prekračujú tak možnosti jazyka analytickej geometrie v tej podobe, ako tento jazyk vytvoril Descartes.

1.1.5 Diferenciálny a integrálny počet

Diferenciálny a integrálny počet predstavuje, podobne ako algebra alebo aritmetika, kalkul, t.j. symbolický jazyk na manipuláciu so znakmi. Objavili ho nezávisle od seba Gottfried Wilhelm Leibniz a Isaac Newton. Korene tohto jazyka však siahajú až do antického Grécka, k Archimedovi, ktorý vypracoval tzv. *metódu páky* a s jej pomocou vypočítal obsahy a objemy radu geometrických útvarov, ktoré dnes počítame pomocou integrovania. Archimedove kvadratúry a kubatúry (ako sa v staroveku hovorilo výpočtom obsahu a objemu) predstavujú jeden z vrcholov antickej matematiky. Zo svojich výsledkov si Archimedes najvyššie cenil výpočet objemu gule, ekvivalentný nášmu vzťahu $\frac{4}{3}\pi R^3$. V staroveku neexistovala algebraická symbolika, preto Archimedes namiesto vzorca vyjadril objem gule ako rozdiel objemov guli opísaného valca a do tohto valca vpísaného kužeľa. Guľu, kužeľ a valec si nechal vytesať aj na náhrobok. Archimedova metóda bola dômyselná. Útvar, ktorého objem chcel určiť, umiestnil na jedno rameno dvojramennej páky, rozkrájal ho na tenké plásty a tie potom vyvažoval na druhom konci páky podobnými plástmi iných útvarov. Napríklad pri výpočte objemu gule vyvažoval plásty valca pomocou plástov gule a kužeľa. Z podmienky rovnováhy na páke potom dostal vzťah pre príslušné objemy (pozri Waerden 1950).

Archimedova metóda páky je fascinujúca, lebo v zárodočnej podobe obsahuje všetky prvky, z ktorých bude pozostávať pojem určitého integrálu. Predovšetkým, Archimedes rovnako ako určitý integrál, delí objekt, ktorého obsah či objem počíta na tenké pásy či plásty, teda výpočet chápe ako ***sumáciu*** elementov. Táto sumácia sa deje na určitom ***intervale***, ktorý je určený priemetom telesa na smer ramena páky. Pozoruhodná je aj samotná páka, ktorá predstavuje zárodok idey miery, pretože jednotlivé pásy či plásty nie sú naukladané ľubovoľne, ale v odstupoch, ktorých veľkosti sú určené zodpovedajúcimi úsekmi ramena páky (mohli by sme povedať elementmi dp). Teda u Archimeda skutočne nachádzame všetky prvky neskoršieho pojmu integrál.

Ale rovnako dôležité ako vidieť podobnosti je všímať si aj rozdiely. Hlavným rozdielom je, že Archimedes ***nemá pojem funkcie***. Preto neintegruje oblasti ohraničené funkciami, ale počíta objemy objektov, ktoré sú definované geometricky. Jazyk syntetickej geometrie je však príliš chudobný v porovnaní s jazykom funkcií. Preto Archimedes počíta iba objemy ***jednotlivých izolovaných objektov***. Objem každého objektu je nútený počítať od začiatku, pre každý výpočet musí nájsť špeciálny trik, ako ho rozdeliť na plásty a ako tieto vyvažovať. Pri danom výpočte nemôže využiť predošlé. Metóda páky teda vlastne ani nie je metódou ale zbierkou duchaplných trikov. Na rozdiel od Archimedovho geometrického jazyka je jazyk funkcií natoľko bohatý, že naše výpočty rôznych integrálov môžu na seba nadväzovať. Výsledky jedného výpočtu sú automaticky východiskom radu ďalších výpočtov. Namiesto jednotlivých izolovaných integrálov máme široké triedy funkcií navzájom zviazané pomocou substitúcií a pravidla *per partes*. Pri integrovaní nezačíname každý výpočet odznova, ale každý výpočet začína tam, kde predošlý skončil. Integrály tvoria systematicky budovaný kalkul obsahujúci triedy funkcií, pre ktoré existujú štandardné metódy integrovania.

Príčina tohto zásadného rozdielu medzi Archimedovou metódou, pri ktorej je nutné každú kubatúru začínať odznova a medzi moderným integrálnym počtom, v ktorom sú jednotlivé výpočty prepojené, spočíva v jazyku. Archimedes svojimi dômyselnými trikmi iba kompenzoval nedostatky jazyka syntetickej geometrie, jeho malú expresívnu silu. Až keď sa zrodila algebraická symbolika a s jej pomocou sa otvoril vstup do širšieho univerza kriviek a keď Leibniz toto nové univerzum kriviek symbolicky uchopil pomocou pojmu funkcie, vznikol jazykový rámec, v ktorom bolo Archimedove myšlienky možné pretvoriť v systematickú metódu, v diferenciálny a integrálny počet.

a) logická sila jazyka – schopnosť vyriešiť problém kvadratúr

Analytická geometria síce priniesla zásadný pokrok v geometrii, niektoré geometrické úlohy však nedokázala vyriešiť. Predovšetkým problém kvadratúr a kubatúr, spočívajúci v úlohe určiť obsah plochy ohraničenej krivkami alebo objem telesa ohraničeného plochami, viedol ku zrodu techník, prekračujúcich medze analytickej geometrie. Analytická geometria poskytla významný podnet pre rozvoj techník kvadratúr a kubatúr tým, že zásadne obohatila univerzum geometrických objektov. Okrem toho tým, že umožnila skúmané útvary uchopiť do súradnej siete, prispela k rozvoju rôznych techník sumácie. Veľké majstrovstvo v týchto technikách dosiahli Johannes Kepler, Bonaventura Cavalieri a Evangelista Toricelli. Našli obsah a objem veľkého množstva útvarov. Ich prístup však mal podobné nevýhody ako postup Archimeda, lebo pre jednotlivé útvary museli nájsť špecifické spôsoby ich rozdelenia na časti a po preskupení častí špeciálne triky sumácie. Pritom každý postup sa hodil len pre malý počet príbuzných útvarov. Keplerovým, Cvalieriho a Toricelliho postupom chýbal univerzálny jazyk, ktorý by umožnil prejsť ku všeobecnejším technikám.

Táto situácia sa objavom diferenciálneho počtu zásadne zmenila. Zrodil sa symbolický jazyk na formálne výpočty s diferenciálmi *dx*. Diferenciálny a integrálny počet je založený na formálnych pravidlách manipulácie so znakmi. Za jeho zrod sa považuje objav Newtonovej–Leibnizovej formuly:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \text{kde} \qquad F'(x) = f(x) \qquad (3)$$

Táto formula umožňuje previesť ***ťažkú geometrickú úlohu*** kvadratúr (vyjadrenú pomocou určitého integrálu na pravej strane a spočívajúcu v rozrezaní útvaru pod krivkou $f(x)$ na pásy široké dx a ich následnej sumácii) na podstatne ***ľahší kalkulatívny problém*** hľadania tzv. primitívnej funkcie $F(x)$ k funkcii $f(x)$ (spočívajúci v úlohe nájsť takú funkciu $F(x)$, ktorej derivácia $F'(x)$ je rovná práve $f(x)$). Formula (3) umožňuje, aby sme namiesto určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ počítali rozdiel $F(b) - F(a)$. Keď chceme napríklad vypočítať obsah plochy uzavretej pod parabolou $y = x^2$ v hraniciach od $x = 4$ po $x = 7$, nemusíme počítať integrál

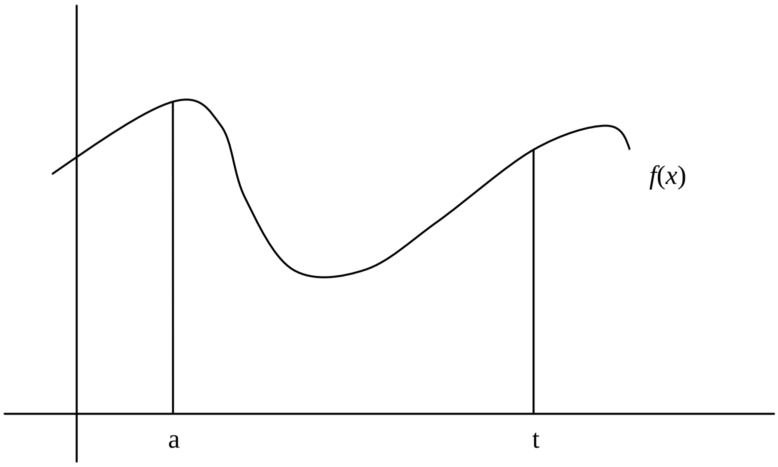
$$\int_4^7 x^2 dx$$

ale podľa (3) stačí vziať funkciu $\frac{1}{3}x^3$, čo je primitívna funkcia k x^2 a vypočítať rozdiel

$$\frac{7^3}{3} - \frac{4^3}{3} = \frac{343-64}{3} = 93.$$

Vidíme, že namiesto zložitých sumácií stačia elementárne počtové úkony. Vo všeobecnosti síce nájdenie primitívnej funkcie nie je až tak jednoduché ako v tomto príklade, ale vždy je podstatne jednoduchšie, než sumácie, ktoré robili Kepler či Cavalieri (pozri Edwards 1979, s. 99-109).

Otázka samozrejme znie, čo umožnilo túto kvalitatívnu zmenu v prístupe ku kvadratúram? Pozrime sa preto, ako Newton objavil formulu (3). Základná idea spočívala v tom, pozrieť sa na plochu pod krivkou ako na premennú veličinu, teda predstaviť si, že pravá hranica útvaru nie je pevne daná nemennou hodnotou $x = b$, ale sa mení. Predstavme si teda plochu pod krivkou $f(x)$, uzavretú medzi pevnou hranicou $x = a$ a premenlivou hranicou $x = t$. Nechajme parameter t narastať.



Pravá strana tohto útvaru sa bude rovnomerne posúvať doprava a jeho obsah bude narastať. Zdanlivo sme si skomplikovali život, lebo namiesto plochy pod krivkou $f(x)$, ktorá prislúcha pevne zvolenej pravej hranici útvaru pre konkrétne $x = b$ chceme počítať plochu pod krivkou pre všetky možné hodnoty parametra t. Ale toto zdanlivé skomplikovanie úlohy je kľúčom k jej vyriešeniu, keď namiesto počítania plochy pod krivkou $f(x)$ na pevne zvolenom intervale (a, b) budeme hľadať ***funkciu F*(*t*)** ktorá udáva plochu pod krivkou $f(x)$ na premenlivom intervale $(a, \boldsymbol{t})$ v závislosti od $\boldsymbol{t}$:

$$F(\boldsymbol{t}) = \int_a^t f(x)dx. \tag{4}$$

Tým, že sme úlohu na výpočet obsahu jediného útvaru zasadili do celej triedy analogických úloh, môžeme sa spýtať, ako sa plocha $F(t)$ mení v závislosti od t. Zrejme to závisí od hodnoty funkcie $f(x)$ v príslušnom bode t. Ak je $f(t)$ veľké, plocha bude pribúdať rýchlo, ak je $f(t)$ malé, plocha bude pribúdať pomaly. Aká je rýchlosť narastania plochy $F(t)$? Rýchlosť narastania nejakej veličiny je jej prírastok za krátky časový úsek Δt vydelený Δt. Pre rýchlosť narastania plochy tak dostávame:

$$\frac{\int_t^{t+\Delta t} f(x)dx}{\Delta t} \approx \frac{f(t).\Delta t}{\Delta t} = f(t) \tag{5}$$

Rýchlosť narastania plochy pod krivkou $f(x)$ v bode t sa rovná funkčnej hodnote $f(t)$ v tomto bode.

O funkcii $F(t)$ teda platí, že rýchlosť jej narastania je rovná presne $f(t)$. A to je celý trik. Teraz už môžeme zabudnúť na plochy aj na celú geometriu a môžeme sa pustiť do hľadania takej funkcie $F(t)$, ktorej derivácia bude práve rovná funkcii $f(t)$. Táto skutočnosť je obsahom formule (3).

Objav Newtonovej–Leibnizovej formule bol teda umožnený novým pohľadom na plochu pod krivkou. Newton sa na plochu pod krivkou pozrel ako na ***funkciu***. Rozhodujúcim momentom bolo položenie otázky, ako rýchlo sa plocha mení v ***závislosti*** od tejto medze. Newton zistil, že rýchlosť zmeny má jednoduché vyjadrenie, dané vzťahom (5). Túto závislosť využil a ***namiesto funkcie udávajúcej plochu pod krivkou hľadal funkciu, ktorej rýchlosť zmeny je daný funkciou f(x)*** ktorá zadávala pôvodnú krivku. Zrod diferenciálneho a integrálneho počtu sa tak viaže na zásadnú zmenu jazyka matematiky, spočívajúcu v zavedení explicitného pojmu funkcie.

Pojem funkcie súvisí s pojmom závislosti medzi premennými, ktorý sa objavil v analytickej geometrii. V diferenciálnom a integrálnom počte sa však táto závislosť stáva explicitne vyjadrenou v symbolickom jazyku pomocou funkcie $f(x)$. Vďaka explicitnému pojmu funkcie sa plocha, ktorá je zadaná pomocou funkcie $f(x)$, môže začať uvažovať ako funkcia hornej medze intervalu. To znamená, že sa tu rodí ***implicitný pojem funkcie*** (integrál na pravej strane v (4) je funkciou, ktorá závisí jednak od premennej t a potom od ***funkcie*** $f(x)$), teda vlastne s funkciou druhého rádu, ako to opísal Frege v pasáži citovanej na strane 12. Kvôli tomu, aby bolo možné pracovať s funkciami druhého rádu (ako sú integrál či derivácia), funkcie prvého rádu sa museli stať plne explicitnými. Zavedenie explicitnej notácie pre funkcie je tak charakteristická črta symbolického jazyka diferenciálneho a integrálneho počtu. Možno preto povedať, že Newton a Leibniz preniesli ideu funkcionálnej závislosti z ikonického jazyka analytickej geometrie do symbolického jazyka a vytvorili explicitný pojem funkcie.

b) expresívna sila jazyka – schopnosť vyjadriť transcendentné funkcie

Ako sme už uviedli, symbolický jazyk algebry, na ktorom sa zakladala analytická geometria, neumožňuje vyjadriť tak jednoduché funkcie ako sú e^x alebo $\sin(x)$. Tieto funkcie presahujú jeho expresívne medze. Jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu dokáže tieto funkcie vyjadriť rôznymi spôsobmi – v tvare radu, integrálu, alebo ako riešenie diferenciálnej rovnice. Napríklad logaritmickú funkciu možno vyjadriť ako rad

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - + \ldots,$$

ako integrál

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

alebo ako riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' = \frac{1}{y}, \qquad y(1) = 0.$$

Logaritmická funkcia ani zďaleka nepredstavuje vrchol možností nového jazyka. Stačí spomenúť Eulerovu Γ-funkciu, Besselove funkcie, hyperbolické funkcie, Riemannovu ζ-funkciu, eliptické funkcie a mnohé ďalšie špeciálne funkcie, s ktorými sa možno stretnúť vo fyzikálnych a technických aplikáciách. Diferenciálny a integrálny počet tak predstavuje jazyk, umožňujúci vyjadriť nesmierne množstvo nových funkcií, ktoré sú v rámci jazyka polynómov nemysliteľné.

Pritom jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu je rozšírením jazyka algebry. Keď v nekonečnom rade pripustím len konečne veľa nenulových členov, dostanem z radu polynóm. Vo svete polynómov je derivovanie a integrovanie definované pomocou jednoduchých explicitných vzťahov, ktoré preto možno považovať za nové (aj keď trocha neprirodzené) algebraické operácie. Teda jazyk algebry možno vyčleniť ako určitú podoblasť jazyka matematickej analýzy.

c) explanatorická sila jazyka – schopnosť vysvetliť neriešiteľnosť kvadratúry kruhu

V rámci algebry sa síce podarilo objasniť, prečo je neriešiteľná trisekcia uhla a duplicita kocky. Algebra však nedokázala vysvetliť, prečo sa nikomu nepodarilo vyriešiť úlohu kvadratúry kruhu. Postupne sa zrodilo podozrenie, že príčinou tohto neúspechu by mohla byť transcendentnosť čísla π. Toto podozrenie sa potvrdilo, keď roku 1873 Charles Hermite metódami teórie funkcií komplexnej premennej dokázal transcendentnosť čísla e a roku 1882, využívajúc Hermitove metódy sa Ferdinandovi Lindemannovi podarilo ukázať aj transcendentnosť čísla π (Pozri Geľfond 1952, s. 54-66, alebo Postnikov 1963, s. 205-211).

Lindemann dokázal vetu: Nech α_1, α_2, ... α_s sú ľubovoľné, po dvoch rôzne algebraické čísla a A_1, A_2, ... A_s sú ľubovoľné algebraické čísla rôzne od nuly. Potom je nemožná identita

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_s e^{\alpha_s} = 0 .$$

Z tejto vety plynie transcendentnosť čísla π, lebo na základe Eulerovho vzťahu platí $e^{2i\pi} = 1$, čo by Lindemannova veta zakazovala, keby π bolo algebraické. V tejto súvislosti sa ukázala ďalšia zaujímavá vec. S výnimkou bodu (0,0) je z dvojíc čísel (x, sin(x)), ktoré zadávajú body sínusoidy, vždy aspoň jedno číslo transcendentné. Inak povedané, s výnimkou počiatočného bodu sa žiaden bod grafu sínusoidy nedá skonštruovať metódami analytickej geometrie. Takže už tak jednoduchá krivka ako sínusoida sa úplne vymyká jazyku analytickej geometrie.

d) integratívna sila jazyka – matematická fyzika

Diferenciálny a integrálny počet je univerzálny jazyk, ktorý umožňuje modernej fyzike spojiť všetky fyzikálne disciplíny do jednotného celku a odkryť tak základnú jednotu prírodných javov. Fyzika opisuje prírodné javy pomocou závislostí medzi fyzikálnymi veličinami, pričom tieto závislosti podriaďuje prírodným zákonom, ktoré majú povahu diferenciálnych rovníc. Dá sa povedať, že celá moderná fyzika je sformulovaná pomocou diferenciálnych rovníc: od mechaniky (Lagrangeove a Hamiltonove rovnice), cez elektrodynamiku (Maxwellove rovnice), akustiku (vlnová rovnica), termodynamiku (rovnica vedenia tepla) až po kvantovú mechaniku (Schrödingerova rovnica).

U Descarta, tesne pred vznikom modernej fyziky, jednota prírody bola chápaná ontologicky – zakladala sa na presvedčení o jednotnom mechanistickom základe všetkých prírodných procesov. Metafyzika tak plnila úlohu, ktorej sa jazyk matematiky Descartových čias nebol schopný zhostiť – spojiť prírodu do jednotného celku. Dnešná matematická fyzika už od nás nevyžaduje veriť v nejakú špecifickú ontológiu preto, aby sme zahliadli v prírode jednotu. Jednota modernej fyziky je formálna – daná jednotou spôsobu opisu prírodných javov, a nie obsažná – nesená jednotnou substanciou, v ktorej sa tieto javy odohrávajú. Rovnica vedenia tepla si udržala svoju platnosť aj potom, keď bola zavrhnutá teória *kalorika*, na základe ktorej ju Fourier odvodil. To ukazuje, že jednota, ktorú fyzike prepožičiava jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu, je od ontológie nezávislá formálna jednota.

Túto jednotu modernej fyziky možno považovať za prejav integratívnej sily jazyka diferenciálneho a integrálneho počtu.

e) logické medze jazyka − kríza základov

Prvú kritiku diferenciálneho a integrálneho počtu uverejnil George Berkeley v spise *The Analyst, or a discourse addressed to an Infidel Mathematician*, ktorý vyšiel v Dubline r. 1734. Vo svojom spise Berkeley parodizuje Newtonovu teóriu *fluxií* a *fluent* (ale všetky námietky platia s rovnakou silou aj pre Leibnizovu teóriu, založenú na diferenciáloch). Berkeley ukazuje, že kalkulus sa zakladá na logickom omyle. Našťastie však nie na jedinom, ale na viacerých, pričom tieto omyly sa navzájom kompenzujú tak, že kalkul nás nakoniec privedie ku správnemu výsledku. Berkeley tu má na mysli Newtonov postup pri derivovaní, pri ktorom sa v časti výpočtu určité veličiny považujú za rôzne od nuly, aby sa nimi dalo deliť. Po tom, ako sa delenie úspešne zavŕši, položia sa rovné nule. Berkeley správne namieta, že veličiny sú buď rovné nule, a potom sú rovné nule v priebehu celého výpočtu a teda sa nimi nedá deliť, alebo sa nule nerovnajú, ale potom sa nule nerovnajú v priebehu celého výpočtu a nemožno ich na konci zanedbať. Preto podľa Berkeleya je celý diferenciálny počet mylný. To, že napriek tomu vedie k správnym výsledkom, je možné len vďaka vzájomnej kompenzácii chýb.

Berkeleyova kritika diferenciálneho a integrálneho počtu nebola jedinou, ktorá poukazovala na nedostatočné zdôvodnenie formálnych metód, na ktorých bol diferenciálny a integrálny počet vybudovaný. Snahy vybudovať základy matematickej analýzy sa tiahnú celým 18. a 19. storočím. Snáď najvážnejší pokus predložil Augustin Cauchy roku 1821 v slávnom *Cours de l'Analyse*. Cauchy našiel spôsob, ako možno Newtonove fluxie a Leibnizove diferenciály z matematickej analýzy vylúčiť a celú analýzu založiť na pojme limity. Pri zavádzaní pojmu limity však Cauchy opúšťa jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu, opúšťa formálne manipulácie so symbolmi a ako základný princíp na ktorom buduje analýzu volí princíp do seba zapadajúcich intervalov. Princíp do seba zapadajúcich intervalov je však geometrický princíp. Všetky pokusy o vybudovanie základov matematickej analýzy nasledujú Cauchyho v tom, že opúšťajú jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu, opúšťajú svet symbolov, a v tej či onej podobe budujú teóriu kontinua. Preto sa zdá, že kríza základov predstavuje logické medze jazyka diferenciálneho a integrálneho počtu a to je príčina, prečo všetky pokusy o vyriešenie krízy základov tento jazyk nutne opúšťajú.

f) expresívne medze jazyka – fraktály

Keď Newton a Leibniz nahradili Descartove algebraické prostriedky radmi, integrálmi a diferenciálnymi rovnicami, zdalo sa, že vytvoril prostriedok pre vyjadrenie ľubovoľnej funkcie. Po čase sa však ukázalo, že tomu ani zďaleka tak nie je. V polovici 19. storočia sa začali objavovať funkcie, ktoré v mnohom odporovali intuitívnej predstave tohto pojmu. Funkcie, ktoré nie sú v žiadnom bode spojité (Dirichletova funkcia), funkcie, ktoré síce spojité sú, ale v žiadnom bode nemajú deriváciu (Bolzanova funkcia, Kochovej krivka), funkcie, ktorých graf vypĺňa jednotkový štvorec (Peanova krivka) a mnoho ďalších. Po čase bolo takýchto objektov dostatočné množstvo k tomu, aby sa stali predmetom systematického štúdia a zrodila sa teória funkcií reálnej premennej. V rámci tejto teórie došlo na jednej strane k nesmiernemu zjemneniu pojmov derivácie a integrálu, ale na druhej strane sa jasne ukázalo, že jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu je vhodný len pre pomerne úzku triedu „slušných" funkcií kým prevažná väčšina reálnych funkcií sa expresívnej sile jazyka diferenciálneho a integrálneho počtu vymyká.

1. 1. 6 Iteratívna geometria

Diferenciálny a integrálny počet vznikol v úzkej náväznosti na analytickú geometriu. Matematici považovali Descartovu metódu generovania tvaru bod po bode pomocou analytickej formuly za adekvátny spôsob vizualizácie nielen pre polynómy, pre ktoré ju Descartes vytvoril, ale aj pre omnoho bohatší svet funkcií ktoré sú opísané pomocou nekonečných radov, integrálov a diferenciálnych rovníc. Verili, že analytický svet funkcií a geometrický svet kriviek sú v zhode. Leibniz vyjadril toto presvedčenie slovami:

> *„Dokonca ak niekto nakreslí jedným ťahom čiaru, ktorá by bola striedavo priama i okrúhla i iná, možno nájsť pojem alebo pravidlo či rovnicu pre všetky body tejto čiary, na ktorého základe musí u čiary dôjsť presne k rovnakým zmenám. Neexistuje napríklad žiadna tvár, ktorej obrysy by neprebiehali podľa nejakej geometrickej čiary a ktorú by nebolo možné načrtnúť jedným ťahom pomocou určitého usmerneného pohybu. Ak je však nejaké pravidlo príliš komplikované, potom obyčajne považujeme to, čo je podľa neho pravidelné, za nepravidelné" (Leibniz 1686, s. 59).*

Prvé pochybnosti o možnosti vyjadrenia ľubovoľnej krivky pomocou analytického výrazu sa vynorili v diskusii medzi Leonardom Eulerom a Jeanom le Rond d'Alembertom o kmitaní struny. Kmitanie struny je opísané diferenciálnou rovnicou, ktorú odvodil roku 1715 Brook Taylor. Roku 1747 d'Alembert našiel riešenie tejto rovnice v tvare bežiacej vlny. Keďže diferenciálna rovnica je analytický vzťah, d'Alembert predpokladal, že počiatočný tvar struny musí byť zadaný pomocou explicitného výrazu, ktorý možno dosadiť do rovnice a jej riešením určiť tvar struny v neskorších okamihoch. Euler proti tomuto predpokladu vzniesol námietku, že príroda sa predsa nemusí zaujímať o naše analytické výrazy. Keď dáme strune určitý tvar pomocou prstov alebo sláčika, struna bude kmitať v súlade s rovnicou nezávisle od toho, či jej tvar dokážeme zadať pomocou analytického výrazu. Euler ani d'Alembert však nedokázali v tejto otázke pokročiť ďalej a spor ostal nerozhodnutý.

Nový podnet dostala otázka vzťahu medzi geometrickými krivkami a analytickými výrazmi začiatkom 19. storočia, kedy Joseph Fourier odvodil rovnicu vedenia tepla a rozpracoval metódy jej riešenia. Fourier ako prvý začal systematicky pracovať s funkciami, ktoré sú nespojité (v dnešnom zmysle slova)[9]. V mechanike je použitie nespojitých funkcií absurdné; ak funkcia opisuje pohyb častice, tak bod jej nespojitosti by označoval okamih, kedy častica na jednom mieste zmizla a objavila sa na inom. Podobne neprirodzené je použitie nespojitých funkcií pri opise kmitania strún, kde by nespojitosť znamenala pretrhnutie struny, a tak o kmitaní už nemôže byť reč. Keď však funkcia neopisuje pohyb ale rozdelenie teploty v rôznych bodoch telesa, sú nespojité funkcie prirodzené. Opisujú situácie vzájomného dotyku telies s rôznymi teplotami. Teda prechod od mechaniky k termodynamike zásadne rozšíril hranice pojmu funkcie.

Okrem rozšírenia pojmu funkcie, Fourierova *Théorie analytique de la chaleur* (Analytická teória tepla, Fourier 1822) obsahuje postup, ktorý umožňuje pre „takmer" ľubovoľnú funkciu nájsť jej analytické vyjadrenie. Fourier tak zasiahol do diskusie o vzťahu funkcií a kriviek. Predpokladajme, že máme nejakým spôsobom (tabuľkou alebo grafom) zadanú funkciu $f(x)$. Fourierov postup spočíva v tom, že pomocou (numerického) integrovania vypočíta čísla (dnes nazývané *Fourierove koeficienty*):

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\cos(kx)dx \qquad B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\sin(kx)dx$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

a s ich pomocou vyjadríme funkciu $f(x)$ (ktorú sme mali zadanú iba tabuľkou alebo graficky) v tvare analytického výrazu, ktorý sa dnes nazýva *Fourierovým radom*:

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx)$$

Fourier tak vychýlil vážky v prospech d'Alembertovej pozície, lebo ukázal, že pre „takmer" ľubovoľnú funkciu možno nájsť jej analytické vyjadrenie. D'Alembert tak mohol odpovedať Eulerovi, že aj keď sa príroda o naše analytické výrazy starať nemusí, vieme sa o ne postarať sami. Jediným problémom bolo to slovko „takmer". Celý rad matematikov, počnúc Petrom Gustavom Lejeune-Dirichletom, Karlom Weierstrassom a Bernardom Riemannom a končiac Henri Lebesguom a Andrejom Nikolajevičom Kolmogorovom sa zapojil do presnejšieho určovania tohto „takmer". Kvôli vyjasneniu otázky konvergencie Fourierových radov matematici vymysleli rad podivných funkcií: Dirichletovu funkciu roku 1829, Bolzanovu funkciu roku 1834, Riemannovu funkciu roku 1854, Weierstrassovu funkciu roku 1861 alebo Kolmogorovovu funkciu roku 1923 (pozri Manheim 1964 a Hardy a Rogosinski 1944). Teória Fourierových radov si vynútila prehĺbenie viacerých pojmov matematickej analýzy, predovšetkým samotného pojmu funkcie a pojmu integrálu. V jej rámci sa zrodil ako Riemannov tak aj Lebesguov integrál. Nakoniec sa v prácach matematikov ako Camile Jordan, Gaston Darboux, Giuseppe Peano, Émile Borel, René Baire, či Henri Lebesgues konštituovala nová matematická disciplína, ***teória funkcií reálnej premennej*** (pozri Kline 1972).

Ako sme už spomenuli, v rámci teórie funkcií reálnej premennej sa vynoril rad podivných funkcií. Spočiatku boli tieto funkcie považované za „patologické prípady" (Imre Lakatos ich neskôr nazve monštrá). Matematici sa aj naďalej pridržiavali sveta analytických kriviek v presvedčení, že metóda generovania krivky bod po bode pomocou analytickej formule predstavuje adekvátnu metódu, ktorá až na niekoľko „patologických" výnimiek, je v súlade s duchom matematickej analýzy. Koncom 19. storočia sa však už „patologických" funkcií nahromadil dostatočný počet, aby sa mohli stať predmetom systematického štúdia. Matematici našli celý rad ich spoločných vlastností ako napríklad, že „typická patologická funkcia“ v žiadnom bode nemá deriváciu a nie je možné priradiť jej ani dĺžku. Pritom jedným z prekvapujúcich zistení bolo, že to, čo sa spočiatku javilo ako výnimočné patologické prípady, je pre funkcie vlastne typické. Toto zistenie viedlo k oslobodeniu pojmu funkcie od jeho prepojenia s analytickými výrazmi. Ukázalo sa, že naviazanosť pojmu funkcie na analytické výrazy viedla ku skresleným predstavám. Avšak, ako poznamenal Emile Picard, táto skreslená predstava bola užitočná, lebo „*keby si Newton a Leibniz boli mysleli že spojitá funkcia nemá nevyhnutne deriváciu–a toto je všeobecný prípad–diferenciálny počet by nikdy nebol vznikol*“ (Kline 1972, s. 1040).

Mnohé z „patologických“ príkladov majú spoločné to, že nie sú generované Descartovou metódou bod po bode podľa formuly, ale generujú sa pomocou nekonečného počtu ***iterácií***. Descartes, keď raz vyniesol určitý bod grafu funkcie, už ho nemenil. Naproti tomu, pri tomto novom spôsobe generovania kriviek, sa v každom kroku iterácie vygeneruje celý graf znova. Krivku potom získavame ako ***limitu***, ku ktorej sa pomocné grafy blížia. Nový spôsob generovania tvaru má tak v sebe zabudovaný limitný prechod. Podobne, ako Descartovu metódu možno považovať za vizualizáciu jazyka algebry, kde centrálnym objektom je polynóm a práve polynómu Descartes priradil tvar, teraz ide o vizualizáciu jazyka diferenciálneho a integrálneho počtu, kde centrálnym objektom je limitný prechod. Až iteratívna geometria odkryla to netušené bohatstvo tvarov, ktoré v sebe pojem limitného prechodu skrýva. Iteratívna geometria sa dostala do povedomia širšej verejnosti vďaka počítačom, ktoré umožňujú iteratívne procesy implementovať a na obrazovke sa objavia útvary, známe ako fraktály. Fraktály predstavujú nové univerzum útvarov, ktoré má nepopierateľné estetické kvality, ako ukázali Peitgen a Richter v knihe *The Beauty of Fractals* (Peitgen a Richter 1986).

a) logická sila jazyka – schopnosť dokázať existenciu riešení diferenciálnych rovníc

Podobne, ako jazyk analytickej geometrie umožnil dokázať fundamentálnu vetu algebry, podľa ktorej každý polynóm *n*-tého stupňa s komplexnými koeficientmi má aspoň jeden koreň, jazyk iteratívnej geometrie poskytuje prostriedky na dôkaz viet o existencii a jednoznačnosti riešení pre široké triedy diferenciálnych rovníc. Diferenciálne rovnice sú rovnice v ktorých vystupujú neznáme funkcie spolu so svojimi deriváciami. Zdá sa, že prvou diferenciálnou rovnicou v dejinách bol

Newtonov zákon sily (zapísaný Eulerom v tvare):

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

ktorý dáva do súvisu silu F pôsobiacu na teleso so zrýchlením (teda druhou deriváciou polohy podľa času), ktoré táto sila vyvolá. Spočiatku matematici hľadali riešenia diferenciálnych rovníc v explicitnom tvare a bol vypracovaný celý rad štandardných metód, umožňujúcich nájsť riešenia pre široké triedy diferenciálnych rovníc. Pri väčšine z týchto metód matematici vychádzali z predpokladu, že riešenie bude mať tvar kombinácie vytvorenej z určitých funkcií a niekoľkých parametrov. Predpokladanú kombináciu dosadili do diferenciálnej rovnice, čím dostali súbor (algebraických) vzťahov pre parametre, od ktorých táto kombinácia závisela.

Pomerne skoro však matematici narazili pri niektorých diferenciálnych rovniciach na tzv. *singulárne riešenia*. Boli to riešenia, ktoré ostali pri bežných metódach skryté. Hlbšiu analýzu singulárnych riešení dal roku 1776 Lagrange. Okrem toho existovali široké triedy (nelineárnych) diferenciálnych rovníc, pre ktoré sa nedarilo nájsť riešenia v explicitnom tvare. K týmto technickým problémom sa začiatkom 19. storočia pripojilo spochybnenie naivnej dôvery v metódy „manipulácií so symbolmi", ktoré boli typické pre diferenciálny a integrálny počet. Vo svojich prednáškach z rokov 1820 až 1830 preto Cauchy podáva dôkaz existencie a jednoznačnosti riešenia diferenciálnej rovnice prvého rádu. Cauchyho metódy dôkazu boli postupne vylepšené roku 1876 Rudolfom Lipschitzom, potom roku 1893 Émile Picardom a Giuseppe Peanom.

Dôkazy viet o existencii a jednoznačnosti riešenia diferenciálnych rovníc sú technicky náročné, a preto ich tu nebudeme rozoberať. Pre naše účely stačí upozorniť na jednu dôležitú okolnosť. V rámci uvedených dôkazov Cauchy, Lipschitz, Picard a Peano použili úplne iný spôsob vytvárania funkcie než bolo dovtedy bežné. Namiesto zadania funkcie ako analytického objektu pomocou analytického výrazu funkciu zadávajú ako geometrický objekt, ktorý vytvárajú pomocou iteratívneho procesu. Metóda približných aproximácií, ako sa táto nová metóda nazýva, je tak príbuzná s metódou, pomocou ktorej boli generované „patologické" funkcie, spomínané v úvode tejto kapitoly. Samozrejme, tu bol zámer matematikov opačný ako pri vytváraní „monštier", preto teraz na iteratívny proces naložili rad podmienok, ktorými zabezpečili, aby limitné funkcie boli „slušné". Ale to nie je podstatné. Je jedno, či pomocou iteratívneho procesu konštruujeme „patologickú" funkciu, ktorá poslúži ako protipríklad, alebo pomocou neho zostrojíme „slušnú" funkciu ktorá je riešením diferenciálnej rovnice. Podstatné je, že určitý objekt vytvárame úplne novým spôsobom. Namiesto vynášania bodov podľa analytického výrazu ho generujeme pomocou iteratívneho procesu.

V dobe kedy Cauchy predložil svoj dôkaz, si (pravdepodobne s výnimkou Bolzana) nik neuvedomil radikálnosť zmeny v spôsobe zadávania funkcií. Nový nástroj na generovanie objektov bol použitý na vytvorenie teoretických základov pre metódy riešenia diferenciálnych rovníc, a tak nevzbudzoval podozrenie. Revolučná technika bola použitá na dosiahnutie konzervatívnych cieľov - na dôkaz skutočnosti, že každá „slušná" diferenciálna rovnica má „slušné" riešenie. Iteratívna geometria upútala pozornosť až keď s jej pomocou boli dosiahnuté neočakávané výsledky. Z hľadiska epistemológie je však jedno, akým spôsobom určitú technickú inováciu použijeme. Jej novosť je daná nie výsledkami (tie iba pomáhajú si túto novosť uvedomiť), ale prístupom ku generovaniu objektov.

b) expresívna sila jazyka – schopnosťopísať fraktály

Prvý, kto si uvedomil problémy ktoré otvára nový spôsob generovania kriviek pomocou iteratívneho procesu bol Bernard Bolzano. Roku 1834 našiel príklad funkcie, ktorá nemá v žiadnom bode deriváciu (pozri Sebestik 1992, s. 417-431 alebo Rusnock 2000, s. 174). Tento príklad odporuje intuícii, ktorú sme nadobudli vo svete analytických kriviek. Derivácia krivky v bode udáva smer, ktorým sa krivka uberá, keď opúšťa príslušný bod. Krivka, ktorá nemá v žiadnom bode deriváciu, je tak krivkou, ktorá sa nedá nakresliť. V žiadnom jej bode nevieme, ktorým smerom máme ťahať ceruzku. Presnejšie povedané, nemáme ju ťahať žiadnym smerom, lebo krivka je v každom svojom bode „zlomená", takže neobsahuje ani ten najkratší úsek v nejakom smere. Leibnizov optimizmus, ktorý vyjadruje citát uvedený na začiatku kapitoly sa tak rúca.

Prvé fraktály sa objavili ako izolované a spolu nesúvisiace protipríklady niektorých viet matematickej analýzy. Felix Hausdorff roku 1918 našiel určitú vlastnosť, ktorá tieto objekty spája. Keď vypočítame ich dimenziu, ktorá sa dnes volá ***Hausdorffova dimenzia***, dostaneme hodnotu ktorá nebude celé číslo. Ich dimenzia nebude celočíselná, ako je tomu pre klasické útvary: pre krivky rovná

1, pre plochy rovná 2 a pre telesá rovná 3. Dimenzie fraktálov budú niekde medzi týmito hodnotami. Napríklad *Cantorova množina* má dimenziu približne 0,6309, *Kochovej krivka* 1,2619 a *Sierpinského trojuholník* 1,5850 (Peitgen, Jürgens a Saupe 1992). Odtiaľ pochádza aj názov *fraktál*, ktorý označuje neceločíselnosť (zlomkovitosť) ich dimenzie. Benoit Mandelbrot našiel ďalšiu vlastnosť zjednocujúcu svet fraktálov – samopodobnosť. Samopodobnosť fraktálov znamená, že ak zoberieme časť fraktálu a vhodne ju zväčšíme, dostaneme objekt zhodný s pôvodným.

Postupne sa vyjasnilo, že fraktály hrajú dôležitú úlohu pri chaotickej dynamike a pri opise turbulencie, a tak iteratívna geometria prestala byť považovaná za rozmar matematikov. Začala byť vnímaná ako samostatný svet geometrických útvarov. Popri svete syntetickej geometrie, ktorá útvary konštruuje pomocou kružidla a pravítka, a svete analytickej geometrie, ktorej útvary sú generované bod po bode pomocou analytického výrazu, predstavuje svet iteratívnej geometrie tretí typ jazyka, umožňujúceho hovoriť o tvare. Jeho termami sú fraktály. Zadať nejaký fraktál pomocou formuly, t.j. chcieť ho vygenerovať Descartovou metódou, je beznádejné. Netreba na to veľkú fantáziu, aby sme si uvedomili, že svet iteratívne generovaných útvarov je kvalitatívne bohatší než svet Descartov. Pritom svet analytickej geometrie je možné v tomto svete vyčleniť ako oblasť, ktorú dostaneme, keď budeme pri iteratívnom procese vyžadovať rovnomernú konvergenciu funkcie spolu s dostatočným počtom derivácií. Descartov svet analytických kriviek je „hladkou časťou“ sveta iteratívnej geometrie, rovnako ako je svet Euklidových kriviek „kvadratickou časťou“ sveta analytickej geometrie.

c) explanatorická sila jazyka – schopnosť vysvetliť neriešiteľnosť problému troch telies

Problémom *dvoch* telies, alebo tiež *Keplerovou úlohou*, sa v klasickej mechanike rozumie úloha nájsť trajektórie, po ktorých sa budú v priestore pohybovať dve telesá s hmotnosťami m_1 a m_2, ktoré na seba pôsobia iba silou gravitačnej príťažlivosti. Táto úloha dnes nesie Keplerovo meno, lebo Kepler analýzou pozorovaní planéty Mars (teda čisto empiricky) našiel základné vlastnosti riešenia tejto úlohy (eliptický tvar dráh ako aj spôsob zrýchľovania pohybu v perihéliu), ktoré sú vyjadrené pomocou prvých dvoch Keplerových zákonov. Samozrejme, za Keplerových čias ešte úloha dvoch telies nemohla byť ani len sformulovaná. To urobil až Newton, ktorý úlohu za zjednodušujúcich predpokladov aj vyriešil. Úplné riešenie úlohy dvoch telies podal Johann Bernoulli roku 1710.

Problém *troch* telies je analogický predošlému, ibaže namiesto pohybu dvoch telies skúmame pohyb troch telies. Ukazuje sa však, že všetka pravidelnosť, ktorú bolo možné nájsť v Keplerovej úlohe (eliptický tvar trajektórií, konštantná plocha opisovaná sprievodičom za určitý čas) sa pri prechode k trom telesám úplne strácajú. Napriek tomu, že problému troch telies venovali svoje sily najlepší matematici 18. a 19. storočia, medzi nimi Leonard Euler, Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace a William Rowan Hamilton, nepodarilo sa ho vyriešiť. Samozrejme, pre týchto matematikov riešiť príslušný problém znamenalo riešiť ho analyticky, teda hľadať explicitné formuly, ktoré by udávali polohu každého z troch telies v ľubovoľnom okamihu. Avšak podobne ako s rovnicami piateho stupňa v algebre, ani s úlohou troch telies v mechanike sa nedarilo pohnúť. Dnes vieme, že táto úloha je neriešiteľná. Avšak neriešiteľnosť úlohy troch telies nespočíva v chudobnosti jazyka, ako tomu bolo v algebre, kde svet algebraických vzorcov sa ukázal byť príliš chudobným na vyjadrenie riešenia rovníc piateho stupňa (podrobnosti môže čitateľ nájsť v kapitole 2.1.B tejto knihy). Neriešiteľnosť problému troch telies má úplne inú príčinu – je ňou ***deterministický chaos***. Objav chaosu bol asi jedným z najvýznamnejších objavov matematiky 19. storočia. Uskutočnil ho Henri Poincaré v novembri 1889, keď našiel chybu vo svojej práci *Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique* (O probléme troch telies a rovniciach dynamiky, Poincaré 1890) za ktorú v januári 1889 obdržal prestížnu cenu švédskeho kráľa Oskara II. Okolnosti objavu, ktoré si vynútili stiahnutie celého nákladu príslušného čísla časopisu *Acta Mathematica*, v ktorom bola vytlačená pôvodná verzia Poincarého práce a vytlačenie celého čísla s jej opravenou verziou na Poincarého náklady sú vyložené v (Diacu a Holmes 1996 a Barrow-Green 1997).

Z nášho hľadiska je dôležité si uvedomiť, že objav tzv. *homoklinickej trajektórie*, ktorá má za následok existenciu chaotického správania sa systému troch telies, bol umožnený vďaka jazyku iteratívnej geometrie. Poincaré napred zaviedol špeciálne zobrazenie, ktorého postupné ***iterácie*** opisujú dynamiku príslušného systému. Chaotický režim systému troch telies potom objavil vďaka jemnej analýzy týchto iterácií. Ďalšou oblasťou, v ktorej bolo objavené chaotické správanie, sa stala meteorológia. Roku 1961 odhalil Edward Lorenz chaotické správanie systéme, pomocou ktorého modeloval vývoj počasia. Keď matematici chaotické správanie tohto modelu podrobili analýze, objavili pozoruhodný objekt, ktorý sa dnes nazýva *Lorenzov atraktor*. Lorenzov objav nasledovali ďalšie, a tak sa postupne ukázalo, že veľa dynamických systémov má chaotické správanie. Od počasia a turbulentného prúdenia tekutín až po sietnicu ľudského oka. Pri výskume chaotických systémov sa ako matematický aparát používa iteratívna geometria. Preto možno povedať, že porozumenie chaotickým javom je ilustráciou explanatorickej sily jazyka iteratívnej geometrie. Podrobnosti z teórie chaosu, ktorých výklad presahuje rámec našej knihy, možno nájsť v Peitgen, Jürgens a Saupe 1992.

d) integratívna sila jazyka – opis prírodných tvarov

Fraktály sa zrodili ako protipríklady k niektorým tvrdeniam matematickej analýzy. Preto ich úloha bola skôr deštruktívna ako zjednocujúca. Ešte aj na začiatku 20. storočia, keď sa ich nahromadilo dostatočné množstvo, aby bolo možné objaviť ich spoločné vlastnosti ako je neceločíselná Hausdorffova dimenzia, boli fraktály skôr ilustráciou fantázie a imaginatívnej sily matematikov, než niečim užitočným. Až keď roku 1967 vyšiel v časopise *Science* článok B. Mandelbrota *How long is the coast of Britain*?, ukázalo sa, že fraktály nie sú iba výtvorom matematickej imaginácie, ale je možné použiť ich na opis prírodných javov. O desať rokov neskôr v knihe *Fraktálna geometria prírody* (Mandelbrot 1977) Mandelbrot upozornil na skutočnosť, že aj mnohé ďalšie prírodné útvary ako oblak či koruna stromu sa podobajú fraktálom. Rad javov, ktoré veda dovtedy ignorovala ako amorfné, sa stávajú predmetom matematického opisu:

> „*Prečo je geometria často označovaná ako „chladná“ a „suchá“? Nuž jeden z dôvodov spočíva v jej neschopnosti opísať také tvary, ako sú tvar oblaku, hory, línie pobrežia alebo stromu. Oblaky nie sú gule, hory nie sú kužele, pobrežie nie je tvorené oblúkmi kružníc. Kôra stromu nie je hladká a ani blesk si nerazí svoju cestu priamo... Existencia takýchto tvarov nás vyzýva, aby sme študovali to, čo Euklides ponechal stranou ako „beztvaré“, vedie nás k morfológii „amorfného“. Doposiaľ sa matematici tejto výzve vyhýbali.*“ (Mandelbrot 1977, s. 13)

A skutočne, keď sa pozrieme na techniky generovania tvaru, ktoré ponúka iteratívna geometria, zistíme, že dokážu vygenerovať útvary, ktoré sú na nerozoznanie od tvaru koruny stromu, listu paprade, morského brehu či reliéfu pohoria. Prostriedkami iteratívnej geometrie možno verne opísať skutočné prírodné tvary. Nie je ťažké nahliadnuť, že pomocou aparátu analytickej geometrie nie je možné vytvoriť takéto útvary. Pritom vzťah iteratívnej geometrie a prírodných útvarov je pomerne prirodzený, keď si uvedomíme, že každý mnohobunkový organizmus je výsledkom iteratívneho procesu delenia buniek. Preto je prirodzené, že geometrický jazyk, ktorý svoje objekty generuje pomocou iterovania určitej operácie, sa hodí na opis geometrie živého. Nájdenie jednoty v tvaroch ako pľúcne laloky, cievne systémy, koruny stromov či listy paprade ilustruje integratívnu silu jazyka iteratívnej geometrie. Tam, kde predošlé jazyky videli iba nijako nesúvisiace, náhodné amorfné tvary iteratívna geometria predkladá poriadok a jednotu.

e) logické medze jazyka − otázka konvergencie Fourierových radov

Teória Fourierových radov zohrala dôležitú úlohu pri vzniku iteratívnej geometrie, keď poskytla dostatočne bohatý súbor funkcií, ktoré vznikali ako limita procesu postupných iterácií. V teórii Fourierových radov sa zrodil rad pojmov a metód iteratívnej geometrie. Je však zaujímavé, že zodpovedanie otázky konvergencie Fourierových radov si vynútilo vznik nového jazyka, lebo jazyku iteratívnej geometrie sa táto otázka vymyká. Naše doterajšie skúsenosti s vývinom jazyka matematiky umožňujú tejto okolnosti porozumieť, a vidieť v nej skôr pravidlo než výnimku. S podobnou situáciou sme sa stretli v súvislosti s *analytickou geometriou*. Tá sa síce zrodila vďaka Descartovej vizualizácii polynómov, ale nakoniec sa ukázalo, že jazyk polynómov je príliš úzky a neumožňuje adekvátne opísať fenomény, s ktorým sa stretávame v analytickej geometrii. Preto vznikol diferenciálny a integrálny počet, ktorý je vhodnejší na charakterizáciu rôznych vlastností kriviek. Podobne možno vziať príklad *diferenciálneho a integrálneho počtu*. Ten sa síce zrodil na riešenie problémov súvisiacich s analytickou geometriou, ale nakoniec sa ukázalo, že keď chceme získať jasno v otázke základných pojmov diferenciálneho a integrálneho počtu, ukazuje sa rozumnejšie našu intuíciu kotviť nie v analytickej, ale v iteratívnej geometrii. Zdá sa teda, že fragment, pomocou ktorého sme vnikli do univerza určitej novej re-prezentácie (v prípade *iteratívnej geometrie* to bezpochyby boli Fourierove rady) spravidla nie je vhodný na definitívne zodpovedanie otázok, ktoré nastolil. Dĺžky mnohých kriviek, zadaných pomocou jednoduchých polynómov, možno vyjadriť iba pomocou transcendentných funkcií. Podobne otázku, či určitá diferenciálna rovnica má jednoznačné riešenie sa dá najrozumnejšie zodpovedať štúdiom iterácií určitého aproximatívneho procesu.

Nesmie nás teda prekvapiť, že otázku konvergencie Fourierových radov je možné zodpovedať až pomocou aparátu teórie množín. Potrebujeme predovšetkým pojem Lebesgueovho integrálu, na ktorom je založená celá moderná teória Fourierových radov, a tento pojem predpokladá teóriu miery. Preto možno povedať, že otázka konvergencie Fourierových radov prekračuje logické medze jazyka iteratívnej geometrie. Logická sila tohto jazyka nie je postačujúca na zodpovedanie danej otázky. Medzi teóriou množín a teóriou Fourierových radov existuje aj zaujímavá historická súvislosť. Bolo to práve skúmanie konvergencie Fourierových radov, ktoré priviedlo Georga Cantora k objavu teórie množín. Ako poznamenal Ernst Zermelo, editor Cantorových zobraných spisov, v komentári k práci *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Cantor 1872): „*v teórii trigonometrických radov vidíme miesto zrodu cantorovskej teórie množín*".

f) expresívne medze jazyka – nemerateľné množiny

Aj keď pohľad na bohatstvo fraktálov môže zvádzať k dojmu, že jazyk iteratívnej geometrie umožňuje definovať na reálnej osi ľubovoľnú množinu, predsa len existujú množiny, ktoré sa nedajú v rámci tohto jazyka definovať. Sú to tzv. *nemerateľné množiny*, ktorých existencia je zabezpečená axiómou výberu. Práve nekonštruktívny charakter axiómy výberu je príčinou, prečo množiny, ktoré je možné pomocou tejto axiómy definovať, sa nedajú vytvoriť pomocou iteratívneho procesu. Takto existencia nemerateľných množín poukazuje na expresívne medze jazyka iteratívnej geometrie.

1. 1. 7 Predikátový počet

Dejiny logiky ako samostatnej disciplíny, začínajú v staroveku. V antickom Grécku, kde logika tvorila súčasť filozofie, sa zrodili dve samostatné logické tradície. Jedna z nich siaha svojimi koreňmi k Platónovej akadémii a kodifikoval ju Aristoteles v diele *Organon*. Z moderného hľadiska možno aristotelovskú teóriu charakterizovať ako *teóriu inklúzie tried* (zahŕňajúcu aj elementy teórie kvantifikácie). Vďaka Aristotelovmu vplyvu v stredoveku táto tradícia predstavovala dominantný prúd a mala rozhodujúci vplyv na rozvoj logiky v novovekej Európe. Druhá antická tradícia je spojená so stoickou školou a z moderného hľadiska ju možno charakterizovať ako *základy výrokového počtu* (predovšetkým teórie logických spojok). Aj keď v antike v dôsledku antagonizmu medzi členmi peripatetickej a stoickej školy, sa tieto dve teórie považovali za nezlučiteľné, bližšie k pravde je, že sa doplĺňali a spoločne pokrývali veľkú časť elementárnej logiky. Po intenzívnom rozvoji logiky v antike nastáva v tejto oblasti po dobu stredoveku a raného novoveku určitý útlm. Nemožno ho považovať za stagnáciu, lebo napríklad v oblasti modálnej logiky boli v stredoveku dosiahnuté pozoruhodné výkony (pozri Kneale a Kneale 1962). Väčšina výdobytkov stredovekej logiky však bola v novoveku, v dôsledku odmietania scholastického štýlu uvažovania, takmer úplne zabudnutá. Aristotelova autorita pritom spôsobila, že ešte aj George Boole považoval teóriu sylogizmov za definitívne slovo v logike, a svoj prínos videli iba v prepise aristotelovskej logiky do algebraickej symboliky.

Aj keď Boole nespochybňoval aristotelovskú logiku, význam jeho *The Mathematical Analysis of Logic* z roku 1847 bol v tom, že priniesol do vzájomného kontaktu logiku so symbolickým jazykom algebry. Pokusov v tomto smere bolo už niekoľko (Leibniz, Euler), avšak tie sa nedostali za hranice všeobecných téz a niekoľkých elementárnych príkladov. Naproti tomu Booleovi sa podarilo vytvoriť fungujúci kalkul, ktorý dodnes používame pod názvom *Booleova algebra*. Navyše z Booleových myšlienok vyrástla celá tradícia, nazývaná *algebra logiky*, reprezentovaná významnými menami ako Augustus de Morgan, John Venn, William Stanley Jevons a Friedrich Schröder. Takto sa logika, ktorá bola dovtedy považovaná za filozofickú disciplínu, dostáva do užšieho kontaktu s matematikou. Tento kontakt sa ukázal veľmi plodný, a to nielen pre filozofiu, ale aj pre matematiku. Došlo k nemu totiž v priaznivej dobe, v období, ktoré sa zvykne označovať ako kríza základov matematickej analýzy. Objav patologických funkcií, ktoré otriasli intuitívne predstavy, ktoré matematici dovtedy spájali s pojmami ako funkcia, krivka alebo derivácia, viedol k presvedčeniu, že zo základov matematickej analýzy je potrebné odstrániť intuitívnu argumentáciu. Ako náhrada za kalkulatívne intuície a geometrický názor, na ktorých boli postavené základy matematickej analýzy, sa stále viac do popredia dostávala práve logika. Aby logika mohla prevziať úlohu, ktorá sa pre ňu v matematike črtala, bolo nevyhnutné zmeniť vzťah matematiky a logiky.

Logici ako Boole a Schröder považovali aristotelovskú logiku v zásade za správnu artikuláciu logických princípov. Išlo im len o to tradičnú logiku zapísať pomocou algebraickej symboliky a tým ju sprístupniť matematickému skúmaniu. Chceli teda ***použiť jazyk matematiky na upresnenie princípov logiky***. Zásadne iný pohľad na logiku je spojený s Bernardom Bolzanom, Gottlobom

Fregem, Richardom Dedekindom a Giuseppe Peanom. Títo matematici prinášajú obrátenie vyššie uvedeného vzťahu keď chcú ***použiť logiku ako nástroj na upresnenie základov matematiky***. Táto zmena prístupu viedla k prekvapujúcemu odhaleniu. Prostriedky aristotelovskej logiky nielen že nepostačujú na vybudovanie základov matematickej analýzy (to neprekvapovalo, veď boli vytvorené dávno pred vznikom tejto disciplíny), ale nepostačujú dokonca ani na analýzu jednoduchých tvrdení elementárnej aritmetiky, ako je napríklad tvrdenie

$$2 + 3 = 5.$$

Podľa Aristotela má každý súd subjekt-predikátovú stavbu. Ukazuje sa však, že uvedené tvrdenie nemožno jednoznačne rozložiť na subjekt a predikát. Existuje aspoň 6 možností, ako to urobiť:

1. subjektom je číslo 2 a tvrdíme o ňom, že pripočítaním 3 z neho vznikne 5.
2. subjektom je číslo 3 a tvrdíme o ňom, že jeho pripočítaním k 2 vznikne 5.
3. subjektom je číslo 5 a tvrdíme o ňom, že je súčtom 2 a 3.
4. subjektom je súčet 2 + 3 a tvrdíme o ňom, že je rovný 5
5. subjektom je operácia + a tvrdíme o nej, že aplikovaná na 2 a 3 dáva 5.
6. subjektom je vzťah = a tvrdíme o ňom, že platí medzi číslami 2 + 3 a 5.

Táto nejednoznačnosť znamená, že rozklad súdu na subjekt a predikát nie je záležitosťou logiky, ale rétorického dôrazu. Každý z uvedených rozkladov súdu na subjekt a predikát zvýrazňuje iný aspekt súdu, aj keď z logického hľadiska na obsahu súdu nič nemenia. So subjekt-predikátovou stavbou súdu je úzko spojená aj Aristotelova teória kvantifikácie. Podľa Aristotela kvantifikácia určuje rozsah, v akom o subjekte tvrdíme predikát. Aristoteles delí súdy na všeobecné, partikulárne a jedinečné podľa toho, či predikát tvrdíme o všetkých, o niektorých alebo o jedinom subjekte. Takto je v každom tvrdení možné kvantifikovať iba jedinú „premennú", a to tú, ktorá je v úlohe subjektu. Samozrejme, niečo takého potrebám matematickej analýzy ani zďaleka nepostačuje.

Roku 1879 vydáva Frege prácu *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* obsahujúcu nový symbolický jazyk, ktorý dnes nazývame predikátovým počtom. Kým aritmetika manipuluje s číslami, algebra s „písmenami" a matematická analýza s nekonečne malými veličinami, Frege vytvára kalkul pre logické operácie s pojmami a súdmi. Asi najdôležitejšou Fregeho inováciou oproti Aristotelovskej logike bolo nahradenie subjekt-predikátovej stavby súdu argument-funkcionálnou stavbou čo mu umožnilo radikálne rozšíriť možnosti teórie kvantifikácie. Kým Aristoteles dokázal kvantifikovať iba jediný argument (subjekt súdu) vo Fregeho pojatí je v jednom súde možné kvantifikovať viaceré argumenty. Pri budovaní predikátového počtu postupoval Frege axiomaticky. Systém axióm ktorý predložil, bol pozoruhodný tým, že ako ukázal Gödel o polstoročie neskôr, bol úplný. Okrem toho až na malý detail, ktorý objavil Lukasiewicz (axiómu 3 možno dokázať pomocou axióm 1 a 2) boli Fregeho axiómy aj nezávislé.

a) logická sila jazyka – dôkaz úplnosti výrokového a predikátového počtu

V klasickej matematike bol matematický dôkaz chápaný intuitívne ako presvedčivý, správny a nevyhnutný argument. Pritom sa však niekedy stávalo, že dôkazy, ktoré sa zdali presvedčivé jednej generácii matematikov, nasledujúca generácia odmietla. Takýto osud postihol napríklad dôkazy založené na manipuláciách s nekonečne malými veličinami. Mnohé Leibnizove či Eulerove dôkazy sa v priebehu dvoch generácií ocitli v nemilosti a matematici ako Cauchy a Weierstrass ich nahradili úplne inými argumentmi. Podobný osud postihol dokonca aj Euklida, ktorý bol po stáročia považovaný za vzor logickej argumentácie. Moritz Pasch si všimol, že keď Euklides konštruuje stred úsečky, ***využíva*** skutočnosť, že kružnice opísané z koncových bodov danej úsečky s polomermi rovnými dĺžke tejto úsečky, sa navzájom pretnú. Ale medzi Euklidovými postulátmi sa nenachádza žiaden postulát, ktorý by zaručoval existenciu priesečníka kružníc.[10] Existenciu priesečníka kružníc je teda skrytý predpoklad, na ktorom, popri postulátoch a axiómach stojí euklidovská geometria. Neskôr sa ukázalo, že to ani zďaleka nie je jediný skrytý predpoklad.

Manipulovanie s objektmi pochybného statusu (ako boli nekonečne malé veličiny) či používanie skrytých predpokladov (ako bol predpoklad o existencii priesečníka kružníc) sú dve krajnosti, medzi ktorými sa nachádza celá škála prechodov. Preto, prísne vzaté, klasická matematika si nikdy nemohla byť úplne istá, či tvrdenia ktoré „dokázala“, sú skutočne dokázané. Vylúčiť podobné pochybnosti bolo Fregeho cieľom pri tvorbe jeho kalkulu. Fregemu sa podarilo exaktne matematicky charakterizovať, čo je to dôkaz. V *Begriffsschrifte* do tej miery sformalizoval jazyk matematiky, že logickú argumentáciu bolo možné premeniť na formálnu manipuláciu so symbolmi. Na rozdiel od svojich predchodcov keď Frege niečo dokázal, mohol si byť istý, že už nik v jeho dôkaze nenájde chybu.[11] Logický dôkaz, ktorý generácie matematikov chápali vo viac alebo menej intuitívnej forme, Frege premenil v exaktný matematický pojem. Preto ako ilustráciu logickej sily predikátového počtu možno vziať ***dôkaz úplnosti výrokového počtu***, ktorý predložil roku 1926 Paul Bernays a ***dôkaz úplnosti predikátového počtu***, predložený roku 1930 Kurtom Gödelom.

b) expresívna sila jazyka – upresnenie základných pojmov klasickej matematiky

Expresívna sila jazyka predikátového počtu spočíva v jeho schopnosti definovať základné pojmy klasickej matematiky. Často si to vyžiadalo robiť jemné rozlíšenia. Napríklad rozdiel medzi bodovou a rovnomernou konvergenciou funkcionálnej postupnosti spočíva v poradí kvantifikátorov. Samozrejme, matematici používali tieto pojmy dávno pred vznikom formálnej logiky. Ale Cauchyho mylný dôkaz tvrdenia, že limita konvergentnej postupnosti spojitých funkcií musí byť spojitá funkcia ukazuje, že ani matematici Cauchyho formátu nedokázali tieto jemné rozdiely vždy jasne udržať (pozri Edwards 1979, s. 312). Viaceré pojmy teórie funkcií reálnej premennej a funkcionálnej analýzy sú bez aspoň čiastočnej formalizácie nezvládnuteľné. Dnes sa zápis definícií základných pojmov matematických teórií prostriedkami formálnej logiky stal do tej miery samozrejmosťou, že si ho ani neuvedomujeme. Ale keď siahneme po dejinách niektorej dostatočne komplikovanej matematickej disciplíny, zistíme, že jej vývin bol často brzdený nejasnosťami v základných pojmoch, ktoré možno vpísať na vrub neformálneho spôsobu práce so základnými pojmami. Nie náhodou dal A. F. Monna knihe o dejinách Dirichletovho princípu podtitul „*matematická komédia omylov*“ (Monna 1975).

c) explanatorická sila jazyka – objasnenie otázok filozofie matematiky

Matematici už dlhšiu dobu narážali pri svojej práci na rôzne otázky filozofického charakteru. Problematika piateho Euklidovho postulátu a objav neeuklidovských geometrií priniesli rad otázok o vzťahu matematického poznania ku skutočnosti, o jeho pravdivosti a jednoznačnosti. V priebehu 19. storočia boli tieto otázky diskutované z rôznych pozícií. (Dobový obraz tejto diskusie možno nájsť v Russell 1897.) Vznik formálnej logiky umožnil uvedené otázky exaktne formulovať ako problém konzistentnosti, nezávislosti a úplnosti súboru axióm. Podobne pri aritmetizácii matematickej analýzy vznikla otázka, či aritmetiku možno ďalej redukovať na logiku, alebo či prirodzené čísla predstavujú samostatný, od logiky nezávislý súbor objektov, ktoré treba charakterizovať mimologickými axiómami, podobne ako základné pojmy geometrie. Vznik matematickej logiky zásadne zmenil situáciu v oblasti filozofie matematiky. Umožnil exaktne sformulovať celý rad filozofických otázok a poskytol silné nástroje na ich skúmanie. Možno preto povedať, že vďaka metódam formálnej logiky sa zásadne prehĺbilo naše porozumenie filozofie matematiky. Pokrok vo filozofii matematiky je tak jednou z ilustrácií explanatorickej sily jazyka predikátového počtu.

d) integratívna sila jazyka – programy základov matematiky

S formalizáciou jazyka matematiky úzko súvisia tri programy základov matematiky. Spočiatku sa zrodili v oblasti aritmetiky, ako tri zásadne odlišné pokusy o odpoveď na otázku, čo sú to čísla. Frege sformuloval v *Základoch aritmetiky* (Frege 1884) ***logicistický program,*** podľa ktorého aritmetika nemá vlastný predmet skúmania, ale je súčasťou logiky. Keď exaktne sformulujeme princípy logiky, bude z nich podľa Fregeho možné odvodiť celú aritmetiku. O niečo neskôr Peano v *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Peano 1889) predložil ***formalistický program,*** podľa ktorého čísla sú samostatné matematické objekty nezávislé od logiky. Na ich presnú charakterizáciu, podobne ako na charakterizáciu základných pojmov geometrie, potrebujeme mimologické axiómy. Tretí program, iniciovaný Dedekindom v práci *Was sind und was sollen die Zahlen*? (Dedekind 1888), možno nazvať ***teoreticko-množinovým programom***. Tvoril strednú pozíciu medzi Fregem a Peanom. Dedekind navrhoval vybudovať aritmetiku na báze teórie množín, pričom čísla považoval za kardinality množín. S Peanom sa zhodoval v tom, že množiny charakterizoval pomocou súboru axióm (z ktorých viaceré používame aj dnes). S Fregem sa zas zhodoval v tom, že čísla nepovažoval za primitívne objekty, ale navrhol ich redukciu na ešte primitívnejší základ, ktorým bola teória množín. Dedekind ju nazýval teória systémov a považoval za súčasť logiky.

Ale nech sa rozhodneme pre ktorýkoľvek z týchto programov, nemožno poprieť, že uvedené programy sú manifestáciou integratívnej sily jazyka predikátového počtu. Bol to rozvoj tohto jazyka, ktorý umožnil Fregemu pomyslieť na redukciu pojmu čísla na logické princípy, podobne Peanovi a Dedekindovi umožnil sformulovať ich axiómy. Pri rozpracovávaní svojich programov Frege, Dedekind aj Peano prispeli k rozvoju matematickej logiky: Frege vytvoril predikátový počet, od Peana pochádza veľká časť súčasnej logickej symboliky a Dedekind vytvoril prvú rekurzívnu definíciu.

Keď sa neskôr ukázalo, že uvedené programy sú v ich pôvodnej podobe neuskutočniteľné kvôli paradoxom objaveným Bertrandom Russellom roku 1902, všetky tri programy základov aritmetiky boli podrobené zásadným revíziám a v tejto revidovanej podobe boli rozšírené na celú matematiku. Whitehead a Russell revidovali logicistický program a rozpracovali ho v *Principia Mathematica*. Peanovho formalistického programu sa ujala Hilbertova škola a predložila variantu Peanových axióm, ktorá nevedie k logickým paradoxom. A Dedekindovu variantu základov aritmetiky zabudoval Zermelo do axiomatickej výstavby teórie množín. Takto sa z troch programov základov aritmetiky zrodili programy pre základy celej matematiky. Ale či už vo svojej pôvodnej podobe alebo v revidovanom tvare možno uvedené programy považovať za vyjadrenie integratívnej sily jazyka predikátového počtu. Jednota, ktorú v matematike nachádzajú, je jednotou logickej metódy, jednotou prameniacou z integratívnej sily jazyka, ktorý vytvoril Frege.

e) logické medze jazyka – logické paradoxy

Princíp do seba zapadajúcich intervalov, na základe ktorého budoval matematickú analýzu Cauchy, je princípom iteratívnej geometrie. Je to princíp, ktorý hovorí, že určitý iteratívny proces má vždy limitu a že touto limitou je jediný bod. Cauchy tak roku 1821 preniesol problém základov diferenciálneho a integrálneho počtu na bedrá iteratívnej geometrie. Postupne, ako sa začali hromadiť rôzne „patologické“ funkcie, matematici si začali uvedomovať bohatstvo, ktoré v sebe iteratívne procesy skrývajú. Preto aj keď nebolo dôvodov spochybňovať platnosť princípu do seba zapadajúcich intervalov, zrodila sa snaha založiť matematickú analýzu na pevnejších základoch než aké poskytuje tento geometrický princíp. Okolo roku 1872 sa Dedekind, Weierstrass a Cantor nezávisle od seba pokúsili vybudovať teóriu reálnych čísel, čím zahájili proces aritmetizácie matematickej analýzy.

Podstatou týchto konštrukcií bolo explicitne vybudovať reálne čísla, a tak vytvoriť základ z ktorého bude možné Cauchyho princíp dokázať. Všetky tri konštrukcie však majú jeden nedostatok. Obsahujú predpoklad existencie určitého aktuálne nekonečného súboru objektov (pri Dedekindovej konštrukcii je to množina racionálnych čísel, u Cantora a Weierstrassa je to množina postupností racionálnych čísel). Aj keď predpoklad existencie množiny racionálnych čísel vyzerá na prvý pohľad neškodne, niektorým matematikom sa zdala otázka uchopenia nekonečného súboru objektov nie dostatočne jasná. Preto Dedekind (1888), Peano (1889) a Frege (1893), opäť nezávisle od seba, predložili tri alternatívne spôsoby vybudovania prirodzených čísel, ako kanonického nekonečného súboru objektov. Zdalo sa, že v tomto okamihu je práca, ktorú začal na začiatku storočia Cauchy, definitívne zavŕšená a matematická analýza stojí konečne na neotrasiteľných základoch. Ale tu sa vynorili paradoxy a celá stavba základov matematickej analýzy sa zrútila.

Prvý paradox objavil roku 1901 Bertrand Russell vo Fregeho systéme (pozri van Heijenoort 1967 s. 124). Frege bol objavením sa paradoxu vo svojej teórii prekvapený a upozornil na skutočnosť, že rovnaký paradox sa vyskytuje aj v Dedekindovom systéme. Toto Fregeho konštatovanie možno doplniť poznámkou, že rovnaký paradox možno odvodiť aj v Peanovom systéme (Gillies 1982, s. 83-93). To ukazuje, že paradoxy nie sú dôsledkom nedôslednosti uvedených autorov. Ich systémy sú totiž konceptuálne natoľko vzdialené, že výskyt rovnakého paradoxu u všetkých svedčí skôr o logických medziach jazyka, ako o nedôslednosti jeho užívateľov. Problém bol v tom, že všetci traja používali logiku druhého rádu, a paradoxy vyvierajú z príliš voľného používania funkcií a predikátov druhého rádu. Logické paradoxy sú tak do istej miery analogické s paradoxmi v algebre (*casus irreducibilis*). V algebre spočívala základná inovácia v zavedení implicitných funkcií prvého rádu (ako napríklad odmocniny) a algebraické paradoxy pramenili s príliš voľného používania týchto funkcií. Preto krízu základov, ktorá nastala, možno považovať za prejav logických medzí jazyka predikátového počtu.

Všetky tri prúdy základov matematiky sa z krízy základov vymanili. Toto vymanenie však bolo dosiahnuté s pomocou výrazových prostriedkov silnejšieho jazyka. To pripomína algebru, ktorej pomohol vybŕdnuť z paradoxov spojených s *casus irreducibilis* až nový jazyk analytickej geometrie, ktorý poskytol v podobe komplexnej roviny model pre systém komplexných čísel. Na tomto modeli matematici mohli vybudovať sémantiku pre paradoxné výrazy a naučiť sa s nimi bezpečne narábať. V prípade logických paradoxov bola situácia podobná. Opäť bol vytvorený silnejší jazyk, jazyk teórie množín (alebo teórie typov či ľubovoľný s nimi ekvivalentný extenzionálny jazyk), ktorý umožnil odlíšiť paradoxné výrazy od výrazov normálnych.

f) expresívne medze jazyka – neúplnosť aritmetiky

Napriek tomu, že pomerne veľkú časť matematiky je možné formalizovať pomocou logických kalkulov, ukazuje sa, že takáto formalizácia má svoje medze. Na tieto medze narazil Kurt Gödel roku 1931, keď sa po úspešnom dôkaze úplnosti predikátového počtu usiloval dokázať úplnosť aritmetiky. Jeho pokusy vyústili nakoniec do jedného z najprekvapujúcejších výsledkov matematiky 20-teho storočia, do objavu neúplnosti aritmetiky a s tým súvisiaceho objavu nedokázateľnosti konzistentnosti aritmetiky. Prostriedky, pomocou ktorých Gödel svoje výsledky dosiahol prekračujú medze jazyka predikátového počtu. Gödel využíva nový typ symbolického jazyka, jazyk teórie vypočítateľnosti (resp. teórie rekurzie). Preto dôkazy neúplnosti a nedokázateľnosti konzistentnosti už nespadajú do oblasti predikátového počtu. Avšak samotné tieto výsledky možno považovať za vykreslenie logických medzí jazyka predikátového počtu. Situácia je tu teda podobná, ako v mnohých predošlých prípadoch. Jazyk nasledujúceho štádia umožňuje vytvoriť jasnejšiu predstavu o hraniciach daného jazyka. Podobne aj jazyk algebry ukázal neriešiteľnosť trisekcie uhla, a tým vytýčil expresívne medze jazyka syntetickej geometrie, či jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu umožnil dokázať transcendentnosť čísel ako π, čím vytýčil expresívne medze jazyka algebry. Z hľadiska samotného jazyka, ktorého medze sa vytyčujú, sú tieto medze neuchopiteľné. Prejavujú sa iba v tom, že všetky pokusy o dôkaz úplnosti aritmetiky, z neznámych príčin krachujú. Samotný jazyk predikátového počtu, v ktorom sa o tieto dôkazy matematici pokúšali, však neumožňuje pochopiť, prečo. Až Gödel, tým, že vypracoval pozoruhodnú metódu kódovania, a vybudoval základy teórie rekurzívnych funkcií, vytvoril jazykové prostriedky, ktoré umožnili túto hranicu presne vymedziť.

1. 1. 8 Teória množín

Nekonečno fascinuje človeka od nepamäti. Predstava nekonečnej diaľky obzoru či nekonečnej hĺbky oceánu napĺňa ľudí pocitom bázne. Keď sa zrodila matematika ako presné, ostro vymedzené a jednoznačné poznanie, nekonečno s jeho neuchopiteľnosťou a nejednoznačnosťou sa ocitlo za hranicami matematiky. Grékov ani nenapadlo, že by bolo možné nekonečno (nazývané απειρον) spraviť predmetom matematického skúmania. Pytagorejci, Platón aj Aristoteles popierali možnosť matematicky opísať απειρον. Situácia sa začala meniť v stredoveku, keď bol atribút nekonečna pripísaný Bohu, čím sa oslabila nejasnosť, nejednoznačnosť a neuchopiteľnosť, tradične spájaná s nekonečnom (pozri Kvasz 2004). Boh je dokonalý, a preto musia byť dokonalé aj jeho atribúty, medzi nimi aj nekonečno. Nekonečno bolo zbavené negativity, ktorú mu pripisovala antika. *„Štúdium nekonečna tak dostalo vznešený zmysel; stalo sa súčasťou teológie a nie prírodovedy*.“ (Vopěnka 2000, s. 328). S nástupom renesancie si toto očistené a presvetlené nekonečno začalo kliesniť cestu z teológie do matematiky. Ako ilustráciu tohto procesu možno uviesť knihu *O učenej nevedomosti* od Mikuláša Kuzánskeho, ktorý sa úvahami o nekonečnom trojuholníku pokúša o matematické objasnenie toho, ako niečo môže byť súčasne tri aj jedno, a teda o pochopenie trojjedinosti Boha:

> *„Už je totiž známe, že najväčšie a nekonečné môže byť len jedno. Ďalej je známe – keďže súčet dvoch strán akéhokoľvek trojuholníka nemôže byť menší ako tretia strana – že keď ide o trojuholník, ktorého jedna strana je nekonečná, druhé dve spolu nie sú menšie. A pretože akákoľvek časť nekonečna je nekonečná v prípade, keď je jedna strana trojuholníka nekonečná, nevyhnutne musia byť aj ostatné strany trojuholníka nekonečné. A pretože viac nekonečných nemôže byť, nadpochopiteľne chápeš, že nekonečný trojuholník nemôže pozostávať z viacero čiar, hoci je to najväčší a najskutočnejší trojuholník, je nezložený a úplne jednoduchý.“ (Kuzánsky 1440, s. 54).*

Tento citát uvádzame nie kvôli tomu, aby sme analyzovali korektnosť a presvedčivosť argumentácie. Chceme ním skôr ilustrovať obrovskú cestu, ktorú prešlo európeske myslenie od čias antiky. Sloboda, s akou Kuzánsky narába s pojmom nekonečna je pozoruhodná. Po tom, ako sa vďaka teológii prelomila bariéra, ktorá oddeľovala matematiku a nekonečno, začína sa postupná premena celej matematiky. Euklidova ευθεια (rovná čiara) začína byť vnímaná ako *úsečka*, teda ako niečo useknuté z väčšieho celku. Tým väčším celkom je samozrejme *priamka*, ktorá je chápaná ako nekonečná. Kým podľa druhého postulátu bolo v antickej matematike nutné rovnú čiaru neustále predlžovať, v renesancii, slovami Petra Vopěnku, priamka do nekonečna dobehla. Podobne Demokritove atómy, ktoré ožívajú u Keplera a Cavalieriho v podobe nedeliteľných, boli potom v 17. storočí nahradené nekonečne malými veličinami.

Vpád nekonečna do matematiky, umožnený zmenou postoja voči nekonečnu, bol neustále sprevádzaná kritikou. Mnohým učencom v 17. a 18. storočí pripadali manipulácie s nekonečne malými veličinami podozrivé a často chybné. Preto sa pomerne skoro začal protipohyb, zameraný na elimináciu nekonečne malých veličín z matematiky. Po pokusoch z konca 18. storočia (Carnot 1797, Lagrange 1797) sa úspešnou ukázala cesta eliminácie nekonečne malých, naznačená Bolzanom v práci *Rein analytischer Beweis...* (Bolzano 1817) a rozpracovaná Cauchym v jeho *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (Cauchy 1821). Cauchymu sa podarilo eliminovať nekonečne malé veličiny z matematickej analýzy.[12] Svoje úvahy však, podobne ako Bolzano, založil na intuitívnom pojme kontinua. Polstoročie po Cauchym Dedekind, Cantor a Weierstrass, predložili konštrukcie reálnych čísel, čím chceli zavŕšiť cestu započatú Cauchym. Tieto konštrukcie, napriek tomu, že boli vytvorené nezávisle od seba, mali čosi spoločné. Všetci traja postulovali existenciu určitého nekonečného súboru objektov. To naznačovalo, že pojem nekonečna nebude možné zo základov matematiky tak jednoducho vylúčiť. Aj keď z matematiky vylúčili nekonečne malé a nekonečne veľké čísla, podarilo sa to len za cenu, že do nej zaviedli aktuálne nekonečné súbory.

Dedekind sa vyrovnáva s problémom nekonečných súborov v knihe *Was sind und was sollen die Zahlen* (Dedekind 1888), v ktorej podal definíciu nekonečnej množiny, ktorú používame dodnes (množina je nekonečná ak ju možno jedno-jednoznačne zobraziť na jej časť). Cantor dospel k teórii množín prácou na základoch teórie Fourierových radov. Jeho hlavné dielo vychádza roku 1883 pod názvom *Grundlagen einer allgemeiner Mannigfaltigkeitslehre – Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen* (Cantor 1883). V tomto diele podáva definíciu pojmu množina:

> *Varietou alebo množinou (Mannigfaltigkeit oder Menge) rozumiem vo všeobecnosti každé mnohé, ktoré možno myslieť ako jedno, to jest každý súbor určitých prvkov, ktorý možno spojiť do jedného celku pomocou zákona, a verím, že tým definujem čosi príbuzné Platónovmu* $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ alebo $\iota\delta\varepsilon\alpha$*".*

Cantorove práce z teórie nekonečných množín našli spočiatku iba minimálnu podporu a viacerí vplyvní matematici, ako Ernst Kummer či Leopold Kroncker, sa stavali proti nej (pozri Dauben 1979, s. 133-140). Cantorove názory išli proti celkovému trendu matematiky tých čias, ktorým bola snaha o elimináciu nekonečna zo základov matematiky. Tento trend bol ešte významne posilnený objavom Russellovho paradoxu z roku 1902. Mnohí matematici si mysleli, že pojem aktuálneho nekonečna, ktorý sa do matematike vkradol v období renesancie z teológie, je cudzí duchu matematiky a preto ho treba z matematiky vylúčiť. Ako príklad možno uviesť názor Henri Poincarého: „*Aktuálne nekonečno neexistuje; Cantorovci to zabudli a preto sa dostali do kontradikcií*" (Poincaré 1908, s. 179).

Russellov paradox sa zvykne často formulovať ako paradox množiny všetkých množín. Preto by mohol vzniknúť mylný dojem, že ide o paradox Cantorovej teórie množín. Cantor si však bol plne vedomý problematickosti súboru všetkých množín, ktorý označoval termínom Absolútno. V dôsledku teologickej interpretácie Absolútna, ktoré stotožnil s Bohom (pozri Dauben 1979, s. 120-148), sa Cantor vzdal formulovania matematických tvrdení o Absolútne. Teologická interpretácia tak ochránila Cantora od protirečení. Teória množín sa vyznačovala tým, že nekonečno tematizovala, ale rovnaké paradoxy sa ukázali aj v Peanovom formalistickom či Fregeho logicistickom prístupe k základom matematiky (pozri Gillies 1982). Preto Poincarého útok na „Cantorovcov" bol neoprávnený; teória množín nebola na tom o nič horšie ako ostatné prístupy k základom matematiky.

Teória množín si postupne získala popularitu medzi matematikmi, pracujúcimi v oblasti teórie funkcií reálnej premennej, teórie miery a všeobecnej topológie. Tieto disciplíny zaznamenali koncom 19. a začiatkom 20. storočia búrlivý rozmach, a tak stále viac matematikov začalo používať pojmy a metódy teórie množín. Roku 1908 Ernst Zermelo v práci *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* našiel spôsob, ako sa možno vyhnúť paradoxom. Analýzou prác Dedekinda a Cantora Zermelo explicitne sformuloval princípy, ktoré sú potrebné pre tvorbu množín. Sformuloval ich však spôsobom, ktorý nepripúšťal vytvorenie paradoxných objektov, analogických k systému všetkých množín. (Rozbor jednotlivých axióm možno nájsť v Fraenkel a Bar-Hillel 1958). Vďaka Zermelovi sa teória množín skonsolidovala v krátkom čase šiestich rokov po objave paradoxov[13] a vydobyla si postavenie významnej matematickej disciplíny s pozoruhodnými výsledkami a metódami.

Ďalší zásadný posun v teórii množín nastal roku 1914, keď vyšla kniha *Grundzüge der Mengenlehre* Felixa Hausdorffa. Táto kniha zhŕňa a rozvíja výsledky, ktoré boli dosiahnuté v teórie množín. Hausdorff v nej po prvýkrát definuje funkciu ako *množinu* usporiadaných dvojíc. Dedekind, Cantor i Zermelo považovali množiny a funkcie za zásadne odlišné objekty. Hausdorffova definícia usporiadanej dvojice je trocha ťažkopádna a zakladá sa na predpoklade existencie dvoch špeciálnych objektov, ktoré Hausdorff označuje symbolmi 1 a 2. Pomocou nich definuje usporiadanú dvojicu ako $\{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$. Definícia usporiadanej dvojice v tvare $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, ktorá nepoužíva žiadne špeciálne objekty, pochádza od Kazimierza Kuratovského z roku 1921. Idea vyložiť funkcie ako množiny predstavovala zásadný prelom smerom k zjednoteniu matematiky na množinových základoch. Teória množín sa stala jazykom v ktorom je vybudovaná takmer celá moderná matematika.

a) logická sila jazyka − schopnosť dokázať konzistentnosť infinitezimálneho počtu

Aj keď teória množín má svoje korene v programe aritmetizácie matematickej analýzy, ktorý bol motivovaný snahou odstrániť z matematickej analýzy nekonečne malé veličiny, je zaujímavé, že jazyk teórie množín viedol nakoniec k objavu, ktorý umožnil postaviť nekonečne malé veličiny na pevné logické základy a tým ich rehabilitovať. Prvú konštrukciu oboru neštandardných reálnych čísel podal roku 1961 Abraham Robinson v článku *Non-standard analysis* (Robinson 1961). Robinsonov model sa opiera o pojem ultrafiltra, ktorého existencia vyplýva z axiómy výberu. Preto konštrukciu hyperreálnych čísel, a na nej založený dôkaz bezospornosti teórie nekonečne malých veličín, možno považovať za ilustráciu logickej sily jazyka teórie množín. Takto prostriedkami jazyka teórie množín (a na tomto jazyku založenej teórie modelov) sa podarilo vytvoriť logické základy pre mnohé Leibnizove a Eulerove „dôkazy“. Tieto dôkazy boli matematikmi po dobu viac než jedného storočia považované za chybné, až kým Robinson ukázal, že sú v poriadku, a úvodzovky si môžeme odpustiť. Neštandardná analýza, ktorá sa zrodila z Robinsonovej konštrukcie, medzičasom priniesla rad pozoruhodných výsledkov a aplikácií (pozri Davis 1977, Albeverio 1986, a Arkeryd 1997).

b) expresívna sila jazyka − transfinitná aritmetika

Jedným z prekvapujúcich Cantorových objavov na ceste k teórii množín bolo zistenie, že v postupnom vytváraní tzv. *derivovaných množín* danej množiny *P* reálnych čísel možno pokračovať aj po tom, ako sme uskutočnili túto operáciu nekonečný počet krát. Teraz nie je dôležité, čo táto operácia presne znamená (jej výklad možno nájsť v Dauben 1979, s. 41). Podstatné je, že po tom, ako Cantor vytvoril *prvú derivovanú množinu P’* a pomocou rovnakej operácie z tejto množiny vytvoril *druhú derivovanú množinu P’’* a *tretiu derivovanú množinu P’’’*, napadlo ho predĺžiť proces postupnej tvorby derivovanej množiny aj za hranice počtu derivácií, ktorý môžeme spočítať pomocou prirodzených čísel. Po technickej stránke to nie je až tak zložité, pretože medzi množinami *P’*, *P’’*, *P’’’*, ... platí zaujímavý vzťah. Každá množina $P^{(n)}$ je podmnožinou predošlej. Preto keď máme *konečnú* postupnosť derivovaných množín P', P'', ... , $P^{(n)}$ tak posledný člen tejto postupnosti $P^{(n)}$ môžeme vyjadriť ako ich prienik:

$$P^{(n)} = \bigcap_{k=1}^{n} P^{(k)} \tag{6}$$

Keď namiesto konečnej postupnosti derivovaných množín P', P'', ... , $P^{(n)}$ máme *nekonečnú* postupnosť P', P'', P''', ... , $P^{(n)}$, ... Cantorovou ideou bolo vytvoriť analogicky prienik všetkých členov tejto postupnosti. Nekonečná postupnosť už nemá posledný člen, preto prienik všetkých členov vo všeobecnosti nebude rovný niektorej množine $P^{(n)}$. Ale napriek tomu, že vopred nevieme čo dostaneme (na rozdiel od konečného prípadu, kedy sa stačilo pozrieť na posledný člen postupnosti), je prienik dobre definovaný aj v nekonečnom prípade. Nejaký bod x padne do prieniku vtedy a len vtedy, keď patrí do každej z množín $P^{(k)}$. Prienik nekonečnej postupnosti derivovaných množín označil Cantor symbolom $P^{(\infty)}$, teda

$$P^{(\infty)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} P^{(k)} .$$

(7)

Keď takto zaviedol *derivovanú množinu nekonečného rádu*, mohol na túto množinu opäť aplikovať operáciu tvorby derivovanej množiny, a tak vytvoriť množiny $P^{(\infty+1)}$, $P^{(\infty+2)}$, $P^{(\infty+3)}$, ..., až kým opäť dostal nekonečnú postupnosť. Potom, pomocou operácie analogickej s operáciou (7) vytvoril $P^{(2\infty)}$. Takto práca *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten 2* (Cantor 1880) prináša zásadný posun v dejinách matematiky. Cantor v nej spravil prvý krok smerom k transfinitnej aritmetike. V tejto práci používal symboly ∞, $\infty+1$ či 2∞ na označenie krokov pri tvorbe derivovaných množín; sú to teda *indexy*. Jeho pozornosť sa sústreďovala na množinu P a na to, čo sa s ňou deje.[14] V neskorších prácach Cantor namiesto symbolu ∞ prešiel k poslednému písmenu gréckej abecedy ω a symboly už nechápal ako indexy, ale ako *transfinitné čísla*. Zaviedol odlíšenie ordinálnych a kardinálnych čísel, definoval pre ne operácie sčítania a násobenia a vytvoril transfinitnú aritmetiku.

Transfinitná aritmetika tvorí bezpochyby jeden z najpozoruhodnejších výdobytkov teórie množín. Matematici si pred Cantorom neuvedomovali, že je možné rozlíšiť rôzne stupne nekonečna, a ani sa im nesnívalo, že im je možné priradiť (kardinálne a ordinálne) čísla a pre tieto čísla definovať aritmetické operácie sčítania, násobenia a umocňovania. Preto transfinitná aritmetika je vhodnou ilustráciou expresívnej sily jazyka teórie množín.

c) explanatorická sila jazyka − ukázanie typickosti transcendentných čísel

Prvé transcendentné číslo objavil roku 1851 Joseph Liouville. Roku 1873 Charles Hermite dokázal, že aj číslo e je transcendentné a roku 1882 Ferdinand Lindeman dokázal transcendentnosť čísla π. Transcendentných čísel tak pomaly pribúdalo. Spočiatku však mohol vzniknúť dojem, že transcendentné čísla tvoria výnimky, a drvivá väčšina reálnych čísel sú čísla algebraické. Lindemann síce dokázal všeobecnejší výsledok, podľa ktorého bolo možné vytvoriť nekonečnú množinu transcendentných čísel (pozri Dörrie 1958, alebo Geľfond 1952), avšak v Lindemannovej vete sa transcendentné čísla vytvárali pomocou algebraických. Ani tento výsledok preto ešte nenaznačoval, že transcendentných čísel je v skutočnosti zásadne viac ako algebraických.

Preto keď Cantor roku 1873 dokázal, že transcendentných čísel je nespočítateľne mnoho, kým algebraických čísel je len spočitateľné mnoho, ukázalo sa, že za výnimočné treba považovať skôr algebraické čísla a typické reálne číslo je transcendentné. Cantorov dôkaz bol síce nekonštruktívny a neumožňoval nájsť žiadne nové transcendentné číslo, bol to predsa len pozoruhodný objav. Postupne ho nasledovala séria podobných výsledkov, ako napríklad, že typická spojitá funkcia reálnej premennej nemá skoro v žiadnom bode deriváciu. Preto aj pohľad na funkcie reálnej premennej sa musel pod vplyvom teórie množín zásadne zmeniť. Objekty, ktoré matematici 19-teho storočia považovali za výnimočné patologické prípady, sa ukázali ako typické, a za výnimočné (aspoň z hľadiska kardinality a miery) je treba skôr považovať objekty klasickej matematiky, ako sú algebraické čísla, diferencovateľné funkcie či rektifikovateľné krivky. Takto teória množín otvára úplne nový pohľad na univerzum klasickej matematiky, zásadne mení porozumenie pre to, čo je v tomto univerze typické a čo je v ňom výnimočné. Toto nové porozumenie môžeme považovať za prejav explanatorickej sily jazyka teórie množín.

d) integratívna sila jazyka − ontologická jednota modernej matematiky

Aj keď prvým programom v oblasti základov matematiky bol Fregeho logicistický program a teória množín sa pôvodne nespájala z tak širokými ambíciami, faktom je, že prevažná väčšina dnešnej matematiky je vybudovaná v rámci teórie množín. Preto kým axiomatická metóda zjednocuje matematiku v rovine metodologickej, teória množín ju zjednocuje v rovine ontologickej. Keď zoberieme nejaký matematický objekt – číslo, priestor, funkciu či grupu – moderná matematika ho skúma pomocou jeho modelu v teórii množín. Prirodzené čísla považuje za kardinality množín, priestor považuje za množinu bodov, funkciu za množinu usporiadaných dvojíc, grupu za množinu s binárnou operáciou. Vďaka tomu získava matematika nevídanú jednotu. Už sme si na ňu zvykli, takže nám pripadá ako samozrejmosť. Pohľad do dejín však ukazuje, že samozrejmosťou rozhodne nie je. Primeranejšie je považovať ju za prejav integratívnej sily jazyka teórie množín.

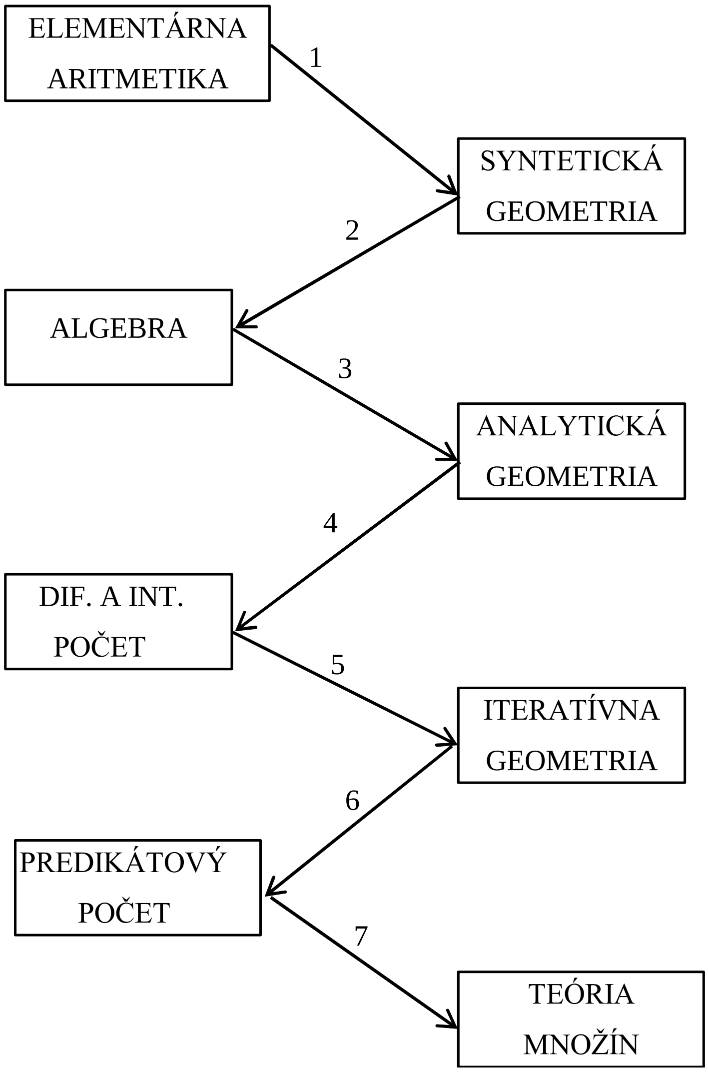
e, f) logické a expresívne medze jazyka

Vzhľadom k tomu, že teória množín je jedným z posledných jazykov, ktoré boli v dejinách matematiky vytvorené a dnes sa väčšina matematiky uskutočňuje v jej rámci, je ťažké určiť logické a expresívne medze jej jazyka. Logické a expresívne medze určitého jazyka sa totiž dajú najľahšie odhaliť vtedy, keď ich prostredníctvom určitého silnejšieho jazyka prekročíme. Silnejší jazyk potom umožní vyjadriť to, čo je v rámci pôvodného jazyka nevyjadriteľné, totiž jeho medze. Medze jazyka teórie množín ako nástroja reprezentácie svojich objektov však matematika ešte zatiaľ neprekročila. Opísať tieto medze tak ostáva otvoreným problémom. Dnes môžeme povedať nanajvýš, že z hľadiska súčasného stavu je expresívna, logická, explanatorická a integratívna sila jazyka teórie množín totálna. Hranice jazyka teórie množín sú hranicami sveta dnešnej matematiky, a preto sú neviditeľné.

1.2 Filozofická a didaktická reflexia re-prezentácií

Analýzu vývinu symbolického jazyka matematiky od aritmetiky cez algebru, diferenciálny a integrálny počet až k predikátovému počtu, uvedenú na predošlých stranách, možno chápať ako rozvinutie myšlienky z Fregeho state *„Funktion und Begriff“* ktorú sme citovali na s. 12. Náš výklad sa od Fregeho výkladu odlišuje v dvoch smeroch. Prvý je terminologický. Algebru či diferenciálny a integrálny počet nezahŕňame pod pojem aritmetiky, ako Frege, ale považujeme ich za samostatné symbolické jazyky. Dôležitejší je druhý rozdiel, spočívajúci v tom, že sme ukázali, ako vo vývine ktorý opisuje Frege, spolupôsobil geometrický názor. Frege geometrický názor ostro oddeľoval od aritmetiky. Preto jednotlivé štádiá spájal pomerne voľne, slovami ako „*potom prešli*“ či „*ďalším vyšším stupňom*“, pričom otázka, prečo „*prešli*“ či odkiaľ sa nabral „*ďalší vyšší stupeň*“, ho nezaujímala. Z hľadiska logicistického prístupu k filozofii matematiky je to prirodzené, lebo v jeho rámci sa ostro rozlišuje medzi kontextom objavu a kontextom zdôvodnenia. Ale aj keď uznávame význam tohto rozlíšenia, je zaujímavé pokúsiť sa pochopiť dynamiku príslušných prechodov. A tu sa ukazuje pozoruhodná previazanosť symbolických a ikonických jazykov, keď prechod na „*ďalší vyšší stupeň*“ symbolického jazyka sa uskutočňuje spravidla pomocou ikonického medzistupňa. Napríklad pojem neznámej v algebre sa rodí v dvoch krokoch, z ktorých prvým je vznik zárodočnej idey neznámej v podobe úsečky neurčitej dĺžky. Druhý krok nastáva keď sa pre túto geometrickú ideu vytvorí adekvátne symbolické vyjadrenie v tvare neznámej. Analogický ikonický medzistupeň možno nájsť aj pri zrode pojmu funkcie. Aj tento proces sa uskutočňuje v dvoch krokoch. Prvým krokom je vznik zárodočnej idey funkcie v podobe závislosti medzi premennými, vyjadrenej pomocou krivky. Druhý krok nastáva, keď sa pre geometrickú ideu krivky vytvorí adekvátne symbolické vyjadrenie.

Striedanie symbolických a ikonických jazykov v dejinách matematiky si zasluhuje filozofickú reflexiu. Nasledujúca tabuľka obsahuje prehľad základných druhov ***symbolického a ikonického jazyka*** matematiky. Uvádzame ich v poradí, v akom vznikli počas historického vývinu matematiky. Prechody medzi uvedenými jazykmi súvisia s odkrytím nového univerza objektov. Štyri z nich, označené šípkami 1, 3, 5 a 7 prinášajú konštrukciu nového ikonického jazyka, ktorý otvára vstup do nového univerza tvarov. Tieto prechody spočívajú vo ***vizualizácii*** určitého pojmu, ktorý mal pôvodne iba symbolický význam. Tak *pytagorejská vizualizácia počtu pomocou figurálnych čísel* (označená šípkou 1) zásadným spôsobom zmenila prístup k mnohosti. Čísla, ktoré prv vystupovali len pri počítaní, sa vďaka pytagorejskej vizualizácii dostali do celého radu vzájomných vzťahov, čo umožnilo vznik novej matematickej disciplíny, teórie čísel. Teória čísel je čímsi zásadne iným, ako boli počty pestované v predchádzajúcom období.



Namiesto operacionálneho vzťahu medzi aritmetickým úkonom a jeho výsledkom (napríklad „umocni 4 na druhú, dostaneš 16“ známe z Moskovského papyrusu) nastupujú v teórii čísel štrukturálne vzťahy (typu „súčet dvoch párnych čísel je číslo párne“). Podobne pri *karteziánskej vizualizácii (polynomiálnej) formy pomocou analytickej geometrie* (ktorá je označená šípkou 3) sa polynómu, ktorý bol dovtedy chápaný výlučne ako algebraický výraz, ako predmet symbolických manipulácií, priradí tvar. V dôsledku toho sa polynómy dostávajú do celého radu vzájomných vzťahov, ktoré boli predtým nemysliteľné. Riešenie polynómu, čo je jednou z hlavných úloh algebry, dostáva geometrickú interpretáciu hľadania priesečníka *x*-ovej osi s krivkou predstavujúcou polynóm. Vďaka tomu sa stáva pochopiteľným, prečo sú niektoré polynómy v reálnom obore neriešiteľné: príslušné krivky *x*-ovú os nepretnú. Takto sa modálny predikát neriešiteľnosti mení v extenzívnu vlastnosť krivky (neexistenciu priesečníka). Podobne iteratívna geometria prináša *vizualizáciu limitného* *prechodu* (označenú šípkou 5). Keď sa oboznámime s objektmi ako Peanova krivka alebo Mandelbrotova množina, získame lepšie porozumenie pre mnohé z problémov, ktoré sú spojené s prechodom k limite. A aj na vznik teórie množín sa možno pozrieť ako na určitú „vizualizáciu" alebo v tomto prípade bude asi lepšie hovoriť o *cantorovskej extenzionalizácii predikátového počtu* (označenej šípkou 7).[15]

Zvyšné tri prechody, označené šípkami 2, 4, a 6 sú spojené so vznikom nového symbolického jazyka a otvárajú vstup do nového univerza formúl. Tieto prechody možno označiť termínom ***symbolizácia***, pri ktorej určitý dielčí aspekt ikonického jazyka získa symbolické vyjadrenie. Tak napríklad pri vzniku algebry (označenom šípkou 2) dochádza k *symbolizácii pojmu premennej*. Zárodočná idea pojmu premennej je prítomná už v syntetickej geometrii v podobe úsečky neurčitej dĺžky. Pomocou nej Euklides dokazuje rad tvrdení z teórie čísel. Pojem úsečky neurčitej dĺžky však nemožno považovať za plnohodnotný pojem premennej, pretože je úzko zviazaný s geometrickými konštrukciami. Operácie, ktoré možno s takouto úsečkou vykonávať, sú obmedzené trojrozmernosťou priestoru. Až keď došlo k nahradeniu úsečiek písmenami, zabudováva sa nástroj na vyjadrenie neurčitej referencie do symbolického jazyka čím získava naprostú všeobecnosť. Podobne prináša vznik diferenciálneho a integrálneho počtu (označený šípkou 4) *symbolizáciu pojmu funkcie*. Pojem funkcie je v rudimentárnej podobe prítomný v analytickej geometrii ako krivka priradená polynómu. Ale pre pojem krivky chýbalo symbolické vyjadrenie, a preto rozsah operácií, ktoré bolo možné s krivkami uskutočňovať, bol obmedzený. Až keď Leibniz vytvoril nový symbolický jazyk obsahujúci všeobecný symbol pre funkcie, bolo možné s funkciami uskutočňovať symbolické operácie ako napríklad integrovanie metódou *per partes* alebo, čo je ešte dôležitejšie, vytvoriť funkciu od funkcie (čo pri geometrickej reprezentácii funkcie pomocou krivky možné nie je). Ako poslednú by som chcel uviesť *symbolizáciu kvantifikácie a logického odvodzovania* (označenej šípkou 6), ku ktorej dochádza v predikátovom počte. Tento krok nadväzuje na upresnenie matematického jazyka, ku ktorému došlo v rámci teórie funkcií reálnej premennej. Predovšetkým Weierstrassova ε-δ analýza obsahuje v implicitnej podobe mnohé aspekty teórie kvantifikácie a jemným rozlišovaním rôznych druhov konvergencie už nastoľuje rad problémov, ktorých exaktné uchopenie prinesie predikátový počet.

Zmenu jazyka, ktorej príklady predstavujú procesy vizualizácie a symbolizácie označujem termínom ***re-prezentácia***. V ich priebehu sa pre matematiku otvára nové univerzum objektov. Analýza re-prezentácií odhalila pozoruhodnú pravidelnosť v striedaní symbolických a ikonických jazykov, ktorá je dôležitá ako z hľadiska filozofie matematiky, tak aj z hľadiska jej vyučovania.

1.2.1 Vzťah logických a historických rekonštrukcií matematických teórií

Domnievam sa, že pochopenie úlohy geometrických medzistupňov v rozvoji matematickej symboliky by mohla vrhnúť nové svetlo na otázku vzťahu logického a historického prístupu vo filozofii matematiky. Doteraz sa tieto dva prístupy rozvíjali oddelene, a dokonca niekedy medzi nimi existovalo určité napätie. Aspoň čiastočne to bolo dané tým, že autori rozvíjajúci historický prístup k otázkam filozofie matematiky, ako Imre Lakatos či Herbert Mehrtens, a tiež viacerí účastníci diskusie o revolúciách v matematike ako Michael Crowe či Joseph Dauben, chápali históriu predovšetkým ako priestor pre stret ideí a konflikt názorov, teda ako oblasť pre sociálne vyjednávanie o normách a hodnotách racionálneho dialógu. Logicky orientovaným filozofom matematiky pripadali historizujúce rekonštrukcie ako míňajúce sa (logického) jadra problémov. Preto zaujali negatívny postoj nielen k jednotlivým rekonštrukciám, ale k samotnej možnosti historického prístupu k otázkam filozofie matematiky. Naše analýzy však ukázali, že širokú škálu ***historických*** zmien v matematike možno rekonštruovať prostredníctvom kategórií ako logická či expresívna sila jazyka, čo sú kategórie blízke ***analytickému*** prístupu. Ide o to, že historicita sa nemusí týkať iba noriem a hodnôt, ale veľmi dôležitá je aj historicita jazykových prostriedkov, ktoré sú v určitom období k dispozícii. Asi by bolo naivné si myslieť, že rekonštrukcia historického vývinu jazyka matematiky odstráni všetky konflikty medzi historickým a logickým prístupom k filozofii matematiky. Mohla by však prispieť k ich zblíženiu a k nadviazaniu dialógu medzi nimi.

Na jednej strane pojmy ako logická či expresívna sila sú dostatočne exaktné na to, aby mohli byť prijateľné aj pre logicky zameraného filozofa matematiky. Keď sme ukázali, že v priebehu dejín sa tieto aspekty zásadne menili (čo ostatne pripustil aj Frege), znamená to, že v histórii matematiky dochádza nielen ku zmenám hodnôt a noriem, ale že v priebehu dejín sa menili aj nepomerne presnejšie uchopiteľné a jasnejšie analyzovateľné aspekty, ako sú napríklad logická a expresívna sila jazyka. Významná úloha, ktorú v dejinách matematiky zohrali zmeny jazyka, by mohla logicky orientovaného filozofa matematiky primeť k tomu, aby začal v histórii vidieť niečo viac než len spleť psychologických a sociálnych náhod. Na druhej strane skutočnosť, že v tak významných zlomoch v dejinách matematiky, ako sú zrod algebry či vznik teórie množín, zohrali zmeny logických aspektov jazyka ústrednú úlohu by mohli primeť zástancov historického prístupu, aby uznali, že logika, ak sa na ňu pozrieme v historickej perspektíve, môže byť pre porozumenie histórie matematiky prínosom. Tieto tézy by som rád podporil konkrétnymi príkladmi.

a) revolúcie v matematike

Keďže väčšina rekonštrukcií uvedených v oddieli 1.1 mala za cieľ ilustrovať prínos histórie pre pochopenie logickej štruktúry jazyka matematiky, pokúsim sa aspoň na jednom príklade ilustrovať opačný prínos, prínos logiky pre históriu matematiky. Za týmto účelom som si zvolil debatu vyvolanú článkom Michaela Crowa *Ten 'laws' concerning patterns of change in the history of mathematics* (Crowe 1975), ktorá bola zhrnutá v zbierke *Revolutions in Mathematics* (Gillies 1992). Z desiatich historických prípadov, ktoré boli diskutované v tejto zbierke ako kandidáti na revolúciu v matematike, bolo päť *re-prezentácií*. Dauben diskutoval vizualizáciu počtu u pytagorejcov a zrod Cantorovej teórie množín (Dauben 1984), Mancosu diskutoval Descartov objav analytickej geometrie (Mancosu 1992), Grosholz diskutovala Leibniza (Grosholz 1992) a Gillies diskutoval zrod predikátového počtu u Fregeho (Gillies 1992b). Nechajme stranou otázku, či uvedení autori považovali diskutované zmeny za revolučné alebo nie. Predbežne prijmime uvedené práce ako indikáciu typu zmeny, ktorú historici považujú za dostatočne veľkú na to, aby uvažovali o možnosti jej výkladu pomocou Kuhnovej teórie vedeckých revolúcií. Keď sme ukázali, že tieto zmeny (či už ich považujeme za revolučné alebo nie) je možné rekonštruovať ako zmeny logickej, expresívnej, explanatorickej a integratívnej sile jazyka matematiky, naznačuje to, že aj keď samotný pojem revolúcie je sociologická kategória, táto kategória koreluje s niečim, čo sa dá analyticky vymedziť.

Keď prijmeme túto interpretáciu, môže nás upozorniť, že dva dôležité zlomy boli autormi zbierky *Revolutions in Mathematics* opomenuté. Chýba diskusia zrodu algebry a zrodu iteratívnej geometrie. Historik tak môže z analytického prístupu vyťažiť doplnenie a sprehľadnenie materiálu, ktorý skúma. Logik či epistemológ môže historika upozorniť na prípady, ktoré z tých či oných dôvodov unikli jeho pozornosti a tiež usporiadať materiál (napríklad v smere narastajúcej expresívnej sily jazyka). Okrem toho analytický prístup ponúka historikovi kritérium konzistentnosti. Ak historik prehlási jednu či dve *re-prezentácie* za revolučné, vynára sa otázka, prečo nepovažovať za revolučné aj ostatné. Samozrejme, historikovi nemožno odňať právo posledného slova v tejto otázke (veď je to historická otázka, teda spadá do jeho kompetencie). Ale tým, že by sa otázka revolúcií v matematike formulovala v pojmoch logickej, expresívnej, explanatorickej a integratívnej sily jazyka, bolo by možné jednotlivé prípady jasnejšie analyzovať. Problémom je tiež, že dva príklady diskutované v zbierke *Revolutions in Mathematics* sú zmeny iného druhu, menovite *objektácie* (ktoré budú predmetom oddielu 2 tejto knihy). Vynára sa otázka, či je prijateľné pojem revolúcie v matematike rozšíriť aj na tento typ zmien a ak áno, či by nebolo vhodné zaviesť rôzne druhy revolúcií.

Nemožno poprieť, že rekonštrukcia vývinu matematiky uvedené v kapitole 1.1 vyznieva proti kuhnovskému prístupu. Jednak regularita striedania ikonického a symbolického jazyka, ako aj konzervatívny charakter narastania logickej, expresívnej, explanatorickej a integratívnej sily jazyka spochybňujú prítomnosť nesúmerateľnosti v kuhnovskom zmysle. Symbolické a ikonické jazyky sa nedajú na seba dokonale previesť, je medzi nimi určitý stupeň nepreložiteľnosti. Ale ich rozsiahle fragmenty preložiť možno, preto táto nepreložiteľnosť určite nie je nesúmerateľnosťou. Namiesto sporov o tom, či v matematike existujú alebo neexistujú revolúcie by možno bolo vhodnejšie pokúsiť sa exaktne charakterizovať mieru nepreložiteľnosti medzi symbolickým a ikonickým jazykom.

b) historicita logiky

Objavom neštandardnej analýzy Abrahamom Robinsonom sme ilustrovali logickú silu jazyka teórie množín. Avšak okrem čisto matematického prínosu má neštandardná analýza aj nepopierateľný *filozofický význam*. Ukazuje totiž, že odmietanie či prijímanie určitých matematických postupov (v prípadoch keď v nich nie je nájdená konkrétna chyba) je podmienené jazykovým rámcom, v ktorom tieto postupy posudzujeme. V dobe Cauchyho, Dirichleta a Weierstrassa nebol k dispozícii aparát teórie modelov, a preto ***ich*** odmietnutie nekonečne malých bolo oprávnené. Avšak prostriedkami ***našej*** teórie modelov je možné vytvoriť pre Eulerove úvahy pevné a presvedčivé základy, a tak tieto úvahy plne rehabilitovať. Preto je možné, že aj iné matematické teórie, ktoré boli v minulosti zamietnuté, je možné prostriedkami modernej matematickej logiky a teórie množín oživiť.

Opačný posun nastal ohľadom Euklida, ktorý dlho považovaný za vzor presnosti argumentácie. Moritz Pasch, opäť vďaka novým matematickým výdobytkom (tentoraz teórii funkcií reálnej premennej) odhalil, že rad Euklidových dôkazov nie je v poriadku. Keď zoberieme rovinu tvorenú bodmi, ktorých obe súradnice sú racionálne čísla, možno ukázať, že takáto rovina je modelom Euklidových axióm. Napriek tomu však rad konštrukcií, obsiahnutých v Euklidových *Základoch* sa v tejto rovine nedá uskutočniť, lebo body, o ktoré sa uvažované konštrukcie opierajú, v nej neexistujú. Keďže model spĺňa Euklidove axiómy, ukazuje, že ***existencia*** bodov, ktoré Euklides pri svojich konštrukciách používa, nie je logickým dôsledkom axióm. Paschova kritika viedla ku snahe „opraviť" Euklida a nájsť systém axióm, z ktorého by bolo možné všetko, čo Euklides „dokázal" naozaj dokázať. Najúspešnejší z týchto systémov sú Hilbertove *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert 1899).

Príklad Moritza Pascha a Abrahama Robinsona sú ilustráciou historicity nášho pohľadu na matematiku. Otázka, či Euklides alebo Euler dokázali určité tvrdenie alebo nie, závisí od jazykového rámca, v ktorom ich dôkazy rekonštruujeme. Pred vznikom teórie funkcií reálnej premennej bolo prirodzené považovať Euklidove dôkazy za logicky korektné rovnako ako pred vznikom neštandardnej analýzy bolo prirodzené považovať Eulerove dôkazy za problematické. Vidíme, že otázka, čo je korektný dôkaz, je historicky podmienená. Historicita, ktorú tu mám na mysli nie je žiadnym historizmom či relativizmom. Pred Paschom bolo objektívne správne považovať Euklidove dôkazy za korektné, rovnako ako dnes, po Robinsonovi je objektívne správne pozerať sa na Eulerove argumenty s väčšou úctou. Teda vzťah logiky k dejinám je objektívny, nemá nič do činenia so subjektívnymi preferenciami matematikov, historikov či filozofov. Ide o to, že ako jedna strana (Euklidov či Eulerov dôkaz), tak aj druhá (matematik, historik či filozof ktorý daný dôkaz číta) sú historicky situované. Situované sú v určitom jazykovom rámci, ktorý rozhoduje o tom, či je možné Eulerove argumenty rekonštruovať, respektíve či je možné pre Euklidove dôkazy nájsť protipríklady. Dedekindova konštrukcia roviny tvorenej racionálnymi bodmi rovnako ako Robinsonova konštrukcia hyperreálnych čísel zásadne zmenili pohľad matematikov na niektoré úseky histórie svojej disciplíny.

Nájdenie protipríkladu k Euklidovým konštrukciám je vecou Paschovho jazykového rámca, lebo, ako upozornili Hintikka a Friedman, v Euklidovej dobe neexistovali logické prostriedky, ktoré by umožnili skonštruovať čosi podobné. Je asi nerozumné vyčítať Euklidovi, že nepoznal čosi, čo ani poznať nemohol (modernú teóriu kontinua). V Paschovej kritike a Hilbertovom vylepšení Euklida potom treba vidieť nie Euklidove nedostatky, ale doklady nárastu logickej a expresívnej sily jazyka matematiky, ktorý priniesla moderná logika. Vďaka nej sme schopní vnášať jasné a striktné rozlíšenia do situácií, ktoré sa našim predchodcom zlievali. Podobne možno argumentovať aj v prípade Eulera. Neštandardná analýza síce umožňuje uznať mnohé výsledky, ku ktorým Euler dospel, ale nesmieme sa nechať uniesť výdobytkami teórie modelov. Prostriedkami matematiky 18. storočia asi nebolo možné dať Eulerovým výsledkom striktné zdôvodnenie. Preto kritická reakcia matematikov 19. storočia bola oprávnená. Ako východisko by sme sa mohli snažiť posudzovať každú teóriu z hľadiska jazykového rámca, v ktorom je sformulovaná, teda Euklida posudzovať z hľadiska rámca syntetickej geometrie a Eulera z hľadiska rámca diferenciálneho a integrálneho počtu.

Zdá sa však, že takáto požiadavka je príliš reštriktívna. Nemožno poprieť, že Pasch aj Robinson priniesli čosi pozoruhodné a dôležité, a bola by škoda vzdať sa novozískanej hĺbky vhľadu do dejín matematiky kvôli akejsi pochybnej historickej korektnosti. Keď sa vymaníme z chápania úlohy historika ako sudcu, ktorý musí dbať na spravodlivosť svojich rozsudkov, tak sa zdá byť príťažlivejšou možnosť pristupovať k dejinám z pohľadu modernej matematiky (teda naplno využívať myšlienkové bohatstvo súčasnej matematiky), ale samozrejme, s plným vedomím ahistoricity tohto pohľadu. To pred nami otvára projekt ***zabudnutých matematík***, ktorý sformuloval Petr Vopěnka. V tomto projekte by išlo o to pokúsiť sa urobiť systematicky to, čo sa Robinsonovi podarilo v prípade Eulerovej analýzy nekonečne malých. Je pravdepodobné, že viaceré teórie boli v minulosti zavrhnuté kvôli zlým dôvodom (a často ešte prv než boli rozpracované). Moderná matematická logika a teória množín poskytuje historikovi nástroje, ktoré by mohli takéto zabudnuté teórie opäť priviesť k životu.

1.2.2 Vnímanie tvaru a pohybu

Pri výklade jazyka iteratívnej geometrie sme uviedli citát z knihy *Fraktálna geometrie prírody* (Mandelbrot 1977), v ktorej autor porovnáva svet fraktálnej geometrie so svetom euklidovskej geometrie. Mandelbrot charakterizuje svet euklidovskej geometrie ako chladný; ako svet, v ktorom niet miesta pre tvar oblaku, línie pobrežia či kôry stromu. A skutočne, jednou z dôležitých vecí, ktorú priniesla iteratívna geometria je, že tvar oblaku, línia pobrežia či reliéf pohoria sa stávajú tvarmy v striktne geometrickom zmysle, tvarmi opísateľnými prostriedkami jazyka geometrie. Keď sa pozrieme na tri ikonické jazyky opísané v tejto kapitole: jazyk syntetickej geometrie, jazyk analytickej geometrie a jazyk iteratívnej geometrie, možno ich chápať ako tri spôsoby vzťahovania sa k fenoménu tvaru; ako tri pokusy o vymedzenie hranice medzi tvarom a beztvarým.

Syntetická geometria odkrýva fenomén tvaru pomocou statických objektov ako sú kružnica, kocka, hranol, ihlan, guľa či kužeľ. Tomuto pohľadu, ako poznamenáva Mandelbrot, ostáva tvar väčšiny prírodných útvarov skrytý. Syntetická geometria sa hodí predovšetkým na projektovanie artefaktov ako sú budovy, mosty alebo priehrady. Druhý prístup k tvaru predstavuje analytická geometria, ktorá odkrýva fenomén tvaru pomocou súradnej sústavy a analytických formúl. Takto sa podarilo kvalitatívne rozšíriť oblasť fenoménov, ktorých tvar sa dá uchopiť prostriedkami geometrie. Napríklad v zavesenej reťazi sme schopní rozpoznať reťazovku, vieme opísať trajektóriu letiaceho kameňa alebo tvar kmitajúcej membrány. Už aj tieto príklady ukazujú, že prístup analytickej geometrie nás privádza omnoho bližšie k prírode. Všade tam, kde je tvar prejavom jednoduchého zákona, kde vzniká ako výsledok pôsobenia niekoľkých málo určujúcich faktorov, všade tam je jazyk analytickej geometrie schopný tvar exaktne uchopiť. Mandelbrotova kritika zostáva napriek tomu v platnosti. Útvary, ktoré sa nerodia naraz, ale sú výsledkom eróznych či evolučných procesov (ako je reliéf pohoria alebo tvar koruny stromu), útvary pri vzniku ktorých pôsobí nie jeden či desať určujúcich faktorov, ale milióny náhodných vplyvov (línia pobrežia alebo tvar oblaku), ostávajú aj pre analytický prístup beztvaré. Tretí prístup k tvaru prináša iteratívna geometria, ktorá odkrýva tento fenomenén pomocou iterácií určitej transformácie. Keďže rast živočíchov a rastlín sa zakladá na opakovaní delenia buniek a procesy erózie sú tvorené periodickými vplyvmi prostredia, iteratívna geometria, tým že svoje útvary generuje iterovaním určitej procedúry, umožňuje exaktne hovoriť o tvare prírodných útvarov. Vývin pozdĺž línie syntetická geometria, analytická geometria, fraktálna geometria tak mení spôsob odkrytosti tvaru a posúva hranicu medzi „tvarým“ a beztvarým.[16]

Z filozofického hľadiska je to zaujímavé, lebo pri zbežnom pohľade sa môže zdať, že vnímanie tvaru a predovšetkým hranica medzi tým čo má tvar a čo vnímame ako beztvaré, je záležitosť biológie alebo kognitívnej psychológie, a teda pevne daná. Aj keď nechcem spochybňovať význam biologických a psychologických faktorov, je zaujímavé, že vnímanie tvaru má aj jazykový rozmer. Zmeny v jazyku matematiky, zrod analytickej a potom fraktálnej geometrie umožnili vytvoriť úplne nové univerzum tvarov. Napred iba v hlavách niekoľkých matematikov, neskôr aj v teóriách fyzikov, aby napokon, pod vplyvom techniky, tieto nové tvary prenikli aj do sociálne konštruovanej skutočnosti. Zdá sa teda, že aj matematika pôsobí ako faktor ktorý ovplyvňuje naše vnímania skutočnosti. Lebo niet pochýb o tom, že každý, kto sa len trocha podrobnejšie oboznámil s teóriou fraktálov, inak vníma list paprade či skalné bralo. Je preto pravdepodobné, že dnešný človek inak vníma tvary okolo seba, než antický Grék, a že táto inakosť je podmienená matematikou. Matematika teda formuje nielen spôsob myslenia a priestorovú predstavivosť, ale aj to, ako vnímame tvar.

Keď sa z tohto hľadiska pozrieme na Aristotelovu teóriu prirodzených pohybov, tak to, že v nej dominujú priamočiare a kruhové pohyby, možno pripísať Euklidovmu „vplyvu“.[17] V euklidovskej geometrii sú priamky a kružnice základnými tvarmi a toto chápanie tvaru euklidovská geometria vtlačila aj Aristotelovej fyzike. Teda Aristoteles nachádza v prírode priamočiare a kruhové pohyby nie z fyzikálnych príčin, ani kvôli nejakej metafyzickej pozícii (ako Platón), ale preberá ich z geometrie. Keď sa v 17. storočí matematike otvoril nový svet tvarov, priamka a kružnica stratili svoje výsadné postavenie. A v tom istom čase začali fyzici trajektórie pohybov vyberať zo širšej škály tvarov. Zistili, že vrhnutý kameň letí po parabole, planéty obiehajú Slnko po elipsách, dráhu najkratšieho času (brachystochronu) tvorí cykloida. Aristotelova teória pohybu začala na pozadí tohto širšieho sveta tvarov vyznievať umelo. Názoru, že priamočiary a kruhový pohyb sú „prirodzené“, už nik nerozumel. Oni boli prirodzené na pozadí euklidovskej geometrie, ale vo svete analytickej geometrie nie sú o nič prirodzenejšie než pohyb po ľubovoľnej inej hladkej krivke. Podobne sa v 19.

storočí v matematike objavili prvé fraktály a postupne si našli cestu do fyziky. Zdá sa preto, že jednotlivé jazyky, ktoré vznikli v geometrii, neboli dôležité len z hľadiska vnímania ***tvaru***, ale zásadným spôsobom ovplyvnili aj vnímanie ***pohybu***. Podobne ako geometrické útvary, aj fyzikálne procesy možno generovať syntetickým, analytickým alebo iteratívnym spôsobom.

Asi najzaujímavejším aspektom zmien vo vnímaní tvaru je, že ich dynamika nie je „samonosná“. Prechody od syntetickej cez analytickú až k fraktálnej geometrii nie sú konštituované zmenami vo vnútri vizuálneho sveta. Je to prekvapujúce, ale nový svet tvarov sa odkrýva pomocou symbolického medzistupňa. K tomu, aby Descartes mohol prelomiť úzke hranice Euklidovho sveta a preniknúť do univerza analytických kriviek a plôch, bolo potrebné napred vytvoriť jazyk algebry. Podobne k vymaneniu sa zo sveta analytických útvarov a k otvoreniu univerza fraktálov bolo potrebné najskôr vytvoriť diferenciálny a integrálny počet. Táto skutočnosť vrhá nové svetlo na filozofické koncepcie, ktoré sa snažia matematiku založiť na nazeraní (ako je Kantov transcendentálny idealizmus, alebo Husserlova fenomenológia). Tieto filozofie síce môžu uchopiť jav odkrytosti tvaru v nazeraní, vedia ukázať čo odkrytosť konštituuje a akú má štruktúru. Nie sú však schopné opísať proces jej zmeny. Zmeny odkrytosti tvaru totiž nespočívajú v zmene hľadiska a nespočívajú ani v posúvaní horizontu či zostrení pohľadu. Zmeny odkrytosti tvaru sa neuskutočňujú prostriedkami nazerania, ale pomocou čohosi, čo je nazeraniu bytostne cudzie, pomocou symbolického jazyka.

1.2.3 Epistemické napätie a dynamika vývinu matematiky

Každé obdobie v dejinách matematiky (s výnimkou starých Egypťanov a Babylončanov) má svoj symbolický a svoj ikonický jazyk. Tieto dva jazyky vymedzujú univerzum, v ktorom sa odohráva matematika daného obdobia. Napríklad renesančná matematika bola založená na symbolickom jazyku algebry a na ikonickom jazyku syntetickej geometrie. Zaujímavou vlastnosťou týchto jazykov je však ich vzájomná neprevoditeľnosť. V žiadnom období sa ikonický a symbolický jazyk úplne nekryjú. Vždy existuje medzi nimi určitý ***epistemický presah***. Tabuľka uvedená na s. 76 umožňuje tento presah presnejšie vymedziť. Jazyk, ktorý je v tabuľke nižšie (t.j. je historicky mladší) má presah nad jazykom, ktorý je vyššie (t.j. je starší). Tak v prípade renesancie, keďže jazyk algebry je historicky mladší, má tento symbolický jazyk epistemický presah nad jazykom syntetickej geometrie. Epistemickým presahom jazyka algebry nad jazykom syntetickej geometrie rozumiem skutočnosť, že v jazyku algebry existujú výrazy, ktoré nie je možné interpretovať prostriedkami syntetickej geometrie. Teda v renesancii bolo možné „vypočítať“ viac, ako bolo možné „nakresliť“.

Takáto situácia vyvolávala napätie, vytvárala potrebu zmeniť ikonický jazyk tak, aby bolo možné geometricky vyjadriť aj výrazy jazyka algebry na ktoré syntetická geometria nepostačuje (napríklad mocniny štvrtého stupňa). Keď Descartes vytvoril analytickú geometriu, ktorá umožňovala geometricky reprezentovať mocniny ľubovoľného stupňa, vznikol epistemický presah na strane geometrie. Súradná sústava totiž umožňuje zakresliť nielen krivky, ktoré sú dané pomocou polynómu, ale aj krivky ako $\ln(x)$, na ktoré jazyk algebry nepostačuje. Tento presah geometrického jazyka odstránil Leibniz, keď vytvoril diferenciálny a integrálny počet. Ale, ako sa neskôr ukázalo, tento symbolický jazyk, založený na limitnom prechode, má presah nad ikonickým jazykom analytickej geometrie a na redukciu tohto presahu sa rodí iteratívna geometria.

Ukazuje sa, že epistemické napätie je neodstrániteľné, dokonalá zhoda medzi symbolickým a ikonickým pólom matematiky neexistuje. Práve na neredukovateľnosti epistemického napätia medzi symbolickými a ikonickými jazykmi sa zakladá naša historická rekonštrukcia. Diagram, ktorým sme našu rekonštrukciu zhrnuli, nazývame ***bipolárnym diagramom***, lebo predstavuje vývin matematiky ako postupný proces oscilácie medzi dvoma pólmi. Podľa nášho presvedčenia je to vhodnejšia schéma, než klasická kumulatívna predstava, lebo zachytáva nielen proces narastajúcej diferenciácie poznania (ktorý dostaneme, ak sa obmedzíme na sledovanie jedného pólu, ako to urobil Frege), ale zachytáva aj napätie, ktoré túto diferenciáciu poháňa. Avšak príslušné póly, aj keď sú navzájom neredukovateľné (teda nemožno vytvoriť symbolický jazyk, ktorý by mal *presne* rovnakú logickú, expresívnu, explanatorickú a integratívnu silu ako určitý ikonický jazyk), sa navzájom nevylučujú. Práve naopak, dopĺňajú sa a poskytujú matematike bohatstvo výrazových prostriedkov. Napätie medzi nimi poháňa matematiku k tvorbe stále nových symbolických a ikonických jazykov. Preto sa zdá, že na opis vzájomného vzťahu týchto pólov sa najlepšie hodí Bohrov pojem ***komplementarity***.

1.2.4 Technológia a koordinácia činnosti

Keď sme ukázali ako vývin geometrie ovplyvňuje vnímanie tvaru, vynára sa otázka, či aj vývin symbolických jazykov matematiky pozdĺž línie od elementárnej aritmetiky po predikátový počet nemení nejakým spôsobom odkrytosť sveta. Avšak kým zmeny vo vnímaní tvaru (prechody medzi syntetickou, analytickou a iteratívnou geometriou) sú markantné, v prípade symbolických jazykov nie je hneď jasné, vnímanie čoho by sa malo pri prechode od aritmetiky k algebre meniť. Aritmetika síce zásadným spôsobom zmenila vnímanie mnohosti, ale algebra sa už mnohosti priamo netýka. Preto vyvstáva otázka, čo by malo byť analógiou fenoménu tvaru, na zmenách vnímania ktorého by sme mohli sledovať vývin symbolických jazykov. Ako jedna z možností sa ponúka obrátiť pozornosť k vývinu technológie. Algebraické symboly vznikajú na zápis určitých (matematických) operácií. Preto zlomy vo vývine symbolického jazyka by mohli korešpondovať so zmenami v spôsobe koordinácie ľudskej činnosti, a teda aj technológie.

Remeselnú technológiu staroveku možno považovať za technológiu, ktorá sa zakladá na rovnakom chápaní schém, aké stelesňujú kalkulatívne postupy v elementárnej aritmetike. Remeselník manipuluje s konkrétnymi predmetmi. Podobne ako Frege charakterizoval elementárnu aritmetiky, možno aj o remeselnej technológii povedať, že pozostáva z manipulácií s konštantnými objektmi.

Nástup ***strojovej výroby*** sa zakladá na tom, že technologický proces rozbijeme na časti, a určitý robotník už nezhotovuje celý výrobok, ale vykonáva iba niekoľko úkonov. Technologický proces sa tak rozpadá na zložky, podobne ako sa výpočet rozpadá na jednotlivé kroky v algebraickej formule. Tak ako formula reprezentuje určitú veličinu (napríklad koreň rovnice) pomocou postupnosti operácií, aj proces výroby sa rozpadá na postupnosť úkonov, ktoré nadobúdajú samostatnosť a tak ich môžu vykonávať rôzni robotníci. Pritom všeobecnosť, vyjadrená pomocou písmen v algebraickej formule je do istej miery analogická s tým, že robotník robí daný úkon so všetkými predmetmi. Na rozdiel od remeselníka, ktorý prejde s konkrétnym predmetom od začiatku technologického procesu až po jeho koniec, robotník robí len jeden úkon, ale ten robí všeobecne, s každým predmetom. Preto podobne ako Frege charakterizoval jazyk algebry, možno aj o technologických schémach strojovej výroby povedať, že pozostávajú z manipulácií s premennou.

Technológia, ktorej schémy sú analogickú s jazykom diferenciálneho a integrálneho počtu, by mohla byť ***chemická technológia***. Technologický postup v chémii už nemožno považovať za sériu izolovaných úkonov, ktoré treba jeden po druhom urobiť, ale skôr za spojitý proces ktorý treba riadiť. Keď miešame určitú reagujúcu zmes, tak to už nie je operácia paralelná s tými, ktoré poznáme z algebry. Miešanie, ohrievanie a pridávanie reagentov sú spojité procesy riadenia chemickej reakcie.[18] V analógii s tým ako Frege charakterizoval jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu, možno aj o technologických postupoch v chémii povedať, že pozostávajú z manipulácií s funkciami druhého rádu.

Keď hľadáme technológie, ktorých spôsob odkrytosti manipulácií je paralelný so spôsobom odkrytosti manipulácií v jazyku predikátového počtu, ponúkajú sa ***analógovo riadené technológie***. Tieto technológie umožňujú v rovine riadenia uskutočniť prakticky ľubovoľný postup. Keď vytvoríme príslušný logický obvod, ten umožní daný technologický proces exaktne riadiť. V analógii s tým ako Frege charakterizoval jazyk predikátového počtu, možno aj o schémach analógovo riadených technológií povedať, že pozostávajú z manipulácií so všeobecnou funkciou ľubovoľného rádu.

Tento stručný náčrt nechce budiť dojem, že ide o výklad dejín technológie. Jeho cieľom je skôr ponúknuť nový pohľad na povahu technologických inovácií. Spravidla sa vývin technológií dáva do súvisu s vývinom fyziky. Pravdepodobne je to aj správne. Chceme však upozorniť na to, že celý rad zmien v prístupe k technológii môže súvisieť aj s vývinom matematiky. Zrod a rozšírenie algebraickej symboliky v západnej matematike predchádzal vzniku strojovej výroby. Je možné, že nešlo o náhodnú súslednosť. Symbolické myslenie, ktoré sa rozvíjalo v algebre, mohlo prispieť k zmene vnímania technologického procesu. Nie je vylúčené, že vývin symbolického jazyka ovplyvnil rozvoj technológie aj v iných prípadoch. Matematika poskytuje jazykové nástroje, ktoré umožňujú omnoho efektívnejšie uvažovať o koordinácii technologických operácií. Ak je na tom trocha pravdy, mohlo by to pomôcť porozumieť úlohe matematiky v rozvoji západnej civilizácie. Matematika je dôležitá nielen pre kultiváciu logického myslenia, priestorovej predstavivosti a vnímania tvaru (opísaný v kapitole 1.2.2). Význam matematiky by mohol spočívať aj v tom, že kultivuje vnímanie algoritmov a tým napomáha rozvoju technologickej zložky civilizácie.

1.2.5 Problematika prehistórie matematických teórií

Keď sa na vývin určitej matematickej teórie pozrieme z hľadiska jej obsahu, t.j. pojmov, metód a poznatkov ktoré ju tvoria, zistíme, že matematici objavili jej základné poznatky omnoho ***skôr, ako sa vytvoril jazyk***, umožňujúci tieto poznatky presne sformulovať a striktne dokázať. Snáď najlepšie to vidno na integrálnom počte. Prvé výsledky v oblasti, ktorá sa neskôr bude nazývať integrálny počet, dosiahol Archimedes takmer dvetisíc rokov predtým ako Newton a Leibniz vytvorili jazyk umožňujúci formálne integrovať. Archimedes pracoval v jazyku syntetickej geometrie, ktorý sa na výpočet obsahov a objemov oblých útvarov nehodí. Preto si pri objavovaní svojich kvadratúr a kubatúr (ako sa v antike nazývalo počítanie obsahov a objemov) vypomáhal pákami, na ktorých ramená umiestňoval časti skúmaného útvaru tak, aby z rovnováhy na páke mohol odvodiť pomery objemov. Nevýhodou tohto postupu bolo, že pre každý útvar musel vymyslieť zvláštny trik, ako ho rozdeliť na časti, časti preskupiť, pomocou páky ich priniesť do rovnováhy a nakoniec zosumovať. Takto vlastne veľká časť Archimedovej duchaplnosti bola potrebná na prekonanie ťažkostí, spôsobených nevhodnosťou jazyka syntetickej geometrie pre výpočty obsahov.

Každý ďalší jazyk obohatil arzenál metód, ktoré boli pri výpočte kvadratúr a kubatúr k dispozícii. Zrod algebraickej symboliky umožnil zovšeobecniť výpočet obsahu štvorca a objemu kocky na ľubovoľnú mocninu x^n. Aj keď pre túto úlohu chýbala akákoľvek geometrická interpretácia, jazyk algebry umožnil Cavalierimu pomocou „*metódy sumácie mocnín čiar*“ nájsť vzťahy, ktoré zodpovedajú integrálom $\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$ pre n = 1, 2, 3, ..., 9 (Edwards 1979, s. 106-109). Napríklad pre n = 5 formuloval svoj výsledok slovami: „*všetky kvadráto-kuby musia byť v pomere 6:1*“. *Kvadráto-kuby* sú piate mocniny neznámej, a pomer 6:1 udáva prevrátenú hodnotu zlomku, ktorý vystupuje na pravej strane formuly pre integrál x^5. Aj keď v jeho dobe nebolo jasné, čo vlastne počítal, výsledky ku ktorým dospel, sú správne.

Zrod analytickej geometrie priniesol novú interpretáciu algebraických operácií. x^3 už nebola kocka, ako podobný výraz interpretoval Cavalieri, ale úsečka, ktorej dĺžka je x^3. To spolu s ideou súradnej sústavy umožnilo Fermatovi novým spôsobom počítať Cavalieriho kvadratúry. Napríklad pri integrácii x^3 už nie je nutné „*sumovať kuby*“ a výpočet už nie je výpočtom objemu nejakého štvorrozmerného objektu, ktorý si nevieme predstaviť. Analytická geometria umožňuje pojať tento integrál ako výpočet obsahu plochy pod krivkou $y = x^3$. Vhodným rozdelením intervalu (0, a) bodmi tvoriacimi geometrickú postupnosť možno daný integrál ľahko vypočítať. Pritom rovnakou metódou možno vypočítať aj Cavalieriho *kvadráto-kuby* ako obsah pod krivkou $y = x^5$. Navyše, kým Cavalieri musel pre každú sumáciu nájsť trik, ako príslušné mocniny neznámej zosumovať, Fermatov postup pri výpočte plochy pod krivkou $y = x^n$ je naprosto univerzálny. Rozdelenie intervalu pomocou bodov tvoriacich geometrickú postupnosť funguje pre všetky n a možno preto vziať n ako parameter. Tento príklad krásne ilustruje nárast expresívnej a integratívnej sily jazyka.

Zdokonaľovanie jazyka pri prechode od syntetickej geometrie, používanej Aristotelom, cez algebru, ktorú používal Cavalieri, až po analytickú geometriu, používanú Fermatom zásadným spôsobom obohatilo metódy na výpočet kvadratúr. Tento rozvoj bol nevyhnutný pre to, aby Newton a Leibniz mohli odhaliť zásadnú jednotu týchto postupov a zabudovať ju do základov integrálneho počtu. Vznik jazyka umožňujúceho pomocou explicitných pravidiel riešiť problém kvadratúr je rozhodujúcim zlomom vo vývine matematiky. Z hľadiska integrálneho počtu sa výsledky predošlého obdobia javia ako nenáročné cvičenia. Síce dômyselnosť Archimeda, Cavallieriho či Fermata je pôsobivá, ale to čo predstavovalo vrchol ich vedeckého úsilia dnes zvládne priemerný absolvent druhého ročníka vysokej školy za niekoľko hodín

Vo vyučovaní matematiky je postupný a organický rozvoj matematiky spravidla ignorovaný a výuka určitej teórie sa začína ***zavedením jazyka***, zavedením symboliky a syntaktických pravidiel, pomocou ktorých možno danú teóriu presne sformulovať. Tak sa výuka algebry začína zavedením symbolického označenia pre neznámu a výuka matematickej analýzy zasa zavedením syntaktického odlíšenia funkcie a argumentu. To má za následok, že študenti nezažili proces formalizácie, nenaučili sa vytvoriť si vlastnú pracovnú symboliku a postupne, ako sa odhaľujú jej nedostatky, ju meniť. Toto je asi hlavná príčina ťažkostí, ktoré spôsobujú slovné úlohy či úlohy z fyziky. Pri úlohách, kde neexistuje jednoznačné symbolické uchopenie, sú žiaci, ktorí dostali symboliku už v hotovom tvare, bezradní. Nedokážu premostiť priepasť, ktorá oddeľuje problémovú situáciu, zadanú v prirodzenom jazyku, a matematický formalizmus. Keď si spomenieme na storočia a na desiatky inovácií matematického jazyka, ktoré oddeľujú Archimedove výpočty od ich vyjadrenia vo formálne zavŕšenom tvare povedzme u Eulera, uvedomíme si zložitosť prepojenia problému a matematického jazyka, ktorým ho opisujeme. Z historických rekonštrukcií vidno, že je nesprávne začínať výklad určitej teórie zavedením jej jazyka. Len keď jazyk prirodzene vyrastie z problémov, na opis ktorých je určený, je možné očakávať, že u žiakov sa vytvorí prepojenie problémovej situácie a jej reprezentácie v matematickom formalizme. Pritom musíme mať stále na mysli, že jazyk matematiky je nesmierne zložitý a komplexný systém. Tomu, kto ho zvládol, pripadá prirodzene a jednoducho. Ale história ukazuje, že vznikol kumuláciou veľkého množstva malých vylepšení.

Keď píšeme nejakú formulu, ani si neuvedomujeme, že je v nej skondenzovaných mnoho storočí matematickej skúsenosti. Až keď rozložíme jazyk na jeho jednotlivé historické vrstvy, stáva sa zrejmým čo všetko sa muselo udiať, kým bolo možné napísať napríklad princíp indukcie

$$\{\varphi(0) \wedge (\forall n)[\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)]\} \Rightarrow (\forall n)\varphi(n).$$

V tomto princípe sa spája kosistický vynález zápisu neznámej pomocou písmen (v tomto prípade n), s Leibnizovým vynálezom odlíšiť funkciu od argumentu (v našom prípade $\varphi(n)$) a Fregeho vynálezom kvantifikácie častí formule. A to spomíname iba tie najväčšie inovácie, lebo napríklad Leibnizove odlíšenie funkcie od argumentu je zavŕšením dlhého vývoja tiahnúceho sa od Archimeda (niektoré jeho momenty, spojené s Cavalierim a Fermatom, sme spomenuli vyššie). Keď si tieto zlomy uvedomíme, budeme schopní porozumieť ťažkostiam, ktoré matematický formalizmus spôsobuje študentom. Pokiaľ študent nezvládne idey, na ktorých boli príslušné inovácie založené, vypadne mu ohnivko z reťaze, a problémovú situáciu s jej matematickým vyjadrením nedokáže prepojiť.

2 Objektácie ako druhý typ zmeny vo vývine matematiky

Výklad re-prezentácií v dejinách matematiky sme založili na Fregeho interpretácii vývinu aritmetiky ako postupného narastania všeobecnosti jazyka. Frege identifikoval ako základné udalosti v dejinách matematiky vznik aritmetiky používajúcej *konštantné* symboly, zavedenie *premennej* v algebre, zavedenie *symbolov pre označenie funkcií* v analýze až nakoniec zavedenie *symbolov pre funkcie vyšších rádov* v logike. Keď sme tento opis vývinu symbolického jazyka doplnili o analogický opis vývinu jazyka geometrie a tieto dve historické línie sme navzájom spojili, získali sme obraz prvého typu zmien vo vývine matematiky. Pritom je dôležité si uvedomiť, že spojenie aritmetiky s geometriou je v rozpore s Fregeho intenciami. Frege zastával v oblasti aritmetiky logicistický program a súdy aritmetiky považoval za analytické, kým v oblasti geometrie sa pridŕžal Kantovej filozofie a geometrické tvrdenia považoval za syntetické. Preto snaha zasadiť symbolické a ikonické jazyky do jednotného rámca by mu asi pripadala ako pomýlená. Domnievame sa však, že súvislosti medzi symbolickými a ikonickými jazykmi, ktoré naše analýzy odkryli, ospravedlňujú tento krok.

Je zaujímavé, že aj pre objektácie, ktoré predstavujú náplň tejto kapitoly, možno nájsť teoretický rámec pre ich opis. Týmto rámcom je Wittgensteinova obrazová teória významu z *Traktátu* (Wittgenstein 1921). Ale podobne ako od Fregeho, aj od Wittgensteina si vypožičiame iba niekoľko momentov, kým celkovú intenciu Wittgensteinovej teórie budeme nútení ignorovať. U Fregeho sme museli ignorovať oddeľovanie symbolických a ikonických jazykov; až keď sme to urobili, otvoril sa jednotný pohľad na re-prezentácie v matematike. U Wittgensteinovej obrazovej teórie významu budeme nútení odmietnuť predstavu o existencii jedinej nemennej formy zobrazenia; keď to urobíme a prijmeme predstavu, že jazyk geometrie alebo jazyk algebry postupne prechádzajú rôznymi vývinovými štádiami, ktoré sa navzájom odlišujú svojou formou zobrazenia, otvorí sa možnosť použiť obrazovú teóriu významu ako nástroj na analýzu sémantickým posunov v dejinách týchto disciplín.

Dielo raného Wittgensteina sa zakladalo na dvoch tézach. Prvou bolo presvedčenie, že jazyk je obraz, a tak popri jeho gramatickej štruktúre existuje v jazyku ďalšia, od gramatickej nezávislá štruktúra, ktorú nazval ***forma zobrazenia***. Druhou tézou bolo presvedčenie, že táto forma je jediná, a teda ak si určitý systém nárokuje byť jazykom, musí mať formu zobrazenia, opísanú v *Traktáte*. Neskôr Wittgenstein opustil pozíciu svojho *Traktátu* a na opis fungovania jazyka zaviedol pojem jazykových hier. Pre opustenie traktátovských pozícií mal dobré dôvody a tento jeho krok nechcem spochybňovať. Domnievam sa však, že vo svojom traktátovskom období mal Wittgenstein omnoho bližšie k matematike ako v neskorších obdobiach. *Traktát* obsahuje rad cenných postrehov, ktoré je možné použiť pri rekonštrukcii vývinu jazyka matematiky. Za týmto účelom stačí obrazovú teóriu významu, na ktorej je *Traktát* založený, zbaviť tézy o existencii jedinej formy zobrazenia a pripustiť vývin tejto formy. To čo bude nasledovať si nekladie za cieľ rekonštruovať historického Wittgensteina. Podobne ako v prípade Fregeho v predošlej kapitole, aj teraz nám ide o použitie vybraných aspektov *Traktátu* ako interpretačného nástroja, ktorý umožňuje rekonštruovať vývin rôznych matematických disciplín. Zdá sa, že mnohým aspektom v dejinách geometrie alebo algebry možno porozumieť, ak sa pokúsime dejiny geometrie či algebry interpretovať ako vývin formy zobrazenia. Za týmto účelom však musíme zmeniť traktátovské chápanie jazyka (ako aj terminológiu), a prijať dve východiskové tézy:

> ***1. Téza existencie formy jazyka***[19] *ako štruktúry, ktorá zahŕňa všetko to, čo sa v jazyku nedá explicitne vyjadriť, ale sa iba* ukazuje.
> ***2. Téza plurality foriem jazyka****, podľa ktorej je jazyk v každom okamihu svojho vývinu založený na jedinej forme, ale tá sa môže časom meniť.*

Som presvedčený, že pojem formy jazyka je dôležitý pre porozumenie dejinám matematiky. Naznačuje totiž, že okrem toho čo sa v určitom jazyku dá explicitne vyjadriť (a čo si na matematike historici doteraz všímali), existuje aj ďalšia zložka jazyka, zahŕňajúca to, čo sa v jazyku dá iba ukázať. Zdá sa, že v dejinách matematiky hrá často práve táto implicitná zložka významnú úlohu, ktorá však doteraz nebola podrobnejšie analyzovaná, lebo chýbal nástroj na jej skúmanie. Obrazová teória významu tak môže pomôcť upriamiť pozornosť historikov matematiky na skúmanie implicitného aspektu jej jazyka. Keď navyše pripustíme pluralitu foriem jazyka, vzniká možnosť ***formu jazyka*** J_1, ktorá sa v samotnom jazyku J_1 nedá vyjadriť, ***vyjadriť v jazyku*** J_2. Takto jazyk J_2 poskytuje presný a účinný nástroj na opis formy jazyka J_1, čím sa úloha rekonštrukcie vývinu formy jazyka stáva dobre definovaným problémom.

Ukazuje sa, že explicitné vyjadrenie formy jazyka J_1 prostriedkami jazyka J_2 sa v dejinách geometrie odohralo niekoľkokrát. Zdá sa, že tak možno opísať to, čo Beltrami urobil s formou jazyka Lobačevského teórie, Klein s formou jazyka Cayleyho teórie či Poincaré s formou jazyka Riemannnovej teórie. Preto si tento jav určite zaslúži podrobnejšiu analýzu. Navyše tým, že sa forma jazyka J_1 explicitne vyjadrí v jazyku J_2, otvára sa priestor pre ***vynorenie sa novej formy jazyka***. Keď zbavíme obrazovú teóriu významu tézy o existencii jedinej formy jazyka, dostaneme tak nástroj, umožňujúci opísať dynamiku vývinu matematických teórií. Vývin spočíva v tom, že to, čo je na určitom štádiu implicitné, sa v nasledujúcom štádiu explicitne zabuduje do jazyka. Tým sa otvára priestor pre vynorenie sa novej implicitnej formy, a celý proces môže začať od začiatku.[20]

Užitočnosť pojmu formy jazyka pre epistemológiu sa zakladá na dvoch aspektoch. Jednak je tento pojem úzko spojený s pojmom subjektu (*Traktát* 5.632) a tak umožňuje opísať procesy ako je prechod medzi rôznymi jazykmi a porozumenie jazyka bez toho, aby sme museli zvonka zavádzať subjekt v tvare ideálneho vedca či vedeckého spoločenstva. Pojem subjektu netreba zavádzať zvonka (ako Kuhn zo sociológie či Piaget z psychológie), lebo vo forme jazyka je už subjekt prítomný. Na druhej strane sa forma jazyka (charakter subjektu, hranice sveta, pozadia) jasne odlišuje od logickej štruktúry jazyka (charakteru vyplývania, kvantifikácie, premenných) a preto zmeny formy jazyka o vývine určitej teórie nenarúšajú jej logickú konzistentnosť.

Predmetom tejto časti knihy bude opis zmien, ktoré sa udiali v syntetickej geometrii na ceste k neeuklidovským geometriám. Túto vývinovú líniu budeme sledovať až po vznik Hilbertovho axiomatického systému. Na výklad dejín syntetickej geometrie nadviažeme výkladom dejín algebry, ktorého osnovou bude problematika riešenia algebraických rovníc vedúca ku Galoisovej teórii. V závere kapitoly porovnáme vývoj geometrie s vývinom algebry a pokúsime sa získať porozumenie pre uvedený druh lingvistických inovácií, ktoré označujeme termínom *objektácie*.

2. 1. A Historický opis objektácií v geometrii

Objav neeuklidovských geometrií je jedným z najčastejšie diskutovaných objavov v dejinách matematiky. Niektorí autori sú presvedčení, že určité aspekty neeuklidovskej geometrie boli známe už v antike. Podľa ich názoru komplikovaný tvar aký Euklides dal svojmu piatemu postulátu, bol výsledkom diskusií alternatívnych geometrických systémov, ktoré sú dnes stratené (pozri Tóth 1977). Prevažná väčšina historikov však kladie zrod neeuklidovských geometrií na prelom 18. a 19. storočia (Bonola 1906, Kagan 1949, Kline 1972, Rozenfeľd 1976, Gray 1979, Boi, Flament a Salanskis 1992, Boi 1995, Vopěnka 1995). Ale či už do 19. storočia položíme objav neeuklidovských geometrií alebo ich znovuobjavenie, faktom je, že od 4. storočia n. l., kedy Proklos vyslovil pochybnosti ohľadom Euklidovho piateho postulátu, po začiatok 19. storočia, kedy Gauss, Bolyai, Lobačevskij, Taurinus a Schweikart vytvorili systémy neeuklidovskej geometrie, uplynula ***príliš dlhá doba***. Pôsobí to dojmom, akoby niečo bránilo matematikom vstúpiť do neeuklidovského sveta, ako keby existovala určitá hrádza, ktorá sa na začiatku 19. storočia prelomila a otvorila cestu novej geometrii. Príliš dlhá doba, ktorá oddeľuje problém od jeho vyriešenia nie je však jedinou zvláštnosťou tohto objavu. Pozoruhodná je aj ***vysoká miera paralelnosti objavu***, teda skutočnosť, že po pätnástich storočiach neúspešných pokusov zrazu, v priebehu niekoľkých desaťročí päť matematikov dospeje nezávisle od seba k rovnakým výsledkom. Významný ruský matematik Igor Šafarevič sformuloval túto zvláštnosť vo svojej prednáške „*O niektorých tendenciách rozvoja matematiky*“:

> „*Po tom ako Lobačevskij a Bolyai nezávisle od seba položili základy neeuklidovskej geometrie, sa ukázalo, že dvaja matematici - Gauss a Schweikart o viac než 10 rokov skôr, tiež nezávisle od seba prišli s tým istým riešením. Človeka ovládne zvláštny pocit, keď vidí tie isté obrázky, akoby nakreslené tou istou rukou, v prácach štyroch učencov, ktorí pracovali úplne nezávisle* (Šafarevič 1991, s. 550).“

Vznik neeuklidovských geometrií sa pokúsime vyložiť ako dôsledok postupnosti lingvistických inovácií. Sústredíme sa teda nielen na obsah, na to, čo matematici ako Lobačevskij či Bolyai objavili, ale pokúsime sa analyzovať prostriedky, pomocou ktorých svoje myšlienky vyjadrili. Analýza lingvistických inovácií, ktoré sprevádzali zrod neeuklidovských geometrií umožní vrhnúť svetlo na pozoruhodné aspekty, ktoré objav neeuklidovských geometrií so sebou nesie.

Existenciu „*neeuklidovských systémov pred Euklidom*“, o ktorej píše Tóth, bude možné vysvetliť tak, že pokiaľ sa nestabilizoval jazykový rámec, tvoriaci základ Euklidovho systému, bol možný rad úvah a argumentov, ktoré sú s týmto jazykovým rámcom v rozpore. Sformovanie a všeobecné prijatie Euklidovho systému tieto úvahy a argumenty vytlačilo ako nekonzistentné alebo dokonca ako nezrozumiteľné. Dejiny matematiky teda nepovažujeme za jednoduchý kumulatívny proces hromadenia poznatkov. Keď pozornosť sústredíme na analýzu jazykových prostriedkov pomocou ktorých sú matematické poznatky formulované, je možné ukázať, že presadenie sa určitého jazykového rámca umožňuje síce určité poznatky presnejšie a ľahšie vyjadriť, ale súčasne zamedzuje formuláciám iných poznatkov, ktoré sa začnú považovať za nekonzistentné, teda nedosahujúce štandardy presnosti nového rámca. Typický príklad takéhoto odsunutia matematických poznatkov predstavuje odstránenie nekonečne malých veličín po zrode ε-δ analýzy. Je možné, že „zabudnutie“ neeuklidovských systémov, ktoré existovali pred Euklidom, bolo ďalším príkladom tohto fenoménu.

„*Dlhú dobu*“, ktorá prebehla od vyslovenia pochybností o Euklidovom piatom postuláte po objav prvých neeuklidovských geometrií možno vyložiť ako dôsledok skutočnosti, že jazyk, v ktorom je možné konzistentne sformulovať neeuklidovskú geometriu, oddeľuje od Euklidovho systému nie jedna, ale celý rad na seba nadväzujúcich lingvistických inovácií. V tejto kapitole opíšeme aspoň najdôležitejšie z nich. Sme presvedčení, že k tomu, aby bolo možné vytvoriť systém neeuklidovskej geometrie, je potrebné do geometrie priniesť prinajmenšom pojem ***priestoru***, pojem ***premietania*** a aspoň implicitný pojem ***modelu***. To všetko sú nástroje, ktoré Lobačevskij pri konštrukcii svojho systému používa, ale ktoré by sme márne hľadali u Euklida. Euklidova geometria neobsahuje pojem priestoru; Euklides hovorí vždy iba o objektoch, a nie o prázdne, ktoré tieto objekty obklopuje (Kvasz 2004). Pre neeuklidovskú geometriu je však pojem priestoru dôležitý, lebo najjednoduchší spôsob, ako si predstaviť neeuklidovskú geometriu, je predstaviť si ju ako geometriu neeuklidovského priestoru. Podobne Euklides vo svojej geometrii nemá pojem premietania. Rozhodujúcim krokom Lobačevského pri budovaní svojho systému však bolo premietnutie neeuklidovskej roviny na plochu, ktorú nazval orosférou a na ktorej vytvoril model euklidovskej roviny. Zavedenie pojmu priestoru, premietania a modelu do geometrie sa neodohralo naraz. Trvalo to dlhé storočia, pokiaľ sa vytvorili jazykové rámce, ktoré umožnili konzistentne hovoriť o priestore alebo o zobrazeniach. Doba potrebná na vybudovanie týchto jazykových rámcov musela uplynúť prv, než mohlo dôjsť k objavu neeuklidovských geometrií.

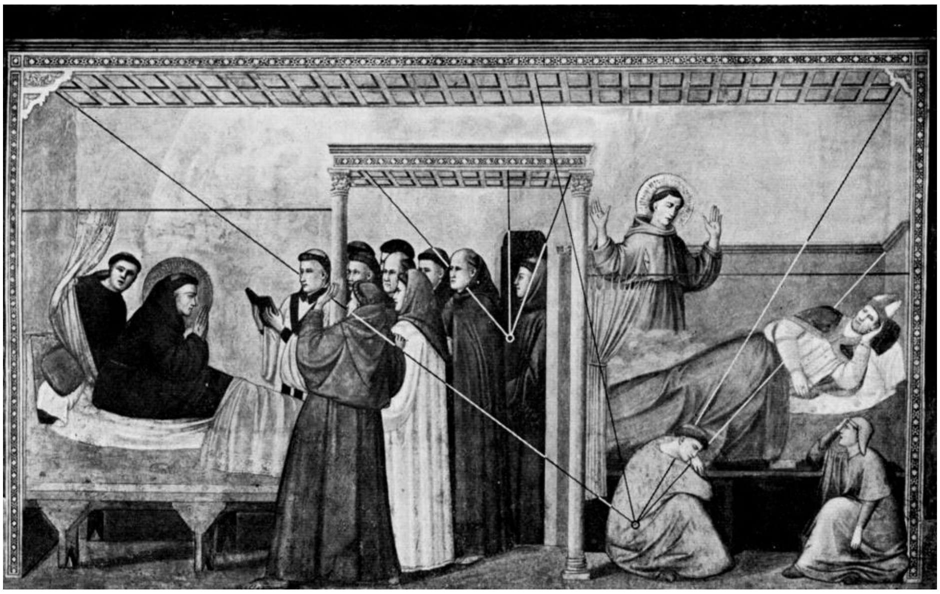
Problém predložený Šafarevičom sa pokúsime vysvetliť tak, že ruku spomenutých matematikov „viedla“ spoločná forma jazyka. Sme presvedčení, že Bolyai, Lobačevskij, Gauss, Taurinus a Schweikart priniesli určitú lingvistickú inováciu, ktorá umožnila konzistentne vyjadriť tvrdenia neeuklidovskej geometrie. Pritom vysoká miera podobnosti obrázkov obsiahnutých v ich dielach je dôsledkom skutočnosti, že jazyk určitej matematickej teórie je vnútorne veľmi silne previazaný, preto lingvistických inovácií, ktoré by neviedli k upadnutiu do logických protirečení je len malý počet. To robí pravdepodobným, že viacerí matematici, pracujúci nezávisle na sebe, urobia rovnakú inováciu, ktorá ich privedie k analogickým výsledkom. Výklad dejín syntetickej geometrie začneme odbočkou do renesančného maliarstva, lebo zdá sa, že práve tam sa zrodil pojem priestoru.

2.1.A.1 Perspektivistická forma jazyka syntetickej geometrie

Jednou z pozoruhodných čŕt antickej matematiky je, že nepoznala pojem priestoru. Najbližšie k tomu, čo dnes označujeme pojmom priestor, je antický pojem prázdna (κενον). Pre antických filozofov, až na atomistov a epikurejcov, bol pojem prázdna problematický. Prázdno je tam, kde nič nie je, a teda vlastne označuje čosi, čo nemá žiadne konkrétne atribúty, ktoré by sme mohli poznávať. A ani atomisti, ktorí existenciu prázdna pripúšťali, nevedeli o ňom veľa povedať. Nech už je to s existenciou prázdna akokoľvek, prázdno rozhodne nie je čosi, čo by mohlo tvoriť predmet matematiky, ktorá sa vyznačuje práve jasnosťou a určitosťou objektov, ktoré skúma. Pojem priestoru sa ani nezrodil v matematike, ale v maliarstve.

a. Implicitný variant perspektivistickej formy - Giotto

Keď porovnáme renesančné obrazy s obrazmi predošlého obdobia, zistíme, že gotickým obrazom chýba hĺbka. Jednotlivé postavy sú poukladané jedna vedľa druhej, dom vedľa domu, hora vedľa hory – bez najmenšej snahy o zachytenie hĺbky priestoru. V literatúre (Bronowski 1985, s. 171) sa možno dočítať, že to bolo v súlade s cieľmi maľovania. Úlohou maliara nebolo maľovať svet taký, aký sa mu javí, ale maľovať ho taký, aký skutočne je. Vzdialené predmety sa nám síce javia menšie, ale oni sa také iba javia, v skutočnosti také nie sú. Preto ich ani netreba menšie maľovať.

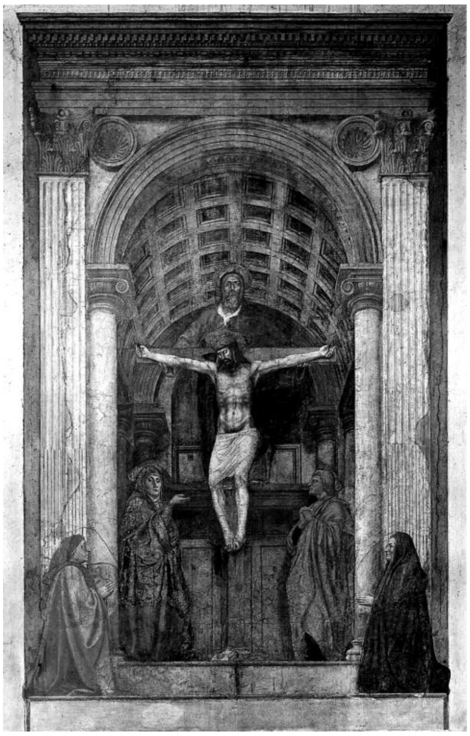


Jedným z prvých maliarov, u ktorého nachádzame snahu zachytiť hĺbku priestoru bol Giotto di Bondone. Vo väčšine kníh o dejinách umenia je jeho dielo radené k stredoveku, a nemožno popierať, že námetmi a ikonografiou do stredovekého umenia patrí. Na druhej strane možno v ňom nájsť prvky, ktoré sú typické pre renesanciu. Ide predovšetkým o geometrické aspekty jeho obrazov, v ktorých je badateľná snaha zachytiť rozmiestnenie objektov v priestore. Ako prvú ilustráciu si dovolíme uviesť Giottovu fresku *Zjavenie bratovi Augustínovi a biskupovi* (okolo 1325), ktorá sa nachádza v kostole Santa Croce vo Florencii (Kadeřávek 1922, príloha V). Ako vidno z pomocných čiar doplnených F. Kadeřávkom, Giotto už vedel, že na vyvolanie ilúzie rovnobežných čiar treba namaľovať čiary, zbiehajúce sa k spoločnému úbežníku. Na druhej strane však úbežník priamok prislúchajúcich miestnosti ako celku a úbežník priamok prislúchajúcich baldachýnu, sú rôzne. Zdá sa preto, že obraz má dva hlavné body (t.j. úbežníky priamok idúcich do hĺbky) a aj dva horizonty. U Giotta je teda perspektíva „lokálna", rôzne prvky sú zakreslené v rôznych pohľadoch.

Ďalší obraz, na ktorom možno ilustrovať postupné objavovanie princípov perspektívy je od Ambrogia Lorenzettiho a má názov *Zvestovanie* (1344). Z geometrického hľadiska je na obraze zaujímavá dlažba, pomocou ktorej Lorenzetti vyvoláva ilúziu hĺbky priestoru.

Bočné hrany dlaždíc sa zbiehajú do jediného bodu, ktorý je súčasne aj hlavným bodom obrazu. To je v súlade s geometrickými princípmi. Keď si však do siete dlaždíc zakreslíme uhlopriečky (pozri Kadeřávek 1922, príloha VII), zistíme, že tieto tvoria krivku. Z geometrického hľadiska je to nesprávne, lebo v skutočnosti je diagonálou priamka, a pri stredovom premietaní sa táto musí zobraziť opäť na priamku. Preto čiara tvorená uhlopriečkami dlaždíc na obraze by mala byť priamkou. Otázka, ako správne zobraziť dlažbu predstavovala vážny problém. Lorenzetti vedel, že dlaždice na obraze sa musia postupne zmenšovať, ale nevedel podľa akého pravidla.

b. Explicitný variant perspektivistickej formy - Masaccio



Jednou z prvých malieb, ktorej priestorová štruktúra bola geometricky konštruovaná je freska *Najsvätejšia trojica* (1427) vo florentskom chráme Santa Maria Novella. Jej autorom bol Masaccio. Princípy perspektívy, ktoré boli u Giotta či Lorenzettiho iba intuitívne, Masaccio pozná a exaktne aplikuje. Možno preto povedať, že perspektivistická forma sa tu stáva plne explicitnou.

Renesančný maliar si kládol za cieľ maľovať svet tak, ako sa mu javí, maľovať ho z ľudského ***hľadiska***. Chcel, aby pohľad na obraz vyvolal v divákovi rovnaký dojem, ako pohľad na predmet, ktorý obraz znázorňoval, teda okrem iného aby vyvolal ilúziu hĺbky.[21] Na dosiahnutie tohto cieľa slúžili tri princípy perspektívy: *perspektíva rozmerov* (vzdialenejšie predmety treba maľovať menšie), *perspektíva farieb* (vzdialenejšie predmety treba maľovať matnejšími farbami) a *perspektíva obrysov* (vzdialenejšie predmety treba maľovať s mäkšími obrysmi). Prvý princíp sa viaže k vlastnostiam priestoru, zvyšné dva sú spôsobené absorpciou svetla vo vzduchu. Všetky tri možno zreteľne vidieť na obrazoch prístavov, miest alebo krajiny.

Renesancia prináša nový prvok aj ohľadne ***situovanosti*** predmetov na obraze. V gotickom maliarstve je veľkosť postavy úmerná jej významu. Najdôležitejšia osoba je najväčšia a na obraze zaujíma centrálne postavenie. Ostatné postavy sú naukladané okolo centrálnej postavy. Zobrazenie jednotlivých prvkov teda vyjadruje hierarchickú situovanosť. Naproti tomu renesančné maliarstvo, aj keď zachováva významné miesto pre centrálnu osobu, ostatné prvky už zobrazuje tak, ako sú voči tejto ústrednej postave situované v priestore. Preto ich umiestnenie na obraze je dané nielen ich významom, ale aj ich polohou v priestore. Usporiadanie prvkov obrazu tak zachytáva aj priestorovú situovanosť. Pri snahe zachytiť priestorovú situovanosť predmetov sa na obraze objaví zvláštna čiara – horizont. Vlastne ono to ani nie je skutočná čiara. Maliar ju nesmie vytvoriť ťahom štetca. Horizont sa nesmie namaľovať, ale napriek tomu sa na obraze ukáže. Podľa vety 2.172 Wittgensteinovho *Traktátu* („*Ale obraz nemôže zobraziť svoju formu zobrazenia; obraz ju ukazuje.*“) patrí teda k forme zobrazenia. Horizont zodpovedá hranici sveta zobrazeného obrazom a teda, podľa vety 5.632 („*Subjekt nepatrí k svetu, ale je hranicou sveta.*“) prislúcha k subjektu. Takto sa vlastne na obraze popri výrazoch ikonického jazyka, vyjadrujúcich určité predmety, objavujú aj výrazy viažuce sa nie k objektom, ale k subjektu, ktorý je nositeľom jazyka.

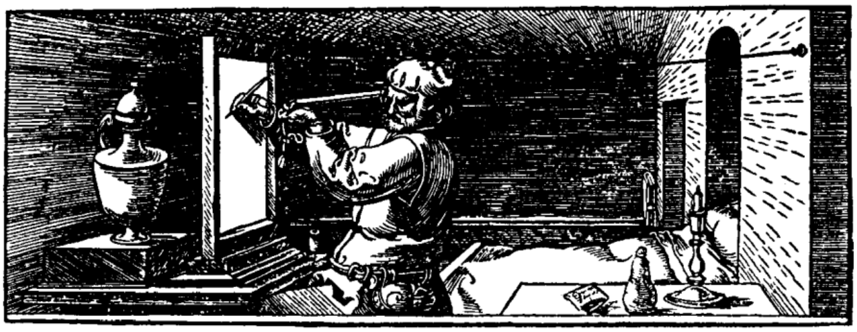
2.1.A.2 Projektívna forma jazyka syntetickej geometrie

Konštrukcia perspektívy je náročná, preto sa viacerí maliari pokúšali explicitne sformulovať princípy perspektívy. Jednou z prvých teoretických prác o perspektíve bol traktát *Della Pittura* od Leona Battistu Albertiho. Podobné spisy napísali v priebehu 15. a 16. storočia viacerí maliari, medzi nimi aj Albrecht Dürer. V týchto spisoch môžeme nájsť pozoruhodnú inováciu. Keď sa maliari pokúšali znázorniť ako vzniká perspektivistický obraz, vytvorili ***reprezentáciu reprezentácie***. Používanie reprezentácie reprezentácie je charakteristickou črtou novej formy jazyka, ktorú nazývam projektívna forma. Projektívna forma tak zásadne mení spôsob konštrukcie obrazu. Hlavným výdobytkom perspektívy bolo verné zobrazenie námetu z určitého hľadiska. Samotné hľadisko však zobrazené nebolo. Bol to bod z ktorého sa treba na obraz pozerať, a ako taký ostal obrazom nezachytený. Projektívna forma prináša zásadnú zmenu vo vzťahu k hľadisku, keď ho na obraze explicitne zobrazí. Explicitné ***zobrazenie hľadiska*** prináša možnosť prechodu od jednej perspektívy k inej. Projektívna forma prináša pravidlá, pomocou ktorých možno situáciu, ktorá je reprezentovaná v určitom pohľade, zobraziť z iného pohľadu. Zmena perspektívy sa deje pomocou stredového premietania, pričom stred premietania je explicitne zobrazeným hľadiskom, spomenutým vyššie. Tretím aspektom projektívnej formy je zavedenie ***sprostredkovanej referencie***, alebo nahradenie skutočnosti jej obrazom. Z epistemologického hľadiska je to dôležitý krok, ktorý má paralelu v modernej logike u Fregeho. Frege v *Základoch aritmetiky* nahradil otázku *Čo je číslo?* otázkou *Kedy majú dva súbory rovnakú mohutnosť?* Namiesto otázky o referencii výrazu kladie teda otázku o ekvivalencii dvoch výrazov. A táto idea sa po prvý raz objavila v geometrii u Desargua. Posledným, štvrtým aspektom projektívnej formy jazyka je zavedenie ***ideálnych objektov***. Na mysli mám nekonečne vzdialené body, body v ktorých sa „pretínajú rovnobežky“. Ich zavedenie je nevyhnutné aby sa stredové premietanie stalo bijektívnym zobrazením, teda aby premietania bolo možné skladať.

Uvedené lingvistické inovácie, ktoré spoločne viedli k vzniku novej formy jazyka, umožnili Desarguovi vypracovať prvú konzistentnú teóriu nekonečna. Vďaka *reprezentácie reprezentácie*, *vyjadrenia hľadiska v jazyku*, *sprostredkovanej referencie* a *ideálnych objektov* sa jazyk do tej miery obohatil, že umožnil vyjadriť skutočnosti, ktoré boli dovtedy nevyjadriteľné. Z nekonečna, ktoré bolo v antike považované za čosi neuchopiteľné, a v stredoveku za niečo, čo presahuje možnosti ľudského rozumu, sa stáva predmet matematického skúmania. Je to dôležité, lebo neeuklidovské geometrie sa od euklidovskej odlišujú práve tým, ako sa priamky „správajú v nekonečne“. Preto vytvorenie jazyka schopného reprezentovať nekonečno bolo krokom prvoradého významu na ceste k týmto geometriám.

a. Implicitný variant projektívnej formy - Dürer

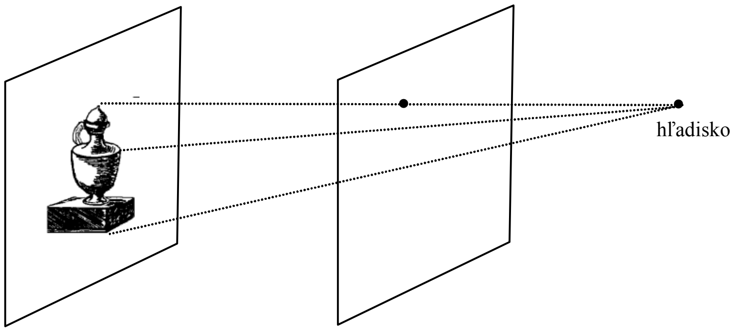
Albrecht Dürer na viacerých grafikách zobrazil maliara, ktorý pomocou rôznych trikov v vytvára perspektivistický obraz. Aby sme pochopili v čom zobrazovanie v projektívnej geometrii prekračuje svet perspektívneho maľovania, zastavme sa pri jednej z týchto grafík a skúsme sa vžiť do úlohy maliara.



Predstavme si, že chceme namaľovať určitý predmet tak, aby jeho obraz vyvolal v divákovi rovnaký dojem, ako pohľad na originál. Zoberme dokonale priehľadnú fóliu, napnime ju na rám a umiestnime ju medzi oko a predmet. Začneme na fóliu nanášať farbu, bod za bodom, nasledovným postupom. Zvolíme si nejaký bod predmetu (nech je pre určitosť hnedej farby). Namiešajme si úplne rovnaký odtieň a nanesme ho na ten bod fólie, kde lúč, vedený z uvažovaného bodu predmetu do oka, pretne fóliu. Keď sme namiešali úplne rovnaký odtieň, nanesenie farby na fóliu by sme si nemali ani všimnúť. Po určitom čase strávenom takýmto bodkovaním vznikne na fólii obraz, ktorý v nás vyvoláva absolútne rovnaký dojem ako originálny predmet. Analogickým spôsobom objavovali renesanční maliari princípy perspektívneho maľovania. Zistili, že ak chcú v divákovi vyvolať ilúziu dvoch rovnobežných čiar, musia na plátno namaľovať dve zbiehajúce sa úsečky. Zistili to, ale nevedeli, prečo je to tak. Presnú odpoveď na túto otázku dala až projektívna geometria.

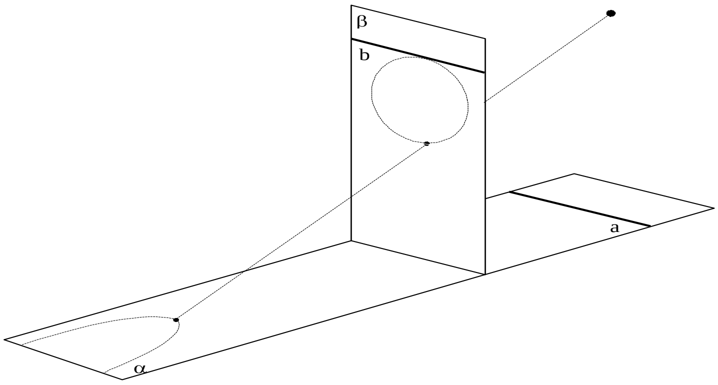
b. Explicitný variant projektívnej formy - Desargues

Gérard Desargues, zakladateľ projektívnej geometrie, vniesol jasno do otázky perspektívy pomocou geniálnej myšlienky. ***Nahradil skutočnosť obrazom***. Kým maliari formulovali problém perspektívy ako problém vzťahu obrazu ku skutočnosti, Desargues prišiel na to, že skutočnosť možno vynechať. Perspektíve možno porozumieť ako vzťahu dvoch obrazov. Predstavme si, že už máme obraz, na ktorom je nejaký predmet, napríklad krčah, zobrazený tak verne, že pohľad na obraz vyvoláva rovnaký dojem ako pohľad na skutočný predmet. Predstavme si ďalej maliara, ktorý chce namaľovať obraz krčaha. V nestráženom okamihu nahraďme krčah jeho obrazom. Ak je obraz verný, maliar by si nič nemal všimnúť a mal by sa pustiť do maľovania obrazu obrazu krčaha.

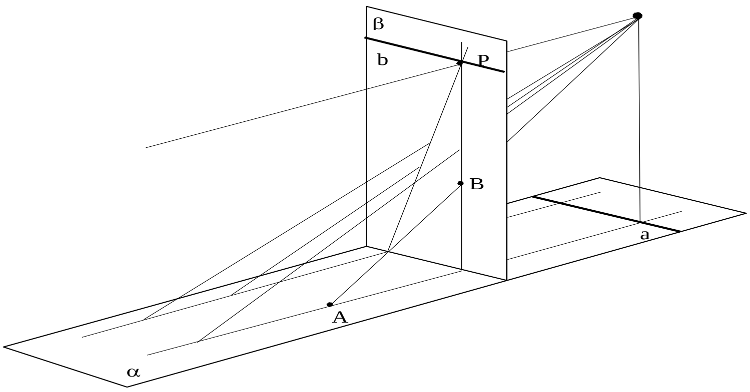


Výhoda, ktorú Desarguova idea prináša je, že namiesto vzťahu trojrozmerného predmetu a dvojrozmerného obrazu máme do činenia so vzťahom medzi dvoma dvojrozmernými obrazmi. Procedúra s priehľadnou fóliou sa tak stáva stredovým premietaním. Základom perspektívneho maľovania je teda stredové premietanie vzoru na obraz.

Prv, než sa pustíme do skúmania toho, ako sa menia jednotlivé rovinné útvary pri stredovom premietaní, treba objasniť, čo sa deje s rovinou ako celkom. Nie je ťažké nahliadnuť, že s výnimkou, keď sú obe roviny rovnobežné, priemetom jednej roviny nie je celá druhá rovina. Na prvej rovine (rovine α, z ktorej premietame) existuje priamka *a* tvorená bodmi, ktoré nemáme kam zobraziť. Na druhej rovine (rovine β, na ktorú premietame) existuje priamka *b*, na ktorú sa nič nezobrazí. Kvôli tomu, aby stredové premietanie bolo vôbec zobrazením, musel Desargues doplniť obe roviny o nekonečne vzdialené body. Potom priamku *a* tvoria tie body roviny α, ktoré sa zobrazia na nekonečne vzdialené body roviny β. Naopak, priamka *b* je tvorená tými bodmi roviny β, na ktoré sa zobrazia nekonečne vzdialené body roviny α (Courant a Robbins 1941, Kap. IV. §4.). Pridaním nekonečne vzdialených bodov k rovine sa premietanie stáva bijektívnym zobrazením. Desargues takto vytvoril nástroj na skúmanie nekonečna. Idea je prostá. Stredové premietanie premietne nekonečne vzdialené body roviny α na priamku *b* roviny β. Preto keď chceme zistiť, čo sa deje v nekonečne s nejakou krivkou, napríklad s parabolou, tak si ju nakreslíme na rovinu α a premietneme ju na rovinu β.



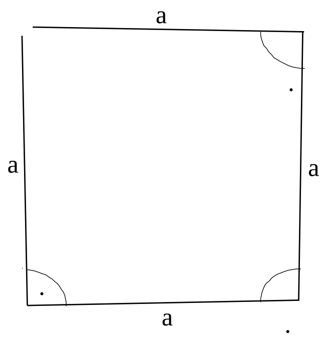
Čo zistíme je, že parabola sa nekonečne vzdialenej priamky dotýka. V tom sa líši od hyperboly, ktorá túto priamku pretína. Keď si na rovine α nakreslíme dve rovnobežky, zistíme, že ich obrazy na rovine β sa budú pretínať v bode priamky *b*. Z toho môžeme usúdiť, že rovnobežky sa v nekonečne pretínajú, pričom priesečník P ich obrazov (na rovine β) je obrazom ich priesečníka v nekonečne.



Z toho môžeme usúdiť, že rovnobežky sa v nekonečne pretínajú, pričom priesečník P ich obrazov (na rovine β) je obrazom ich priesečníka v nekonečne. To znamená, že keď renesanční maliari znázorňovali na svojich obrazoch rovnobežky pomocou pretínajúcich sa čiar, nedopúšťali sa omylu. Rovnobežky sa skutočne pretínajú, iba ich priesečník leží v nekonečne. Desargues vytvoril metódu, umožňujúcu nekonečne vzdialené body znázorniť, a tým v jazyku *vyjadriť* správanie sa rovnobežiek v nekonečne. Desargues tak našiel spôsob, ako dať termínu nekonečno jasný a jednoznačný zmysel.

Desarguova idea nahradiť skutočnosť jej obrazom umožňuje skúmať zákonitosti transformácií roviny, na ktorej sú umiestnené jednotlivé útvary, oddelene od samotných útvarov. Ide o zákonitosti zobrazovania „prázdneho plátna“. To, ako sa správa táto rovina pri premietaní, podmieňuje správanie sa každého jedného útvaru umiestneného na nej. Práve tieto zákonitosti transformácie roviny si vynucujú, že sa obrazy rovnobežiek musia pretťať. Nie je to individuálna vlastnosť rovnobežiek, ale vlastnosť roviny ako celku. Geometria roviny podmieňuje správanie útvarov a vytvára ***pozadie***, ktoré toto správanie konštituuje. Euklidovská geometria sa zaoberala trojuholníkmi, kružnicami,..., ale tieto útvary boli akoby umiestnené v prázdnote, o ktorej geometria nič nehovorila. V projektívnej geometrii je už trojuholník situovaný na konkrétnej rovine a pri premietaní roviny sa premieta spolu s ňou. Mnohé z toho, čo sa deje s trojuholníkom pri premietaní, je podmienené jeho polohou na rovine. Ak trojuholník nepretína priamku *a*, jeho obrazom je opäť trojuholník. Ak ju pretína, jeho obrazom bude čosi zložitejšie. Projektívna geometria teda už neskúma len samotné objekty, ako to robila geometria euklidovská, ale tematizuje aj pozadie, na ktorom sú objekty situované.

Domnievame sa, že netematizovanosť pozadia bola jednou z príčin, kvôli ktorej bolo treba tak dlho čakať na neeuklidovskú geometriu. Kým pozadie nie je prítomné v jazyku, je ťažké rozmýšľať inak, než euklidovsky. Problém je v tom, že napríklad *neeuklidovský trojuholník* má byť jednak *trojuholník* (t.j. niečo, čo poznáme od Euklida), ale na druhej strane má byť *neeuklidovský* (t.j. iný, než na aký sme zvyknutí). Čo je to, čo robí trojuholník trojuholníkom, a teda musí byť zachované aj v neeuklidovskej geometrii, a čo je na trojuholníku podmienené jeho euklidovskosťou? Táto otázka ostro vystúpi v prípade neeuklidovského štvorca, ktorý jednoducho neexistuje. Tematizácia pozadia umožňuje pripísať euklidovskosť či neeuklidovskosť práve pozadiu. O neeuklidovskej geometrii sa najľahšie uvažuje ako o geometrii neeuklidovskej roviny. V popredí, kde robíme konštrukcie, postupujeme normálne, ako keby sme konštruovali štvorec. Až geometria roviny spôsobí, že konštrukcia nevyjde (t.j. konce prvej a štvrtej strany „štvorca“ sa nestretnú).



Na obrázkoch projektívnej geometrie existuje význačný bod – ***stred premietania***. Stred premietania je bodom, z hľadiska ktorého vyvolávajú vzor i obraz rovnaký dojem a reprezentuje oko maliara z Dürerovej rytiny uvedenej vyššie. Okrem bodu reprezentujúceho hľadisko, sa na rovine tvoriacej pozadie, na ktorom sú situované geometrické útvary, nachádza význačná priamka a. Táto priamka sa nazýva ***úbežnica*** a je zodpovedná za mnohé zvláštnosti, ktoré sa s útvarmi dejú pri premietaní. Jej poloha na rovine α je určená stredom premietania, ktorý zodpovedá oku diváka. Teda priamka a predstavuje horizont. Je však dôležité uvedomiť si zásadný rozdiel oproti perspektivistickému maliarstvu. V projektívnej geometrii je úbežnica priamkou, a je teda súčasťou jazyka. Nie je to niečo, čo sa v jazyku len ukazuje. Desargues nakreslil horizont, spravil z neho čiaru.[22] S niečím takým ako stred premietania, či úbežnica sme sa v euklidovskej geometrii nestretli. Euklidovská rovina je homogénna, všetky jej body a priamky sú ekvivalentné. Takto namiesto euklidovského videnia odnikadiaľ, či perspektivistického prizerania sa, sa hľadisko explicitne zabudováva do jazyka teórie. Prítomné je vo forme stredu premietania a vo forme horizontu, ktorý prislúcha k tomuto stredu.

Explicitná prítomnosť hľadiska v jazyku umožnila zásadný posun v skúmaní geometrických transformácií, posun, ktorý radikálne zmenil charakter samotnej geometrie. Z náuky o tvare, čím bola v časoch Euklida, sa geometria postupne premenila na štúdium invariantov grúp transformácií, ako ju definoval Felix Klein. Nemožno povedať, že by euklidovská geometria nepoznala pojem zobrazenia. Euklides používal otáčania, posunutia či osové súmernosti. Ale keďže nemal v jazyku vyjadrené hľadisko, mohol definovať iba málo transformácií. Definovať transformáciu znamená povedať, čo sa pri nej mení, a čo naopak ostáva nezmenené. Euklidove definície museli byť situačne neutrálne. To, čo sa pri transformácii mení a čo nie, muselo byť rovnaké pre všetky hľadiská. Preto Euklidom definované transformácie museli zachovávať tvar. Desargues tým, že v jazyku explicitne vyjadril hľadisko, môže definovať to, čo transformácia mení a čo ponecháva nezmenené vzhľadom k jedinému bodu. Presne tak je definovaná projektívna ekvivalencia dvoch útvarov. Dva útvary sú projektívne ekvivalentné, ak existuje hľadisko, z ktorého vyzerajú rovnako. Takto vďaka explicitnej prítomnosti hľadiska v teórii sa rozšírila množina transformácií, ktoré je teória schopná definovať. Toto rozšírenie bolo dostatočné na to, aby sa naplno prejavila efektívnosť transformácií ako teoretického nástroja a pritiahla pozornosť matematikov k ich systematickému štúdiu.

2.1.A.3 Interpretatívna forma jazyka syntetickej geometrie

Zabudovanie pozadia do jazyka geometrie v podobe roviny či priestoru, ku ktorému došlo v rámci projektívnej formy, umožnilo pokrok aj v problematike piateho Euklidovho postulátu. Prielom v tejto otázke nastal u Karla Friedricha Gaussa, Janosa Bolyaiho a Nikolaja Ivanoviča Lobačevského, ktorí v prvej tretine 19. storočia dospeli k presvedčeniu, že okrem euklidovskej geometrie je možná aj iná geometria, v ktorej neplatí piaty postulát. Viaceré z tvrdení, obsiahnutých v dielach týchto troch matematikov, boli známe už Girolamovi Saccherimu a Johannovi Henrichovi Lambertovi. Avšak aj keď títo matematici objavili mnohé tvrdenia neeuklidovskej geometrie, zotrvali v presvedčení, že jediná možná geometria je geometria Euklidova. Preto by sa mohlo zdať, že prínos Gaussa, Bolyaia a Lobačevského spočíva iba v zmene postoja k týmto tvrdeniam, alebo ako to opisuje Petr Vopěnka, v „*odkrytí novej naladenosti voči neeuklidovskej geometrii*“ (Vopěnka 1995, s. 58). Našou úlohou je objasniť, čo tento nový postoj, túto novú naladenosť umožnilo. V zhode s našim pojatím vývinu geometrie budeme za zmenou postoja voči neeuklidovskej geometrii hľadať lingvistickú inováciu, ktorá by umožnila túto zmenu vysvetliť. Pre Lobačevského takúto rekonštrukciu možno podať. Pritom nás ale nesmie zaujímať Lobačevskij len vo všeobecnej rovine ako jeden z autorov zmeneného postoja k otázke možnosti neeuklidovskej geometrie. Musíme preniknúť k Lobačevskému ako autorovi techniky, umožňujúcej odvodiť trigonometrické formuly neeuklidovskej geometrie. Objav týchto formúl mohol zohrať významnú úlohu pri zmene Lobačevského postoja, a tak umožňuje previesť psychologický fakt zmeny postoja na epistemologický fakt objavu. Lobačevskij nás bude zaujímať ako objaviteľ trigonometrických formúl neeuklidovskej geometrie. Tieto formuly neobjavil náhodou. Kvôli ich odvodeniu zásadným spôsobom zmenil jazyk geometrie. Stručne preto vyložím iba fakty, ktoré sú nevyhnutné pre pochopenie zmeny jazyka, ktorú priniesol Lobačevskij.[23]

a. Implicitný variant interpretatívnej formy - Lobačevskij

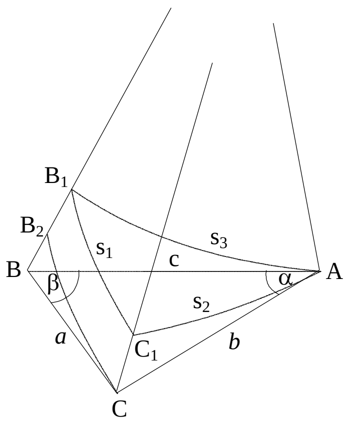
V neeuklidovskej geometrii existujú dva objekty, ktoré sa svojimi vlastnosťami ponášajú na priamku, ale predsa sa od priamky líšia. Sú to ***ekvidištanta*** (množina bodov, ktoré majú od priamky rovnakú vzdialenosť) a ***hraničná čiara*** (množina bodov, ku ktorej sa limitne blíži kružnica, idúca pevným bodom A, keď sa jej stred vzďaľuje po priamke do nekonečna). V euklidovskej geometrii je ekvidištanta aj hraničná čiara tvorená priamkou. V neeuklidovskej geometrii sú to objekty rôzne od priamky. Mnohé chybné dôkazy piateho Euklidovho postulátu sa zakladali na tom, že geometri zostrojili ekvidištantu, ale pokladali ju za priamku. Avšak prehlásiť, že ekvidištanta je priamka znamená inými slovami povedať, že prijímame piaty postulát. Tieto tvrdenia sú totiž ekvivalentné. Preto každý dôkaz založený na stotožnení ekvidištanty s priamkou bol vlastne dôkazom v kruhu.

Analogicky možno vytvoriť ekvidištantu k rovine a hraničnú plochu (zo sféry prechádzajúcej pevným bodom A, ktorej stred sa vzďaľuje po priamke do nekonečna). Na hraničnej ploche ležia hraničné čiary podobne, ako na rovine ležia priamky. Lobačevskij objavil zaujímavú skutočnosť: na hraničnej ploche platí analógia Euklidovho postulátu o rovnobežkách – keď na hraničnej ploche zvolíme hraničnú čiaru p a bod, ktorý na nej neleží, tak existuje práve jedna hraničná čiara prechádzajúca týmto bodom, ktorá nepretne hraničnú čiaru p. To ale znamená, že na hraničnej ploche platí (pre hraničné čiary brané ako priamky) celá euklidovská geometria, vrátane kosínusovej vety:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha) \qquad (8)$$

kde a, b, c sú dĺžky úsekov hraničných čiar, tvoriacich strany príslušného trojuholníka, a α je veľkosť uhla pri vrchole A.

Vzťah (8) platí na hraničnej ploche. Lobačevskij však chcel odvodiť goniometrické formule pre trojuholníky, ktorých strany sú úseky priamok (neeuklidovskej roviny) a nie hraničných čiar.[24] Na to použil obrázok na ktorom je zobrazený rovinný trojuholník ABC, ležiaci v rovine, ktorej sa dotýka hraničná plocha v bode A (Lobačevskij 1829, str. 112):



AB_1C_1 je priemetom trojuholníka ABC na hraničnú plochu. Pre trojuholník AB_1C_1 platí euklidovská geometria, lebo to je trojuholník na hraničnej ploche. To znamená, že pre neho platí aj kosínusová veta, ktorá nadobúda tvar:

$$s_1^2 = s_2^2 + s_3^2 - 2s_2 s_3 \cos\alpha \tag{9}$$

Ide o to tento vzťah preniesť z hraničnej plochy na neeuklidovskú rovinu. Lobačevskému sa podarilo nájsť vzťahy dávajúce do súvisu dĺžky úsečiek roviny s dĺžkami ich priemetov na hraničnú plochu:

$$s_3 = \sigma.\tanh\left(\frac{c}{k}\right), \qquad s_2 = \sigma.\tanh\left(\frac{b}{k}\right), \qquad s_1 = \sigma.\frac{\tanh\left(\frac{a}{k}\right)}{\cosh\left(\frac{b}{k}\right)} \tag{10}$$

V týchto vzťahoch vystupujú konštanty k a σ. Číslo k je polomer krivosti neeuklidovského priestoru a hrá podobnú úlohu ako polomer sféry vo vzorcoch sférickej trigonometrie. Číslo 2σ udáva dĺžku úseku hraničnej čiary, na ktorý sa premietne celá priamka. Funkcie sinh(x), cosh(x) a tanh(x) sú hyperbolický sínus, hyperbolický kosínus a hyperbolický tangens. Pomocou vzťahov (10) možno kosínusovú vetu (9) preniesť z hraničnej plochy na neeuklidovskú rovinu. Stačí do formule (9) za s_1, s_2, s_3 dosadiť vyjadrenia z (10) a po elementárnych úpravách dostaneme:

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = \cosh\left(\frac{b}{k}\right).\cosh\left(\frac{c}{k}\right) - \sinh\left(\frac{b}{k}\right).\sinh\left(\frac{c}{k}\right).\cos(\alpha) \tag{11}$$

Táto formula je pozoruhodná tým, že keď v nej vystupujúce hyperbolické funkcie rozvinieme do radu,[25] tak pri $k \to \infty$ prejde neeuklidovský vzťah (11) v euklidovský vzťah (8). To znamená, že euklidovská geometria je limitným prípadom Lobačevského geometrie pre polomer krivosti rastúci nad všetky medze. V tom sa Lobačevského geometria podobá sférickej, ktorá tiež pri limitnom prechode $R \to \infty$ (R je polomer sféry) prejde v euklidovskú. Podobnosť medzi Lobačevského a sférickou geometriou je však ešte hlbšia. Zoberme kosínusovú vetu pre sférický trojuholník:

$$\cos\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right).\cos\left(\frac{c}{R}\right) + \sin\left(\frac{b}{R}\right).\sin\left(\frac{c}{R}\right).\cos(\alpha) \qquad (12)$$

Keď položíme $R = \mathrm{i}k$, kde i je imaginárna jednotka, tak vzťah (12) sa zmení na (11). Možno teda aspoň formálne povedať, že Lobačevského geometria je sférická geometria na sfére s imaginárnym polomerom. Kosínusová veta má v geometrii roviny centrálne miesto, lebo dáva do súvisu dĺžky úsečiek s veľkosťou uhlov. Okrem toho na nej vyniká súvis medzi Lobačevského, euklidovskou a sférickou geometriou. Preto odvodenie kosínusovej vety bol pre Lobačevského dôležitý výsledok.

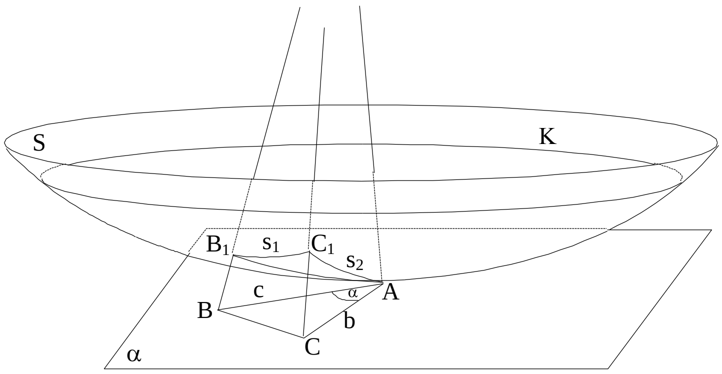
Ale ako ho vlastne Lobačevskij dostal? Najprv do neeuklidovského priestoru ***vnoril*** fragment euklidovskej geometrie (v podobe hraničnej plochy) a potom z tohto fragmentu ***preniesol*** geometrické vzťahy do neeuklidovskej roviny. Takto vlastne uvedený obrázok predstavuje stret dvoch jazykov. Pritom oba jazyky sú od seba oddelené, majú rôzne pozadia. Jeden jazyk je situovaný na hraničnej ploche, druhý na rovine. Vzťahy (10) zabezpečujú preklad medzi nimi. Domnievame sa, že štruktúra tohto obrázku prekračuje hranice desarguovskej formy jazyka. U Desargua majú obraz aj vzor rovnaké pozadie a celé premietanie sa deje v euklidovskom rámci. Naproti tomu v Lobačevského obrázku je vzor euklidovský, kým obraz neeuklidovský a premietanie nadobúda charakter prekladu.

Okrem zmeny charakteru pozadia dochádza k inej, možno ešte závažnejšej zmene. ***Ako je vôbec možné tieto obrázky nakresliť?*** Veď krivka AC_1, tá ktorá je na obrázku, nemôže byť úsekom žiadnej hraničnej čiary. Je nakreslená na obyčajnom, euklidovskom „papieri“, a tam nič také ako hraničná čiara neexistuje. Aby sme tomuto obrázku mohli porozumieť, musíme vedieť, že nesmieme brať doslovne to, na čo sa pozeráme. Pozeráme sa samozrejme na obyčajnú spleť čiar euklidovskej roviny, a na euklidovskej rovine nič také ako hraničná čiara neexistuje. Situácia tu v mnohom pripomína renesančné maliarstvo. Obraz, striktne vzaté, tiež nemá hĺbku. Ale napriek tomu sa na ňom hĺbka ukazuje. Pri výklade perspektivistického maliarstva sme schopnosť obrazov ukázať hĺbku vysvetlili ako prejav novej formy jazyka a s touto formou súvisiacim hľadiskom, ktoré musíme zaujať, aby sme na obraze videli to, čo vidieť máme (napríklad rovnobežky za zbiehajúcimi sa čiarami).

Zdá sa, že aj u Lobačevského máme do činenia s novou formou jazyka. Prijatie tejto novej formy spočíva v zaujatí interpretačného odstupu, spojeného s ochotou za trojuholníkom ABC, ktorý je na obrázku prítomný v podobe obyčajného euklidovského trojuholníka, uvidieť neeuklidovský trojuholník, ktorý prísne vzaté nie je možné nakresliť. Kto nie je schopný tento interpretačný odstup zaujať, ten obrázku nemôže porozumieť. Preto novú formu jazyka, ktorá sa ukazuje na Lobačevského obrázku navrhujeme nazvať ***interpretatívnou formou***. Problém Lobačevského obrázka je v tom, že je v ňom konflikt: Jazyk, ktorým hovorí (kreslí) je euklidovský, ale to čo chce vyjadriť je neeuklidovské.

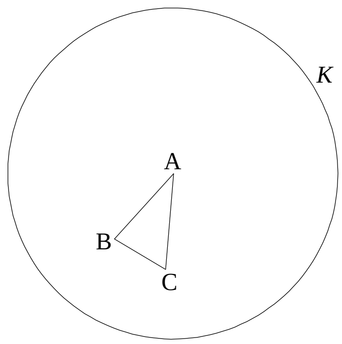
b. Explicitný variant interpretatívnej formy - Beltrami

Bezospornosť neeuklidovskej geometrie dokázal až roku 1868, t.j. dvanásť rokov po Lobačevského smrti, Eugenio Beltrami, ktorý zostrojil jej prvý model. Zjednodušenú verziu tohto modelu predložil Felix Klein roku 1871 (pozri napríklad Courant a Robbins 1941).



Prv než sa pustíme do výkladu Beltramiho – Kleinovho modelu, vráťme sa k obrázku z predošlej kapitoly, použitému pri odvodení trigonometrických formúl. Tam sme z hraničnej plochy nakreslili iba malý výsek v tvare trojuholníka AB_1C_1. Nakreslime si väčšiu časť roviny a aj hraničnej plochy, ktorá sa roviny dotýka v bode A. Rovina sa nepremietne na celú hraničnú plochu, ale len na jej časť v tvare kruhu. Práve polomer tohto kruhu predstavuje parameter σ vo vzťahoch (10).

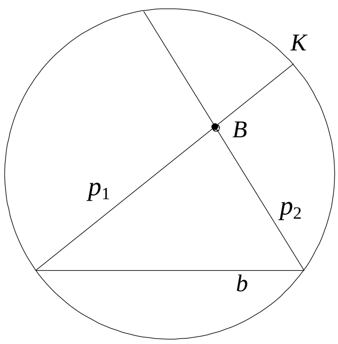
Hraničná plocha je vlastne sféra, ktorej stred je nekonečne ďaleko. Premietanie hraničnej plochy na rovinu, ktoré použil Lobačevskij, sa deje z tohto nekonečne vzdialeného stredu. V súvislosti s Desarguom sme ukázali, že stred premietania reprezentuje hľadisko. Problém s Lobačevského obrázkom bol v tom, že chceli euklidovskými prostriedkami vyjadriť neeuklidovský obsah. Tento problém zaniká, keď sa na uvedený obrázok pozrieme z nevlastného stredu premietania. Čo uvidíme? Vieme, že stred premietania je ten bod, z hľadiska ktorého vyzerajú vzor a obraz rovnako. Teda z tohto bodu sa hraničná plocha (presnejšie tá jej časť na ktorú sa premietne rovina) a neeuklidovská rovina kryjú. Trojuholníky ABC a AB_1C_1 splývajú.



Beltramiho – Kleinov model sa zakladá na originálnej myšlienke, ktorá pripomína Desarguovu ideu nahradiť skutočnosť jej obrazom: ***Nalepme obraz na vzor***. Mohlo by sa zdať, že stotožnením vzoru a obrazu, t.j. nalepením obrazu na vzor, stratíme všetku informáciu. Lobačevského prenesenie vzorcov z hraničnej plochy na rovinu sa zakladalo práve na tom, že tieto útvary boli odlíšené. Ale tu si pomôžeme interpretačným subjektom. Diferenciu medzi vzorom a obrazom, ktoré fyzicky stotožníme, prenesieme na bedrá interpretačného subjektu tým, že interpretáciu spravíme plne explicitnou.

Podobne ako Desargues spravil z implicitného subjektu Dürerovej rytiny explicitný objekt v tvare stredu premietania, Beltrami spredmetňuje interpretačný subjekt, keď z interpretácie robí prekladový slovník. Zo subjektu sa stáva explicitná súčasť jazyka. Vidíme, že podstatou opisovaných zmien v geometrii je, že stále bohatšie a hlbšie vrstvy našej subjektivity sa zvecňujú. Najprv sa pričlenia k jazyku v podobe implicitného (perspektivistického, projektívneho či interpretačného) subjektu a potom tým, že sa tento implicitný subjekt explicitne vyjadrí v jazyku, príslušné vrstvy našej subjektivity sa premenia v objekt. Preto tieto zmeny označujem termínom ***objektácie***. V ich priebehu sa stále hlbšie vrstvy našej subjektivity spredmetňujú, v jazyku sú reprezentované ako explicitné objekty.

Ale vráťme sa späť k Beltramiho – Kleinovmu modelu. Keď sa na Lobačevského obrázok pozrieme z nevlastného stredu premietania, splynú neeuklidovské objekty s objektmi euklidovskými (napríklad trojuholník ABC s AB_1C_1). ***To znamená, že ho možno nakresliť***!!! Konflikt Lobačevského obrázka je prekonaný. Nakreslíme všetko „po euklidovsky“ a interpretovať to budeme „po neeuklidovsky“. To je výhoda, že interpretačný subjekt je prítomný v jazyku v explicitnom tvare. Preto už interpretácia nemá povahu implicitného porozumenia tomu, čo chce Lobačevskij svojimi obrázkami vyjadriť. Interpretácia nadobúda explicitnú podobu vnútrojazykového pomenovávania. Nakreslíme euklidovský objekt a pomenujeme ho ako (v premietaní s ním splývajúci) objekt neeuklidovský. Toto zabudovanie interpretácie do jazyka umožňuje neeuklidovskú rovinu nakresliť (lebo z nevlastného stredu premietania splýva neeuklidovská rovina s vnútrom kruhu na hraničnej ploche, a tak miesto neeuklidovskej roviny kreslíme tento euklidovský kruh), a potom nakreslené objekty pomenovať neeuklidovsky (podľa objektov neeuklidovskej roviny, s ktorými pri premietaní naše euklidovské, teda nakresliteľné objekty splývajú). Interpretačný subjekt je tu explicitný, lebo pomenovávanie, čo je za normálnych okolností čosi implicitné, mimojazykové, sa tu deje explicitne.



Vonkajší jazyk	***Vnútorný jazyk***
K *– kruh euklidovskej roviny*	*horizont neeuklidovskej roviny*
B *– bod vo vnútri kruhu K*	*bod neeuklidovskej roviny*
b *– tetiva kruhu K*	*priamka neeuklidovskej roviny*
$\boldsymbol{p_1}$ *– tetiva kruhu K nepretínajúca tetivu b*	*priamka rovnobežná s priamkou b*

Beltramiho – Kleinov model sa zakladá na obrázku, na ktorom je nakreslený kruh *K* a niekoľko jeho tetív: Vnútro kruhu (t.j. kruh bez hraničnej kružnice) znázorňuje celú Lobačevského rovinu. Body kruhu sú bodmi tejto roviny a jeho tetivy (bez koncových bodov) sú jej priamkami. V modeli platia všetky axiómy euklidovskej geometrie – dvoma bodmi prechádza práve jedna priamka, a pod. Všetky, s výnimkou axiómy o rovnobežkách. Keď si zvolím priamku, napríklad priamku *b*, a bod, ktorý na nej neleží, napríklad bod *B*, tak týmto bodom možno viesť viacero priamok, ktoré priamku *b* nepretnú.

Aj keď nie sme schopní vidieť neeuklidovský svet, model nám ho pomocou tetív a bodov kruhu *K* dokáže sprítomniť. Neeuklidovský svet nie sme schopní zobraziť, ale len modelovať. Domnievame sa, že uvedený obrázok prekračuje hranice desarguovskej formy jazyka. Desargues zobrazuje predmet na určitom pozadí, Beltramiho – Kleinov model naproti tomu modeluje predmet spolu s jeho pozadím. Na pozadí euklidovskej roviny (na ktorej konštruujeme náš model) nakreslíme najprv pozadie (reprezentované horizontom v tvare kružnice *K*), a na tomto pozadí zobrazíme neeuklidovské objekty. Objekty sú tak situované na dvoch pozadiach súčasne. Jednak je to vonkajšie pozadie euklidovskej roviny, na ktorom sú objekty modelu obyčajné tetivy kruhu *K* a okrem toho vystupujú objekty aj na neeuklidovskom pozadí, na ktorom sa stávajú priamkami.

Teda základom konštrukcie modelu je spredmetnenie pozadia pomocou určitého objektu v popredí (v prípade Beltramiho – Kleinovho modelu pomocou kruhu *K*). V desarguovskej forme jazyka je pozadie prítomné, ale len ako pozadie, teda ako niečo, na čom sú situované objekty. N Beltramiho – Kleinovom modeli sa samotné pozadie stáva objektom na inom pozadí. Práve táto dvojitá usúvzťažnenosť objektov umožnila dokázať bezospornosť Lobačevského geometrie. Ak by totiž Lobačevského geometria bola sporná, musela by obsahovať nejaké tvrdenie o priamkach a bodoch Lobačevského roviny, ktoré by bolo možné dokázať spolu s jeho negáciou. Beltramiho – Kleinov model však umožňuje toto tvrdenie o priamkach Lobačevského roviny preložiť do jazyka euklidovskej geometrie ako tvrdenie o tetivách kruhu *K*. Preto, ak je sporná Lobačevského geometria, musí byť sporná aj geometria Euklidova.

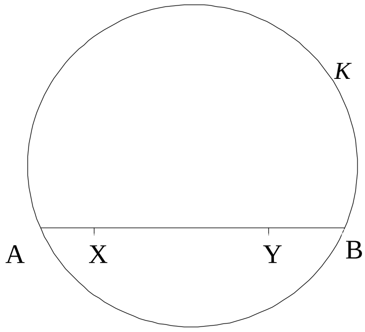
Vidíme, že model tu slúži ako určitý prekladový slovník z vnútorného jazyka Lobačevského geometrie do vonkajšieho jazyka Euklidovej geometrie. Táto dvojsituovanosť prvkov modelu vytvára dva jazyky – vnútorný jazyk, ktorý modelujem a vonkajší jazyk, jazyk v ktorom modelujem.

2.1.A.4 Integratívna forma jazyka syntetickej geometrie

Beltrami definitívne odstránil pochybnosti ohľadom bezospornosti neeuklidovskej geometrie. Beltramiho – Kleinov model je však modelom neeuklidovskej geometrie ***vo vnútri*** geometrie euklidovskej. To znamená, že uvedené geometrie nemajú rovnoprávne postavenie. Práve naopak, euklidovská geometria je predpokladom geometrie neeuklidovskej. Napred musí byť daná euklidovská rovina, aby na nej bolo možné nakresliť kruh K a v jeho vnútri namodelovať neeuklidovský svet. To znamená, že euklidovská geometria je transcendentálnym predpokladom geometrie neeuklidovskej. Je zrejmé, že tento aspekt Beltramiho – Kleinovho modelu poskytuje široký priestor pre obranu Kantovej filozofie geometrie. Keby Kant žil neskôr a bol by sa dozvedel o existencii neeuklidovskej geometrie, bol by asi schopný svoj systém tomuto faktu prispôsobiť. V Beltramiho – Kleinovom modeli je euklidovská geometria transcendentálnym predpokladom geometrie neeuklidovskej a preto apriórny charakter euklidovskej geometrie nie je narušený. Euklidovská geometria si môže udržať status apriórnych foriem nazerania priestoru (veď inak ako euklidovsky asi nikto nič nevidel) a k tejto funkcii len pribudne nová funkcia apriórnych foriem konštruovania neeuklidovských modelov. Na druhej strane je tiež zrejmé, že nerovnoprávnosť postavenia euklidovskej a neeuklidovskej geometrie má pôvod skôr v našej telesnej konštitúcii, než v geometrii samotnej. Preto primárnosť euklidovskej geometrie voči geometrii neeuklidovskej, ktorá leží v základoch Beltramiho – Kleinovho modelu, je skôr slabinou ako prednosťou tohto modelu.

a. Implicitný variant integratívnej formy - Cayley

Anglický matematik Arthur Cayley prišiel s myšlienkou prestať vnímať euklidovskú geometriu ako niečo dané, ako niečo záväzné a pokúsiť sa pozrieť aj na ňu ako na určitý model. Ale ako? Cayleyho idea sa vynorila vtedy, keď sa zaoberal otázkou ako možno do Beltramiho – Kleinovho modelu zaviesť pojem vzdialenosti. Predstavme si malé bytosti, pre ktoré je vnútro kruhu K ich svetom. Ako ich naučiť merať vzdialenosti? Obyčajná metrika je nevhodná, lebo z jej hľadiska je vzdialenosť od ľubovoľného bodu po obvod kruhu K konečná, kým pre bytosti, pre ktoré je kruh K ich svetom, musí byť obvod kruhu nekonečne ďaleko.



Cayleyho napadlo pozrieť sa na vec z pohľadu projektívnej roviny. Body A a B, v ktorých priamka XY pretína obvod kruhu *K* síce nepatria do sveta našich bytostí (pre ne ležia nekonečne ďaleko), ale my ich máme k dispozícii (tu vidno, že výklad prechádza do vonkajšieho jazyka modelu). Preto keď hľadáme vzdialenosť bodov X a Y, máme k dispozícii vlastne body štyri, menovite X, Y, A a B. Štyri body zadávajú projektívny invariant, ktorý objavil ešte Desargues, menovite dvojpomer:

$$(\mathrm{A, B; X, Y}) \quad = \frac{AX}{BX} : \frac{AY}{BY}$$

Kvôli stručnosti vynecháme historické detaily a uvedieme len výsledný vzorec pre vzdialenosť bodov X a Y v modeli

$$\mathrm{d(X, Y)} = \left|\ln(\mathrm{A, B; X, Y})\right| = \left|\ln\left(\frac{AX}{BX} : \frac{AY}{BY}\right)\right|$$

Keď sa bod *X* blíži k bodu A, dvojpomer sa blíži k nule, jeho logaritmus sa blíži k hodnote mínus nekonečno, a teda v absolútnej hodnote dostávame presne to, čo potrebujeme. Keď sa bod X blíži k horizontu, jeho vzdialenosť od bodu Y rastie nad všetky medze. Samozrejme, tento vzorec nie je pre naše bytosti vhodný. Oni nerozumejú, čo je to bod A. Ale to nie je podstatné. Čo je tu dôležité je skutočnosť, že vzdialenosť je daná pomocou projektívneho invariantu – dvojpomeru. Tu asi napadlo Cayleyho pozrieť sa na celý Beltramiho – Kleinov model a nielen na jeho metriku, pomocou projektívnej geometrie. Zabudnime, že náš model je nakreslený na ***euklidovskej*** rovine a predstavme si, že je nakreslený na rovine ***projektívnej***. Čo je to projektívna rovina? To je to, čo z euklidovskej roviny urobil Desargues. Zabudnime na euklidovské rovnobežky, zabudnime na euklidovskú vzdialenosť, zabudnime na euklidovské uhly. Ostane nám len spleť priamok, ktoré sa rôzne pretínajú. Na takto „vyčistenú“ rovinu nakreslíme kružnicu *K*. Tá každú priamku modelu pretne v dvoch bodoch, pomocou ktorých zavedieme pojem vzdialenosti, ako Cayley. Kružnica K tak vlastne konštituuje neeuklidovskú metriku. Okrem toho kružnica *K* rozdelí priamky modelu na tri druhy – na tie čo, sa pretínajú vo vnútri kruhu (rôznobežky), na jeho obvode (rovnobežky) a za jeho hranicou (rozbežky), presne tak, ako to chcel Lobačevskij.

Kružnica K je vlastne tým objektom, ktorý na projektívnej rovine vytvorí neeuklidovskú geometriu. Teda Cayley namiesto Beltramiho – Kleinovej konštrukcie **E** $\longrightarrow$ **L**, ktorá na euklidovskej rovine vytvorila model Lobačevského geometrie navrhuje schému

$$\boldsymbol{E \longrightarrow P \longrightarrow L}$$

Prvá šípka označuje prechod od euklidovskej roviny k rovine projektívnej a spočíva v ***odmyslení si*** jej euklidovskosti (t.j. rovnobežiek, vzdialenosti a uhlov). Druhá šípka označuje prechod od projektívnej roviny k rovine neeuklidovskej a spočíva v ***zavedení*** neeuklidovskej štruktúry (rovnobežiek, vzdialenosti, uhlov) pomocou kružnice *K*. Cayley teda pochopil úlohu, ktorú hrá kružnica *K* v Beltramiho – Kleinovom modeli: konštituuje neeuklidovskosť jeho geometrie. Vďaka tomu bol schopný nastoliť zásadne novú otázku – čo konštituuje euklidovskosť euklidovskej roviny. V rámci beltramiovskej štruktúry jazyka takúto otázku nie je možné položiť. Keď euklidovskú rovinu prijímame ako niečo dané, tak otázka, ako máme na nej zaviesť euklidovskú geometriu je nezmyselná. Prechod **E** $\longrightarrow$ **E** je neopísateľný. Čo konštituuje jazyk, je v tomto jazyku nevyjadriteľné. V rámci cayleyovskej formy jazyka je otázka, čo konštituuje euklidovskosť euklidovskej roviny, nanajvýš prirodzená. Znamená pýtať sa, čím máme nahradiť kružnicu *K,* aby sme dostali prechod:

$$\boldsymbol{E \longrightarrow P \longrightarrow E}$$

t.j. aby sme v projektívnej rovine dostali opäť geometriu euklidovskú. Pritom odpoveď je zarážajúca. Absolúta euklidovskej geometrie je degenerovaná – tvoria ju dva imaginárne body (t.j. body s komplexnými súradnicami) spojené reálnou priamkou (t.j. priamkou, ktorej rovnica má reálne koeficienty). Teda to, čo konštituuje náš svet sú dva imaginárne body. A navyše, absolúta nezadáva euklidovskú geometriu úplne, ale je treba ešte doplnenie ďalších podmienok.

Vidíme, že Cayley posúva porozumenie geometrii o rovinu hlbšie, keď kladie otázku, čo konštituuje euklidovskosť euklidovskej roviny. Ale čo umožnilo položiť túto zásadnú otázku, ktorá definitívne rozbíja medze Kantovej filozofie, a proti ktorej nemá šance žiadna novokantovská reinterpretácia? Bol to prechod od euklidovskej k projektívnej rovine, ako základu modelu neeuklidovskej geometrie. Ale ako dosiahol Cayley tento prechod? ***Apelom***, apelom aby sme zabudli na euklidovskosť roviny, na ktorej je nakreslená kružnica *K* a udržali si len jej projektívne vlastnosti. Ale vie to niekto urobiť? Domnievam sa, že tu ide o podobný apel, ako ten, na ktorom je založené perspektivistická forma jazyka (uvidieť za zbiehajúcimi sa čiarami rovnobežky) či Lobačevského forma jazyka (uvidieť za spleťou čiar nakreslených euklidovskou ceruzkou na euklidovskom papieri krivky neeuklidovskej geometrie). Podobne ako Dürer či Lobačevskij, aj Cayley od nás chce, aby sme v duchu opustili to, na čo sa pozeráme. Za euklidovskou rovinou máme zahliadnuť projektívnu rovinu. Preto tento apel budeme interpretovať v zhode s tým, ako sme to robili doposiaľ, ako vznik novej implicitnej formy jazyka.[26] Implicitnej preto, lebo prechod od euklidovskej ku projektívnej rovine Cayley nevie explicitne opísať, ale len apeluje na našu ochotu hrať hru ako keby sme boli schopní vidieť rovinu bez rovnobežiek, vzdialenosti a miery uhlov. Prísne vzaté, niečoho takého schopní nie sme, ale rozumieme, čo od nás chce. Keď na túto hru pristúpime, tak podobne ako sa v renesančnom obraze odkryla hĺbka a ako sme v Lobačevského obrázkoch zahliadli neeuklidovský svet, tak teraz porozumieme otázke, čo konštituuje euklidovskosť euklidovskej geometrie.

Implicitná forma jazyka, ktorú prináša Cayley nazveme ***integratívnou formou***, lebo je to forma jazyka, ktorá umožňuje integrovať, zjednotiť euklidovskú a neeuklidovskú geometriu v jeden celok. Z jej hľadiska vidíme spoločnú bázu geometrie ako takej, spoločný fundament, z ktorého sa euklidovská a neeuklidovská geometria vyčleňujú jednotným spôsobom, pomocou význačnej krivky, ktorú Cayley nazval absolútou. Tu už euklidovská geometria nie je predpokladom možnosti geometrie neeuklidovskej. Obe sú rovnocenné, vznikajú rovnakým spôsobom.

Cayleyho prechod k projektívnej rovine ako k základu geometrie umožňuje ísť ešte ďalej a položiť zásadnú otázku: ***Aké geometrie sú vôbec možné?***

$$\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{?}$$

To je výzva brať rad za radom rôzne absolúty (ako Cayley nazval krivky, hrajúce úlohu analogickú úlohe kružnice *K* v Beltramiho – Kleinovom modeli) a skúmať aké geometrie pomocou nich vznikajú.

Je to zásadne nová otázka, radikálne vyhrotenie problému, čo je to geometria. Preto Cayleyho prínos do geometrie, i keď rozsahovo neveľký, hĺbkou myšlienok je porovnateľný s prínosom Lobačevského či Beltramiho. Tým, že našiel spôsob ako relativizovať euklidovskosť euklidovskej geometrie, nastolil zásadnú otázku. Zodpovedanie tejto otázky sa viaže k Felixovi Kleinovi.

b. Explicitný variant integratívnej formy - Klein

Otázka, aké logické spojky okrem implikácie, konjunkcie a disjunkcie sú vôbec možné, bola zodpovedaná, keď sa logické spojky ***stotožnili*** s Booleovskými funkciami.

p q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
1 1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1 0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0 1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0 0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0

Vidno, že spojok je 16. Vo funkcii číslo 2 môžeme rozpoznať disjunkciu, vo funkcii číslo 4 implikáciu, vo funkcii číslo 8 ekvivalenciu a vo funkcii 12 konjunkciu.

V geometrii bola analogická otázka nastolená Cayleym. *Aké geometrie sú vôbec možné?* Felix Klein našiel identifikáciu, ktorá umožňuje túto otázku zodpovedať. V Cayleyho pojatí táto otázka znela: „*Aké krivky môžu byť absolútou*?“ Cayley pochopil, že kružnica *K* konštituuje v Beltramiho – Kleinovom modeli pojem vzdialenosti. Preto podľa Cayleyho pojatia možné geometrie sú zadané možnými absolútami. Toto pojatie ale nestačí ani na uchopenie euklidovskej geometrie, lebo v jej prípade je absolúta degenerovaná, a nie je schopná vytvoriť metriku. A okrem toho kriviek je príliš veľa. Klein našiel spôsob ako možno Cayleyho otázku zodpovedať. Beltramiho kružnica *K* má totiž jednu vlastnosť, ktorá ušla Cayleyho pozornosti: v grupe všetkých projektívnych transformácií roviny zadáva kružnica podgrupu. Stotožnením geometrií s podgrupami projektívnej grupy našiel Klein nástroj, ktorým možno v princípe Cayleyho otázku zodpovedať. Nie každá krivka je vhodná za absolútu. Absolútou môže byť iba taká krivka, ktorá v projektívnej grupe zadáva podgrupu. Teda

Klein prešiel od Cayleyho implicitnej schémy

$$\boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{P} \longrightarrow \boldsymbol{E}$$

k explicitnej schéme

$$\mathbf{G_E} \longrightarrow \mathbf{G_P} \longrightarrow \mathbf{G_E}$$

Klein spravil s Cayleyho integratívnou formou jazyka to, čo Beltrami spravil s Lobačevského interpretatívnou formou jazyka, a Desargues s perspektívistickou formou renesančného maliarstva: ***zabudoval ju do jazyka***. Grupa transformácií je ten nástroj, ktorý umožňuje Cayleyho apel „*zabudni na rovnobežky, metriku a uhly*“ nahradiť explicitným predpisom – od euklidovskej grupy prejdi k projektívnej. Práve projektívna grupa „ničí“ rovnobežnosť, vzdialenosť a uhly (zachováva len incidenciu a dvojpomer).

c. Filozofická reflexia integratívnej formy - Poincaré

Pristúpme teraz k epistemologickému výkladu Kleinovho *Erlangenského programu* z roku 1872, ktorým Klein otvoril jednotiaci pohľad na geometriu pomocou teórie grúp. Našou úlohou je vysvetliť, prečo práve teória grúp umožnila vytvoriť jednotiaci pohľad na geometriu. Štandardný výklad teórie grúp v kurzoch algebry pojem grupy epistemologicky trivializuje. Zväčša sa uvedú symetrie štvorca alebo rovnostranného trojuholníka a ukáže sa, že spĺňajú určité podmienky. Po niekoľkých elementárnych príkladoch nasleduje formálna definícia, ktorá sa prezentuje ako určité zovšeobecnenie, či abstrakcia spoločných čŕt uvažovaných príkladov. Vzniká tak dojem, že grupa je čosi ako preklápanie trojuholníka, len všeobecnejšie. Pritom je zarážajúce, že pojem, ktorým sa začína nová éra v dejinách geometrie, a ktorý preto musí mať obrovský ideový náboj, sa uvádza príkladmi, ktorých ideový obsah je temer nulový. Preklápanie štvorca a vypĺňanie tabuliek by zvládol snáď aj škôlkár. Takýto výklad navodzuje pocit, že základným problémom objavu teórie grúp bolo všimnúť si niečo, čo je vlastne banálne. (Napríklad, že keď preklopíme štvorec, tak ho možno preklopiť späť, čo znamená, že k danému preklopeniu existuje inverzný prvok.) Študentom sa sugeruje pocit, ako keby veľkí matematici boli ľudia so zvláštnym citom pre triviality. Preklápať štvorec vie každý, a všimnúť si, že každé preklopenie možno vrátiť späť, tiež nevyžaduje zvláštne intelektuálne schopnosti. Preto sa študent len ťažko ubráni pocitu, že teóriu grúp vlastne mohli objaviť už v antike a dejiny matematiky sú len dielom náhody, že koho napadlo, aby tieto banality spísal.

Cesta k epistemologickému pochopeniu pojmu grupy vedie cez porozumenie skutočnosti, prečo bolo treba na teóriu grúp čakať do 19. storočia. Pritom odpoveď už poznáme. V kapitole 2.1.A.2 sme uviedli, že v antike bol pojem transformácie príliš chudobný a až projektívna forma obohatila tento pojem do tej miery, že sa stalo zaujímavým skúmať rôzne systémy transformácií. Získali sme tak prvú námietku proti výkladu pojmu grupy v učebniciach algebry. Príklady uvádzané ako ilustrácie pojmu grupy obsahujú iba pred-desarguovské transformácie, ktoré sú príliš chudobné na to, aby mohli motivovať vznik pojmu grupy. Takto medzi pojmom grupy a jej ilustráciami vzniká epistemologická priepasť. Príklady majú príchuť triviálnosti, čím sa pojem grupy stáva dielom nerekonštruovateľnej abstrakcie a algebra sa zahaľuje do plášťa tajuplnosti. Výklad Desargua umožňuje pokročiť ďalej v epistemologickej analýze pojmu grupy, akonáhle si položíme otázku, čo umožnilo Desarguovi tak zásadne obohatiť pojem transformácie. Bolo to zabudovanie hľadiska do jazyka geometrie. To znamená, že niekde tu treba hľadať východisko pre epistemologickú rekonštrukciu pojmu grupy. Rekonštrukciu ktorú hľadáme možno nájsť u Henriho Poincarého. Poincaré v knihe *La Science et l'Hypothése* (Poincaré 1902, s. 71) skúma otázku vzájomného vzťahu geometrického priestoru a priestoru zmyslových vnemov. Mohlo by sa zdať, že tieto priestory sú identické. Nie je to však pravda. Geometrický priestor je spojitý, nekonečný, trojrozmerný, homogénny a izotropný. Naproti tomu, pri podrobnejšej analýze vysvitne, že tri priestory vnemov – vizuálny priestor, taktilný priestor a motorický priestor, nie sú ani homogénne, ani izotropné, a čo je najzaujímavejšie, prísne vzaté, nemajú ani tri rozmery. Zoberme napríklad priestor zrakových vnemov a izolujme ho od taktilného aj motorického priestoru. To znamená, že toho čo vidíme by sme sa nemohli ani dotýkať, ani nijako meniť svoju polohu, otáčať hlavu či očné gule. Potom by sme museli uveriť svojim očiam, že „približujúce sa teleso“ zväčšuje svoje rozmery, že „objekty“ sveta sú pulzujúce škvrny, ktoré sa neustále zväčšujú a zmenšujú, a z času na čas zmiznú. Preto, ak by sme vôbec dospeli k niečomu takému ako pojem priestoru, rozhodne by nebol trojrozmerný, homogénny a izotropný.

To ale znamená, že k pojmu geometrického priestoru sme nemohli dospieť z údajov jednotlivých zmyslov. Poincaré sa ďalej venuje analýze toho, ako musia vyzerať vzťahy medzi zmyslovými vnemami, aby z nich mohol vzniknúť pojem priestoru. Ako prvé je podľa neho treba medzi všetkými zmenami stavov vyčleniť zmeny polohy. Zmeny stavov sa odrážajú zmenami v celom súbore zmyslových vnemov. Avšak existujú také zmeny vnemov, ktoré dokážeme ***kompenzovať***, t.j. obnoviť pôvodný stav pomocou pohybu. Takéto zmeny vnemov nazveme zmenami polohy. Napríklad, keď sa teleso pred nami pomaly pohybuje, tak ho môžeme sledovať očami a udržiavať jeho obraz v tom istom mieste sietnice pomocou pohybov očí. Teda pomocou pohybu kompenzujeme zmenu zrakového vnemu, ktorá by nastala, keby oko bolo nehybné. Podobne zväčšenie priemetu objektu na sietnicu, vyvolané jeho priblížením, môžem kompenzovať tým, že sa od neho vzdialim do pôvodnej vzdialenosti. Keď predmet môžem pritom držať v ruke, tak hmatový vnem svojou konštantnosťou umožňuje koordinovať zmeny veľkosti predmetu s príslušnými pohybmi.

Teda popri troch fenomenálnych priestoroch, prislúchajúcich jednotlivým zmyslom, z ktorých žiaden nemá povahu homogénneho, izotropného, spojitého, nekonečného a trojrozmerného priestoru, existuje ešte ďalší priestor, priestor, v ktorom dochádza ku vzájomnej kompenzácii zmien vnemov, náležiacich do jednotlivých fenomenálnych priestorov. Zmeny zrakových vnemov sú zviazané so zmenami hmatových a motorických vnemov zložitým komplexom kompenzačných vzťahov. Tieto vzťahy však nemajú charakter vizuálnej, taktilnej či motorickej podobnosti – motorický vnem, kompenzujúci istú zmenu zrakového vnemu, sa na zrakový vnem nepodobá. Kompenzačné vzťahy neexistujú v žiadnom z troch fenomenálnych priestorov. Sú to vzťahy, ktoré navzájom spájajú tieto priestory. Poincaré tvrdí, že tieto ***kompenzačné transformácie tvoria grupu, a táto grupa je grupou transformácií euklidovského priestoru***. Teda euklidovský priestor nie je priestorom, ani nášho zraku, ani nášho hmatu, ani priestorom v ktorom sa pohybujeme. Je to štruktúra umožňujúca ***integrovať*** tieto tri priestory dohromady. Je to priestor, v ktorom je umiestnený ten, kto tieto tri priestory zjednocuje.

Tento príklad predstavuje podstatne netriviálnejšiu ilustráciu pojmu grupy. Grupa, to nie je len čosi ako preklápanie trojuholníka. Je to niečo, čo sa nás hlboko týka, niečo, čo je bytostne o nás. Euklidovská grupa je základný nástroj, pomocou ktorého každý z nás transcenduje privátny svet svojich zmyslových vnemov a tvorí tak základ, na ktorom je postavený intersubjektívny jazyk priestorových vzťahov. To znamená, že teória grúp, ktorá umožňuje prechod od analýzy seriácie vnemov jednotlivých zmyslových orgánov ku skúmaniu štruktúry ich kompenzačných vzťahov, je fundamentálnym spôsobom prítomná nielen v pojme priestoru, ale aj predmetu a skutočnosti. Teraz nás už neprekvapí, že Klein mohol pojem grupy použiť na riešenie závažných problémov geometrie, a že sa geometriu týmto spôsobom posunul na kvalitatívne novú úroveň. Neprekvapí nás to, lebo pojem grupy tvorí základ, na ktorom je založený samotný pojem priestoru. Klein vlastne nepriniesol pojem grupy do geometrie, ale iba tento pojem, ktorý v jej základoch odjakživa spočíva, spravil explicitným. Možno povedať, že Kleinov *Erlangenský program* umožnil jednotiaci pohľad na geometriu práve preto, že pojem grupy, na ktorom je tento program založený, predstavuje epistemologický fundament pojmu priestoru. Kleinov prínos spočíval v tom, že pri analýze základných pojmov geometrie prešiel o jednu epistemologickú úroveň hlbšie.

Vráťme sa na chvíľu späť k Poincarého výkladu. Poincaré hovorí o kompenzačných vzťahoch medzi zmenami vnemov. Ale čo znamená kompenzovať? Kompenzovať znamená zabezpečiť, aby to bolo rovnaké ako predtým, t.j. aby sa zhodoval pôvodný a nový vnem. Ale to sme už mali. Spomeňme si na Dürera. Tam tiež išlo o to, aby sa niečo s niečim zhodovalo. Zhoda je vždy zhodou z určitého hľadiska. Hľadisko sme charakterizovali ako ten bod, z ktorého vyzerajú obraz a vzor úplne rovnako. Preto aj pri kompenzácii máme do činenia s hľadiskom, či epistemickým subjektom, pre ktorý je vnem pred a po kompenzácii rovnaký. Avšak epistemický subjekt, ktorý konštituuje grupu kompenzačných vzťahov a tým tvorí základ Kleinovho *Erlangenského programu*, nemá povahu bodu ako u Desargua. Nie je to ani dvojica hľadísk, prislúchajúca vnútornému a vonkajšiemu jazyku, ako u Beltramiho. Kleinovské hľadiská vypĺňajú celý priestor. ***Euklidovský priestor je priestorom hľadísk. Nie je to priestor videného, nie je to priestor, v ktorom sa nachádza to, na čo sa pozeráme. Je to priestor videnia, je to priestor možných hľadísk, z ktorých sa pozeráme.*** Grupa transformácií integruje tieto hľadiská v jeden celok, a tento celok, spolu s grupou, tvorí epistemický subjekt jazyka.

Klein pri charakterizácii geometrie zobral ako východisko grupu transformácií. Geometriu prislúchajúcu danej grupe definoval ako súbor tvrdení, ktorých pravdivosť sa pri transformáciách patriacich do príslušnej grupy, nemení. Inak povedané, geometria prislúchajúca k danej grupe G je štúdiom vlastností, ktoré sú invariantné voči transformáciám danej grupy. Klein tak nahrádza Beltramiho interpretačný subjekt, ktorý zabezpečoval preklad z vonkajšieho jazyka do vnútorného (t.j. bol nositeľom významovej ekvivalencie výrazov týchto dvoch jazykov) integratívnym subjektom, subjektom ktorý integruje všetky možné geometrie, euklidovskú, projektívnu, afinnú, Lobačevského, a mnohé ďalšie do jedného celku. Kleinovi sa tak podarilo vniesť do geometrie jednotu.

Euklidovská a Lobačevského geometria sú v ostrom protiklade, ak ich chápeme ako výpovede o skutočnosti. Ak platí jedna, nemôže platiť druhá. Beltrami ich zmieril, keď ich prehlásil za modely skutočnosti. Pritom každý z týchto modelov sám o sebe je konzistentný, a dokonca to, čo hovorí jeden je v istom zmysle rozumné aj z hľadiska druhého. Keď človek rozmýšľa v jednej geometrii, druhú geometriu môže tolerovať ako konzistentnú a v istom zmysle rozumnú alternatívu, ktorú vie vo svojom systéme modelovať. Klein pokročil v pochopení jednoty geometrie ešte ďalej keď ukázal, že rôzne geometrie sa navzájom dopĺňajú. Teda tvrdenia jednotlivých geometrií si ***protirečia***, ich modely sa ***tolerujú***, a ich grupy transformácií sa ***dopĺňajú***. Transformácie jednotlivých geometrií sú časťami jednej univerzálnej grupy, a tou grupou je grupa projektívnych transformácií.

2.1.A.5 Konštitutívna forma jazyka syntetickej geometrie

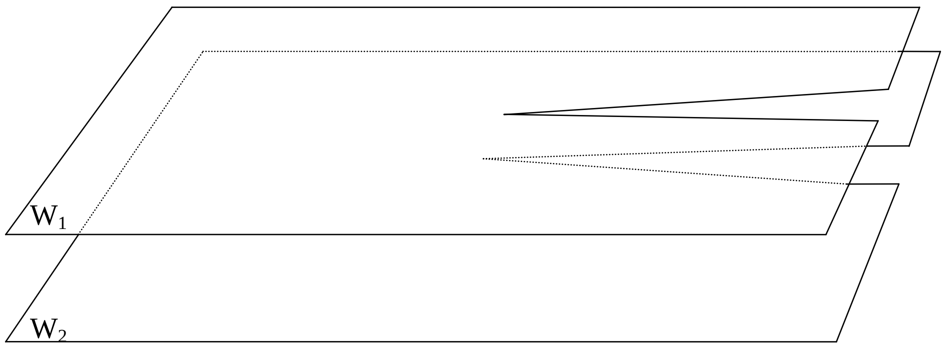
Kleinov *Erlangenský program* prehlbuje porozumenie geometrie. Na rozdiel od Euklidovho či Lobačevského systému, kde vzdialenosť bola vlastnosťou priestoru, u Kleina metrika už nie je niečo dané a nemenné. Z metriky sa stáva štruktúra, ktorú do neutrálneho pozadia projektívneho priestoru zavádza transformačná grupa. Kleinova konštrukcia však ešte stále predpokladá danosť projektívneho priestoru. Vynára sa preto otázka, či nie je možné prekonať aj túto danosť a projektívny priestor, ktorý v *Erlangenskom programe* tvorí predpoklad možnosti každej metrickej geometrie, zmeniť v aposteriórnu konštrukciu. Ide o to, či je možné s projektívnym priestorom spraviť analogický posun, aký Cayley urobil s euklidovskou rovinou v Beltramiho modeli. Odpoveď na túto otázku je kladná. Geometriu možno oslobodiť aj od predpokladu danosti projektívneho priestoru. Spôsob, ako sa to urobí, je však omnoho radikálnejší, než ako bol Cayleyho prechod od euklidovskej roviny k rovine projektívnej. Tu nejde o to prejsť k ešte fundamentálnejšiemu priestoru a v ktorom by sa projektívny priestor stal jednou z definovaných štruktúr. Krok, uskutočnený Bernhardom Riemannom spočíval v tom, že sa zbavíme akéhokoľvek priestoru a objekty prestaneme vnímať ako dané v nejakom priestore.

a. Implicitný variant konštitutívnej formy - Riemann

Na potrebu oslobodiť objekty od priestoru narazil Riemann v teórii funkcií komplexnej premennej. Funkcia komplexnej premennej je funkcia, ktorá priraďuje bodu *z* komplexnej roviny *Z* funkčnú hodnotu $w = f(z)$, t.j. bod *w* komplexnej roviny *W*. Základný problém s takýmito funkciami je v tom, že nie je možné nakresliť ich graf. Definičný obor, ako aj obor hodnôt sú totiž dvojrozmerné (komplexné roviny), preto graf funkcie komplexnej premennej, analogický sínusoide, či logaritmickej krivke, si vyžaduje štvorrozmerný priestor. Štvorrozmerný priestor sa však nedá znázorniť. Keď je ale funkcia komplexnej premennej prostá, t.j. rôznym hodnotám z_1 a z_2 prislúchajú rôzne hodnoty $w_1 = f(z_1)$ a $w_2 = f(z_2)$, je možné utvoriť si obraz o jej priebehu tak, že si nakreslíme komplexné roviny *Z* a *W* vedľa seba (samozrejme, kreslíme len ich časti) a vyznačíme si, ktoré oblasti roviny *Z* sa zobrazia na ktoré oblasti roviny *W*. Žiaľ, tento prístup je obmedzený, lebo už najjednoduchšie funkcie ako mocninná funkcia $w = z^n$, exponenciálna funkcia $w = e^z$ či goniometrické funkcie $w = \sin(z)$

a $w = \cos(z)$ nie sú prosté. Riemann našiel originálny spôsob, ako ich možno spraviť prostými. Za týmto účelom stačí uvažovať, že tieto funkcie sú definované nie na jednoduchej komplexnej rovine, ale na objekte, ktorý vznikne zlepením viacerých kópií komplexnej roviny.

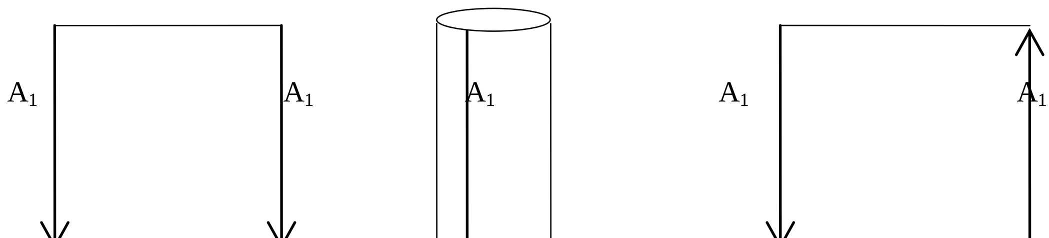
Zoberme napríklad funkciu $w = z^2$. Táto funkcia nie je prostá lebo, lebo napríklad body $z_1 = i$ a $z_2 = -i$ sa oba zobrazia na ten istý bod $w = -1$. Obraz polovice komplexnej roviny Z pokryje celú rovinu W. Obraz roviny Z pokryje preto rovinu W dvakrát. Avšak toto dvojnásobné pokrytie roviny W je veľmi pravidelné. Pôsobí dojmom, ako keby boli dva obrazy nalepené na seba bez toho, aby sa nejako miešali, či navzájom ovplyvňovali. A Riemannova idea bola, tieto dva obrazy od seba oddeliť. Za týmto účelom potrebujeme zobrať miesto jednej roviny W, na ktorej je obraz nanesený dvojmo, dve roviny W_1 a W_2. Na rovinu W_1 zobrazíme hornú polrovinu roviny Z (čím W_1 úplne pokryjeme) a na rovinu W_2 zobrazíme spodnú polrovinu roviny Z. Takto sme sa zbavili prekrývania. To, čo sme dostali, má ale jednu chybu. Obrazom roviny Z v zobrazení $w = z^2$ je jeden kus. Keď sa bod z pohybuje po ľubovolnej krivke roviny Z, jeho obraz w sa pohybuje po zodpovedajúcej krivke roviny W. Naproti tomu náš model sa skladá z dvoch kusov. Preto vždy, keď bod z prejde z hornej polroviny roviny Z na spodnú, bod w preskočí z roviny W_1 na rovinu W_2. Ale v skutočnosti sa žiadne skákanie nedeje. Ide o artefakt modelu. Tým, že sme rozdelili to, čo bolo pôvodne spojené, vznikajú skoky.



Riemann ukázal, ako možno toto preskakovanie obísť. Roviny treba W_1 a W_2 zlepiť. (Nie nalepiť na seba – to je to, odkiaľ sme vyšli – ale zlepiť.) Hranica H, ktorá na rovine Z oddeľuje hornú polrovinu od spodnej je tou čiarou, pri prekročení ktorej dochádza k preskakovaniu z roviny W_1 na rovinu W_2. Hranica H sa zobrazí na oboch týchto rovinách na kladnú polovicu reálnej osi. Preto rozrežme obe roviny W_1 a W_2 pozdĺž tejto polpriamky a zlepme ich navzájom tak, aby ku žiadnemu preskakovaniu nedochádzalo. Zistíme, že potrebujeme prilepiť hornú hranu rezu roviny W_1 ku spodnej hrane rezu roviny W_2 a spodnú hranu rezu roviny W_1 k hornej hrane rezu roviny W_2.

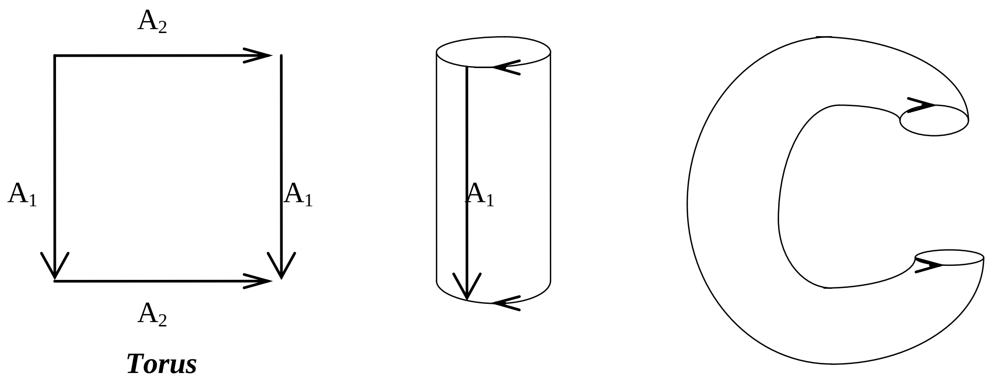
Po niekoľkých pokusoch zistíme, že sa to nedá. Ale prečo sa to nedá? Lebo priestor to nedovolí! A tu prichádza Riemann s radikálnou ideou: ***Zabudnime na priestor!*** Predstavme si, že sme príslušné zlepenie urobili. Funkcia $w = z^2$ sa tým stáva bijektívnym zobrazením komplexnej roviny Z na dvojrovinu W (ktorá je príkladom tzv. Riemannovej plochy). Podobnú konštrukciu, ako sme spravili pre funkciu $w = z^2$, možno spraviť aj pre ostatné elementárne funkcie komplexnej premennej. Takto získame vhľad do geometrickej štruktúry týchto zobrazení, ktorý okrem iného umožňuje určiť hodnoty mnohých integrálov bez toho, aby sme museli počítať. Integrály „uhádneme“ na základe geometrických vlastností integračnej krivky uvažovanej na príslušnej Riemannovej ploche.

Riemannovu konštrukciu sme uviedli v jej pôvodnom kontexte, ktorým bola teória funkcií komplexnej premennej, lebo tu sa po prvýkrát vynorila idea ***uvažovať geometrické objekty nezávisle od priestoru***. Táto konštrukcia je komplikovaná, lebo lepí dohromady viaceré komplexné roviny. Jej základné kroky si však môžeme ukázať na „jednoduchšom“ príklade, na konštrukcii tzv. *Kleinovej fľaše*. Zoberme štvorec a poďme s ním robiť to, čo robil Riemann s komplexnými rovinami: lepiť jeho hrany. Pritom musíme vždy povedať, ktoré dve hrany chceme zlepiť a v akej orientácii.



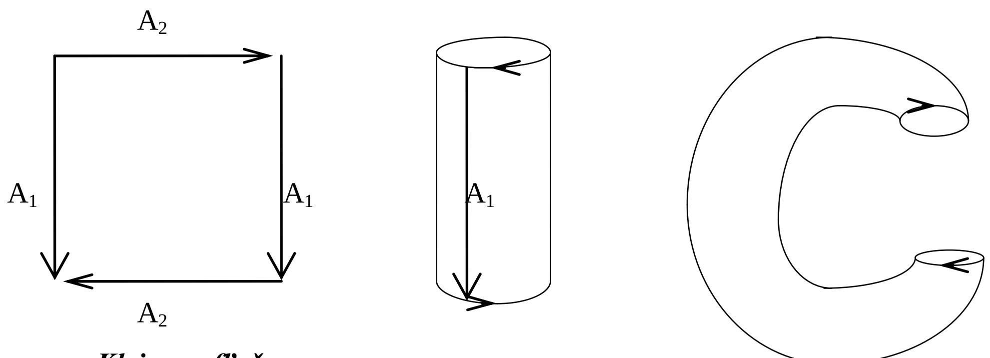
Valcová plocha ***Möbiov list***

Písmenami naznačíme, ktoré hrany zlepíme a šípkami označíme, že v akej orientácii. Keď v štvorci zlepíme protiľahlé strany, ktoré sú súhlasne orientované, dostaneme plášť valca. Keď zlepíme protiľahlé strany štvorca tak, že jednu stranu napred pretočíme, dostaneme *Möbiov list*. Obe tieto lepenia možno ľahko uskutočniť v trojrozmernom priestore, snáď len pri konštrukcii Möbiovho listu je lepšie vziať dlhší pás papiera alebo stužku, než štvorec. Ale to sú technické detaily, ktoré nás príliš nezaujímajú, lebo to, k čomu smerujeme, sa tak či tak nebude dať skonštruovať, nech by sme mali k dispozícii akýkoľvek papier či stužku. Ďalší objekt, ktorý sa dá jednoducho skonštruovať, je torus:



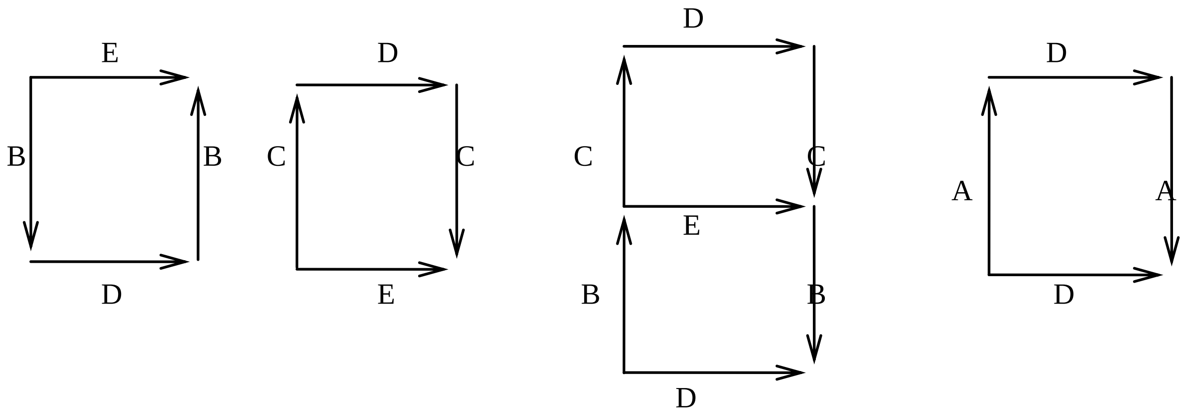
Torus

Uvažujme teraz štvorec, ktorý sa od štvorca zadávajúceho torus líši iba orientáciou jednej zo strán A_2. V tomto prípade nemožno príslušné kružnice zlepiť, lebo ich orientácie sú opačné. Potrebovali by sme jednu z nich pretočiť, ako sme to urobili pri Möbiovom liste. Pri Möbiovom liste sme mali šťastie – objekt pred lepením bol rovinný, takže sme mali k dispozícii tretí rozmer priestoru, ktorý sme použili na pretočenie jednej hrany listu tak, aby sme dostali súhlasné orientácie a hrany mohli zlepiť.



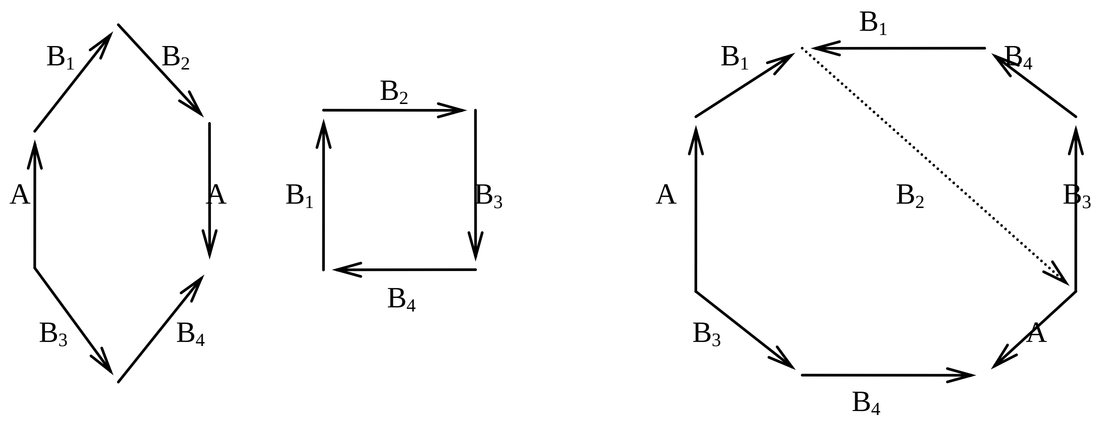
Kleinova fľaša

V prípade Kleinovej fľaše sme na tom horšie, lebo valcová plocha, ktorej hranu potrebujeme prekrútiť, je už trojrozmerný objekt, takže nedisponujeme žiadnou ďalšou dimenziou, do ktorej by sme sa mohli „vykloniť“ a v nej príslušné prekrútenie uskutočniť. Ale je jasné, že je to problém priestoru, v ktorom konštrukciu robíme. Kleinova fľaša s tým nemá nič spoločné. To, či ju možno alebo nemožno v trojrozmernom priestore skonštruovať, to je vlastnosť priestoru. Preto diagram, pozostávajúci zo štvorca (alebo mnohouholníka s párnym počtom hrán), na ktorom je vyznačené, ktoré hrany a v akej orientácii lepíme, možno považovať za geometrický jazyk, ktorý umožňuje reprezentovať objekty nezávisle od priestoru. Základná výhoda tohto jazyka spočíva v tom, že umožňuje jednotným spôsobom opísať plochy, ktoré sa nedajú skonštruovať. Navyše v tomto jazyku môžeme dokázať množstvo vzťahov medzi plochami, a to aj napriek tomu, že si príslušné plochy nedokážeme predstaviť. Napríklad, keď zoberieme Möbiov list, tak vidíme, že jeho hrana je kružnica. Skutočne, po pretočení jednej z lepených hrán B, sa pravý koniec hornej (nezlepenej) hrany E napojí na ľavý koniec dolnej hrany D a pravý koniec dolnej sa napojí na ľavý koniec hornej hrany. Zoberme dve kópie Möbiovho listu a zlepme ich pozdĺž týchto kružníc.



Möbiov list + ***Möbiov list*** = ***???????????*** = ***Kleinova fľaša***

Samozrejme, nedá sa to urobiť, ale odhliadnuc od tejto „maličkosti“, čo dostaneme, nie je nič iné ako Kleinova fľaša. Podarilo sa nám nájsť vzťah medzi objektmi, z ktorých si ani jeden nevieme predstaviť. Riemannov jazyk, napriek svojej zdanlivej jednoduchosti, je silným nástrojom.



Möbiov list + ***kruh*** = ***projektívna rovina***

Ďalším príkladom plochy, ktorá sa nedá zostrojiť v trojrozmernom priestore, je projektívna rovina. Vznikne tak, že k Möbiovmu listu pozdĺž jeho hranice (čo je kružnica) vlepíme kruh. Toto lepenie sa nedá uskutočniť, lebo trojrozmerný priestor R^3 je príliš malý a nie je v ňom možné uvažované dve kružnice (hranicu Möbiovho listu a hranicu kruhu) k seba priložiť. *„Predstavme si však plochú bytosť, ktorá chce vytvoriť uzavretú plochu zlepením dvoch kruhov pozdĺž spoločnej hranice. V R^2 to nedokáže urobiť, ale trojrozmerná osoba to môže v R^3 urobiť tak, že z jedného kruhu urobí čiapočku a tú hravo prilepí k druhému.* ***Preto sa musíme naučiť uvažovať naše objekty viac z vnútorného hľadiska a odmyslieť si, že sú vnorené do euklidovského priestoru****.“* (Agoston 1976, s. 60). Ale kto to vie urobiť? Zdá sa, že tu máme do činenia s implicitným apelom, pripomínajúcim Lobačevského a Cayleyho. Rozdiel je len v tom, že teraz sa po nás nechce, aby sme za euklidovským trojuholníkom uvideli neeuklidovský útvar, resp. aby sme pod euklidovskou rovinou zahliadli rovinu projektívnu, ale pre zmenu si máme úplne odmyslieť akýkoľvek priestor. Z predošlých skúseností s týmto druhom apelov vieme, že máme do činenia s novou implicitnou formou jazyka. Našou úlohou je objasniť o akú formu ide. Vráťme sa preto k obrázku, reprezentujúcemu projektívnu rovinu.

Čitateľovi sa možno zdalo čudné, že pri konštrukcii projektívnej roviny sme hovorili o lepení Möbiovho listu na ***kruh*** a nakreslili sme ***štvorec***. Ale z hľadiska topológie sú štvorec a kruh nerozlíšiteľné objekty – vlastne je to ten istý objekt. Topológia považuje dva objekty za ekvivalentné (technický termín je homeomorfné) ak je možné jeden dostať z druhého spojitou deformáciou. Je zrejmé, že spojitou deformáciou možno zo štvorca dostať kruh. Tento aspekt topológie ukazuje, že ide o jazyk, ktorý má v sebe zabudovaný Kleinov aparát transformačných grúp. Topológia, presne v duchu Kleina, skúma invarianty určitej grupy transformácií. Rozdiel je len v tom, že nejde o podgrupu projektívnej grupy, ako tomu bolo v prípade *Erlangenského programu*, ale o grupu homeomorfizmov. Ale princíp je rovnaký. Topologické vlastnosti sa definujú ako invarianty homeomorfizmov. Preto je zrejmé, že topológia od začiatku využíva kleinovskú integratívnu formu jazyka.

Riemannov jazyk však obsahuje niečo zásadne nového: ***rezanie a lepenie***. Tieto operácie ležia za hranicami *Erlangenského programu*. Ak by sme náhodou rozrezali projektívnu rovinu, rozbili by sme tým projektívnu grupu a tým aj celú štruktúru Kleinovho jazyka. To znamená, že rezanie a lepenie sú radikálnejšie operácie ako geometrické transformácie. Keď uvažujeme štvorec, tak jeho vnútru prislúcha určitá grupa transformácií. Keď zo štvorca vytvoríme valcovú plochu, táto grupa sa zásadne zmení, lebo pribudnú transformácie spočívajúce v rotácii valcovej plochy okolo jej osi. Keď z valcovej plochy vytvoríme torus, grupa transformácií sa opäť obohatí. Preto, keby bytosti žijúce na valcovej ploche alebo toruse vytvorili svoj vlastný *Erlangenský program*, za základ by zobrali nie projektívnu grupu, ako Klein, ale grupu transformácií valcovej plochy resp. torusu.

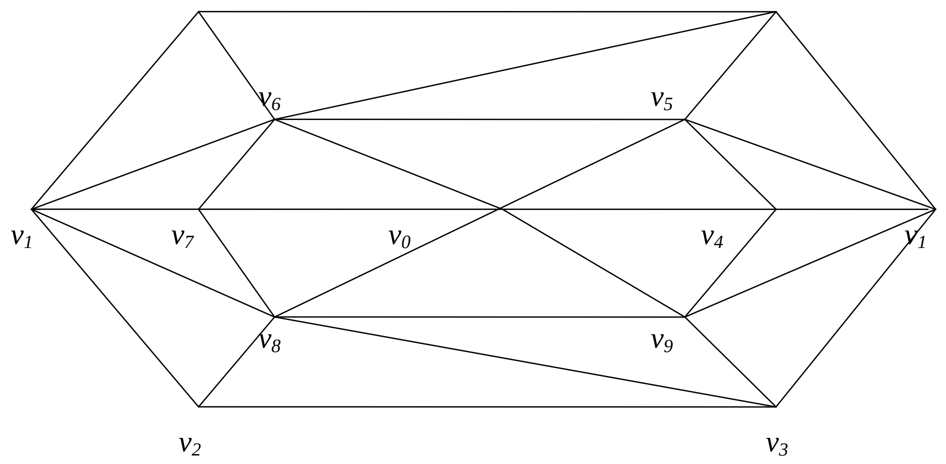
Teda každý z uvažovaných objektov má vlastnú geometriu, prislúchajúcu jeho Kleinovej grupe a riemannovské rezanie a lepenie ide priečne cez jednotlivé geometrie, umožňuje prejsť od jednej takejto geometrie k druhej. ***Riemannov jazyk opisuje konštitutívne akty, pomocou ktorých vytvárame plochy.*** Preto forma jazyka, ktorú prináša Riemann, je ***implicitná konštitutívna forma.*** Implicitná, lebo Riemann nedokáže explicitne povedať, ako sa máme oslobodiť od trojrozmerného priestoru a čo presne máme urobiť, aby sme nahliadli Kleinovu fľašu. Konštitutívna, lebo preberá na svoje plecia úlohu, ktorú geometria doposiaľ zverovala priestoru, úlohu konštituovať objekty. Riemann našiel spôsob, ako sa konštitutívnej úlohy zmocniť. V tom pripomína Cayleyho uchopenie metriky pomocou absolúty. V oboch prípadoch sa niečo, čo bolo dané, čo predstavovalo apriórnu vlastnosť priestoru, nahrádza aposteriórnou konštrukciou.

b. Explicitný variant konštitutívnej formy - Poincaré

Zásadným problémom Riemannovho jazyka je implicitný charakter jeho formy. Na jednej strane sa opiera o geometrický názor (vyžaduje predstaviť si kroky konštrukcie projektívnej roviny). Na druhej strane však vyžaduje, aby sme sa zriekli viazanosti názoru na trojrozmerný priestor (a uverili, že uvedené kroky vytvoria projektívnu rovinu, aj keď tú v trojrozmernom priestore nemožno zostrojiť). Cestu z tejto dilemy priniesol Henri Poincaré a volá sa kombinatorická topológia. Kombinatorická topológia prináša zabudovanie konštitutívnej formy do jazyka. Podobne ako v prípade Beltramiho modelu, nebudeme sledovať detaily historického vývinu. Opíšeme iba zjednodušenú verziu jazyka kombinatorickej topológie, predloženú Brouwerom.

Keď chceme reprezentovať projektívnu rovinu, nebudeme hovoriť o lepení (ktoré sa nedá uskutočniť) a nebudeme žiadať, aby si čitateľ odmyslel priestor (čo nedokáže urobiť). Zoberieme obrázok Riemannovho jazyka a rozdelíme ho na trojuholníky.

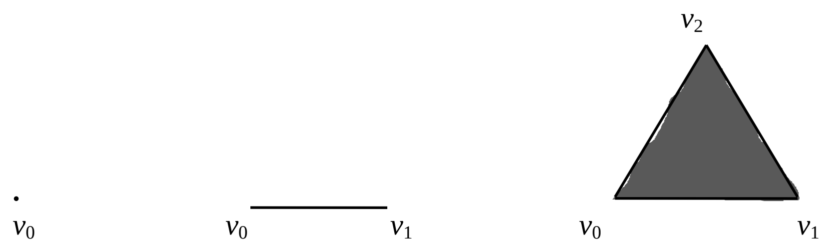
v_3 v_2



Čitateľovi sa možno zdá, že sme pri triangulácii boli príliš veľkorysí a zvolili sme príliš mnoho trojuholníkov. Išlo však o to, aby žiadne dve hrany, zodpovedajúce rôznym úsečkám nedostali to isté pomenovanie. Zrejme šesťuholník ($v_4v_5v_6v_7v_8v_9$) predstavuje kruh, kým vonkajší pás predstavuje Möbiov list, takže príslušný objekt je projektívna rovina. Teraz definujeme *k*-rozmerný komplex.

Definícia 1: *Nech $k \geq 0$. k-rozmerným simplexom rozumieme konvexný obal $k + 1$ lineárne nezávislých bodov $v_0, v_1, \ldots, v_k \in R^n$. Píšeme $\sigma = v_0v_1 \ldots v_k$. Body v_i sa nazývajú vrcholmi simplexu.*

Definícia 2: *Nech $\sigma = v_0v_1 \ldots v_k$ je k-rozmerný simplex a nech $\{w_0, w_1, \ldots, w_l\}$ je neprázdna podmnožina množiny $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, pričom $w_i \neq w_j$ pre $i \neq j$. Potom $\tau = w_0w_1 \ldots w_l$ sa nazýva l-rozmernou stenou simplexu σ.*

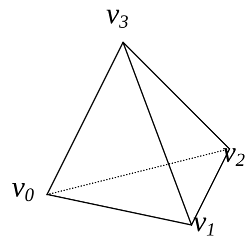


Bod v_0 je 0-rozmerný simplex, úsečka v_0v_1 je jednorozmerný simplex a trojuholník $v_0v_1v_2$ je dvojrozmerný simplex. Simplexy predstavujú vždy najjednoduchší útvar príslušnej dimenzie. Takto v_0 a v_1 sú 0-rozmernými stenami a v_0v_1 je 1-rozmernou stenou 1-rozmerného simplexu v_0v_1. Iné steny tento simplex nemá. Simplex $v_0v_1v_2$ má tri 0-rozmerné, tri 1-rozmerné a jednu 2-rozmernú stenu.

Definícia 3: *Simpliciálny komplex K je konečný súbor simplexov v R^n taký, že:*
1. Ak $\sigma \in K$ tak aj všetky steny simplexu σ patria do K
2. Ak $\sigma, \tau \in K$ tak $\sigma \cap \tau = \emptyset$ alebo $\sigma \cap \tau$ je spoločnou stenou simplexov σ a τ

Napríklad sféru (t.j. povrch gule), čo je z topologického hľadiska objekt ekvivalentný s povrchom štvorstena, možno reprezentovať ako nasledujúci simpliciálny komplex:

$$K_S = \{v_0v_1v_2, v_0v_1v_3, v_0v_2v_3, v_1v_2v_3, v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_0, v_1, v_2, v_3\}$$



sféra

Podobne, uvedenej triangulácii projektívnej roviny zodpovedá simpliciálny komplex:

$K_P = \{v_1v_6v_3, v_2v_3v_6, v_2v_6v_5, v_1v_2v_5, v_1v_5v_4, v_7v_0v_6, v_1v_9v_3, v_3v_9v_8, v_2v_3v_8, v_1v_2v_8, v_1v_8v_7, v_1v_7v_6, v_1v_4v_3, v_6v_0v_5, v_5v_0v_4, v_0v_9v_4, v_8v_9v_0, v_7v_8v_0, v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_1v_9, v_2v_3, v_2v_5, v_2v_6, v_2v_8, v_3v_6, v_3v_8, v_3v_9, v_4v_5, v_4v_9, v_4v_0, v_5v_6, v_5v_0, v_6v_7, v_6v_0, v_7v_8, v_7v_0, v_8v_9, v_8v_0, v_9v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_0\}$

Teraz môžeme zabudnúť na Riemannov obrázok. Simpliciálny komplex K_P reprezentuje projektívnu rovinu bez akéhokoľvek odvolávania sa na lepenie. Hrana v_1v_2 v trojuholníkoch $v_1v_2v_5$ a $v_1v_2v_8$ je jednoducho ***tá istá hrana***. Na obrázku je prítomná dvakrát, raz vpravo dole, raz vľavo hore. Ale to je problém obrázka. Projektívnu rovinu nie je možné nakresliť bez toho, aby sme ju rozrezali, a preto hrany tvoriace rez budú na obrázku prítomné dvakrát. Naproti tomu simpliciálny komplex reprezentuje príslušnú plochu bez odvolávania sa na rezanie či lepenie. Preto v komplexe je každý vrchol, každá hrana a každá stena projektívnej roviny uvedená len raz.

Zbavili sme sa obrázkov, nezbavili sme sa však priestoru. Zatiaľ sme totiž definovali iba takzvaný *konkrétny simpliciálny komplex*, komplex, ktorý sídli v niektorom z priestorov R^n (pozri definíciu 1). Preto ďalším krokom je oddeliť jazyk simpliciálnych komplexov od odvolávania sa na priestor. Dosiahneme to tak, že uvažovaný súbor symbolov zbavíme jeho geometrickej interpretácie. Za týmto účelom definujeme tzv. *abstraktný simpliciálny komplex*, čo bude iba súbor symbolov.

Symboly, ktoré sme uviedli pre sféru ($v_0v_1v_2$ až v_3) či pre projektívnu rovinu ($v_1v_6v_3$ až v_{10}) zachytávajú všetko podstatné o sfére či o projektívnej rovine. Všetky topologické informácie o príslušnom objekte – jeho súvislosť (t.j. že je to jeden kus), to, že má vnútro (že obopína určitú dutinu) a že toto vnútro je jednoduché (na rozdiel od vnútra torusu), všetky tieto informácie možno vyčítať z uvedených symbolov bez toho, aby sme sa museli odvolávať na nejaký obrázok či priestor.

Poincaré vybudoval aparát, umožňujúci na základe abstraktných simpliciálnych komplexov určiť základné topologické invarianty. Bez toho, že by sa utiekal k akémukoľvek obrázku, bez toho, že by sa opieral o akýkoľvek priestor, len na základe symbolov ukázal, ako je možné vypočítať tzv. Bettiho čísla (ktoré charakterizujú súvislosť, existenciu vnútra, či je to vnútro jednoduché, alebo prstencovitého tvaru). Plocha je ***konštituovaná*** tým, ako sa na seba príslušné trojuholníky jej triangulácie napájajú. Žiadnu inú informáciu pre odvodenie topologických invariantov nepotrebujeme a presne túto informáciu zachytáva abstraktný simpliciálny komplex. Preto možno povedať, že ***Poincaré zabudoval Riemannove konštitutívne akty do jazyka***. Namiesto lepenia hrán štvorca v našej mysli (lebo skutočné lepenie sa často nedá uskutočniť a tak ostáva na nás, aby sme sa tvárili, že vieme, čo by z lepenia vzišlo, i keď v skutočnosti z neho nič vzísť nemôže) vytvoríme trianguláciu. Preto jazyk kombinatorickej topológie[27] je jazyk s explicitnou ***konštitutívnou formou***. Je to jazyk, ktorým sa matematika oslobodila od závislosti na priestore, našla spôsob, ako je možné hovoriť o objektoch nezávisle od toho, či ich je alebo nie je možné vytvoriť v trojrozmernom priestore. Simpliciálny komplex prislúchajúci projektívnej rovine sa v ničom zásadne neodlišuje od komplexu prislúchajúceho sfére. To, že sa nedá uskutočniť v trojrozmernom priestore, je vedľajšie.

2.1.A.6 Konceptuálna forma jazyka syntetickej geometrie

Jedným z objavov, ktoré priniesla teória množín, bolo uvedomenie si skutočnosti, že všetky konštitutívne akty, na ktorých sa zakladala konštitutívna forma jazyka, možno vyložiť z jednotného hľadiska, ako uchopenie určitého súboru prvkov do jedného celku. Cantor nazval takéto súbory množinami. Napríklad simpliciálny komplex je uchopením určitých simplexov do jedného celku a je teda vlastne množinou. Forma jazyka ktorá nasleduje po konštitutívnej forme je založená práve na explicitnom využívaní množinového prístupu. Keď si uvedomíme, že základná funkcia pojmov je umožniť vyčleniť určitý súbor objektov, možno formu jazyka syntetickej geometrie budovanú pomocou teórie množín nazvať ***konceptuálnou formou***. Ako v predošlých prípadoch, aj teraz nová forma existuje v dvoch variantoch: implicitnom a explicitnom.

a. Implicitný variant konceptuálnej formy - Hilbert

Jeden zo spolutvorcov teórie množín, Richard Dedekind, v stati *Spojitosť a iracionálne čísla* (Dedekind 1872) uvádza dnes už klasickú konštrukciu reálnych čísel pomocou rezov. Rezy sú podľa Dedekinda množiny racionálnych čísel, spĺňajúce určité špeciálne podmienky. Dedekind nehovorí o množinách ale o triedach; pojem triedy však používa v rovnakom význame, ako Cantor používal pojem množiny. Dedekindova konštrukcia vykazuje všetky aspekty, typické pre konštitutívnu formu jazyka: nové objekty (reálne čísla) vznikajú pomocou *konštitutívnych aktov* (Dedekind priamo hovorí, že pomocou rezu vytvárame nové iracionálne číslo). Navyše tieto akty spočívajú v tom, že sa určitý súbor objektov (súbor racionálnych čísel) *uchopí ako jeden celok*. Dedekindov rez je tak z epistemologického hľadiska paralelný s Poincarého sympliciálnym komplexom. Tento aspekt Dedekindovho článku je však teraz vedľajší. Z pohľadu dejín syntetickej geometrie je na Dedekindovom článku dôležitá poznámka o spojitosti číselnej osi:

> *„Je mi veľmi milé, ak každý pokladá horeuvedený princíp za taký zrejmý a taký zhodný so svojimi predstavami o priamke; pretože ja nie som schopný podať akýkoľvek dôkaz jeho správnosti, a nikto toho nie je schopný. Predpoklad tejto vlastnosti priamky nie je nič iné než axióma, až ktorou priamke priznáme spojitosť, ktorou spojitosť do priamky vmyslíme. Ak vôbec má priestor reálnu existenciu, tak predsa nemusí byť nevyhnutne spojitý; nespočetné z jeho vlastností by ostali tie isté, ak by aj bol nespojitý“*(Dedekind 1872, s. 12).

Táto poznámka naznačuje, že spojitosť priamky či kružnice, ktorú napríklad Euklides predpokladal, nie je automaticky zaručená. Rovina, obsahujúca len body, ktorých obe súradnice sú racionálne čísla, je modelom Euklidových axióm. V takomto modeli sa však dve kružnice, ktorých súčet polomerov je väčší ako vzdialenosť ich stredov a rozdiel polomerov je od tejto vzdialenosti menší, nemusia pretínať. Kandidát na ich priesečník môže mať niektorú súradnicu iracionálnu, a teda v modeli nemusí existovať. Euklides však pri viacerých dôkazoch predpokladá, že priesečníky vhodne umiestnených kružníc existujú. Existencia týchto bodov (ako ukazuje model roviny tvorenej bodmi s racionálnymi súradnicami) nie je zaručená Euklidovými axiómami. Euklides ju teda prijímal na základe názoru.

Krátko po zverejnení Dedekindovej state sa objavujú práce *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Pasch 1882) a *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert 1899), ktoré túto medzeru v Euklidovi zapĺňajú. Robia to tak, že k pôvodným Euklidovým axiómam pridávajú nové axiómy. V Hilbertovom systéme to je Archimedova axióma a axióma lineárnej úplnosti:

> ***Archimedova axióma***. *Nech AB a CD sú dve ľubovoľné úsečky; potom na priamke AB existuje konečný počet bodov* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, *takých, že úsečky* $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ *sú zhodné s úsečkou CD a bod B sa nachádza medzi A a* A_n.
>
> ***Axióma lineárnej úplnosti***. *Body priamky tvoria sústavu, ktorá pri zachovaní usporiadania, prvej axiómy o zhodnosti a Archimedovej axiómy nepripúšťa žiadne rozšírenie, t. j. k tomuto systému bodov nemožno pridať ešte ďalšie body tak, aby v systéme, vytvorenom pôvodnými a dodanými bodmi, boli splnené všetky axiómy.*

Po doplnení týchto axióm a dôkaze klasických viet geometrie Hilbert dokazuje bezospornosť a vzájomnú nezávislosť axióm svojho systému. Všetky jeho dôkazy sú prísne logické, argumentácia sa v žiadnom kroku neopiera o nič, čo by nebolo explicitne obsiahnuté v axiómach. ***Geometriu tým oddeľuje od názoru a od akejkoľvek a priori danej interpretácie svojich základných termínov***.

Pri predošlej (konštitutívnej) forme jazyk prebral úlohu *konštituovať existenciu objektov* a tým umožnil existenciu objektom, pre ktoré je trojrozmerný priestor malý. Takýmto objektom je napríklad projektívna rovina. Práca s takýmito objektmi ako aj dokazovanie viet o nich bola však do veľkej miery ešte stále intuitívna. Jazyka totiž prebral iba úlohu konštituovať existenciu objektov, kým *esencia objektov* bola ešte stále daná prirodzene. Projektívna rovina je tým, čím aj vždy bola, na jej podstate sa nič nemení, iba jej existencia je zabezpečená konštrukciou (pomocou simpliciálnych komplexov). Objekt má stále prirodzene dané vlastnosti.

Hilbertom vstupuje na scénu nová forma jazyka, v rámci ktorej už objekt má iba tie vlastnosti, ktoré sú konštituované pomocou axióm. Teda nielen existencia, ale aj samotná ***esencia objektov začína byť konštituovaná jazykom***. Teória sa tak odpútava od názornej danosti objektov, na opis ktorých bola pôvodne vytvorená. Z Hilbertovho hľadiska je jedno, čo si predstavujeme, keď vytvárame matematickú teóriu. Používať pri dôkazoch smieme to a len to, čo sme explicitne uviedli v axiómach. Hilbertovou axiomatikou tak začína vylúčenie intuície zo základov geometrie. Formu jazyka, ktorú do geometrie zaviedol Hilbert navrhujem nazývať ***konceptuálnou formou jazyka***. Je to forma jazyka, v rámci ktorej sa konceptuálna stavba matematických teórií očisťuje od intuície. Samozrejme, pojmy hrali dôležitú úlohu aj v predošlých etapách rozvoja geometrie, ale pojmy boli beznádejne poprepletané s intuíciou (ako beznádejne, to ukazuje Dedekindom odhalená nesprávnosť viacerých Euklidových dôkazov).

b. Explicitný variant konceptuálnej formy - Tarski

Hilbertov axiomatický systém predstavuje implicitný variant konceptuálnej formy jazyka. Implicitný preto, lebo Hilbert sa príliš drží tradície a vlastne len zapĺňa medzery ktoré boli nájdené v Euklidovom systéme. Euklidov predpoklad o existencii rôznych druhov objektov však Hilbert preberá. Tieto objekty zbavuje spojenia s nazeraním, ale naďalej udržuje ich podstatnú rozdielnosť (ktorá má svoj pôvod v nazeraní), keď *Základy geometrie* začína vetou:

> *Myslíme tri rôzne systémy vecí: veci prvého systému nazývame* **bodmi** *a označujeme A, B, C ...; veci druhého systému nazývame* **priamkami** *a označujeme a, b, c, ...; veci tretieho systému nazývame* **rovinami** *a označujeme α, β, γ, ...* Body, priamky a roviny *myslíme v určitých vzťahoch, a tieto vzťahy označujeme rôznymi slovami, ako: ležať, medzi, zhodný, rovnobežný, spojitý. Presné a pre matematické účely úplný opis týchto vzťahov získavame* ***axiómami geometrie***. (Hilbert 1899, s. 2).

Zrieknutie sa intuície pri budovaní geometrie naznačuje slovné spojenie „*pre matematické účely úplný opis*“ v poslednej vete citátu. V spojení „*myslíme tri rôzne systémy vecí*“ na začiatku citátu slovo *systém* znamená množinu a tak Hilbertova axiomatizácia geometrie do istej miery využíva množinový prístup. Ale len do istej miery, lebo Hilbert chápe priamky a roviny rovnako ako Euklides, ako samostatné objekty a nie ako množiny bodov. To znamená, že zachováva určité aspekty tradičného chápania esencie geometrických objektov; esenciu teda nekonštituuje jazyk v jej úplnosti.

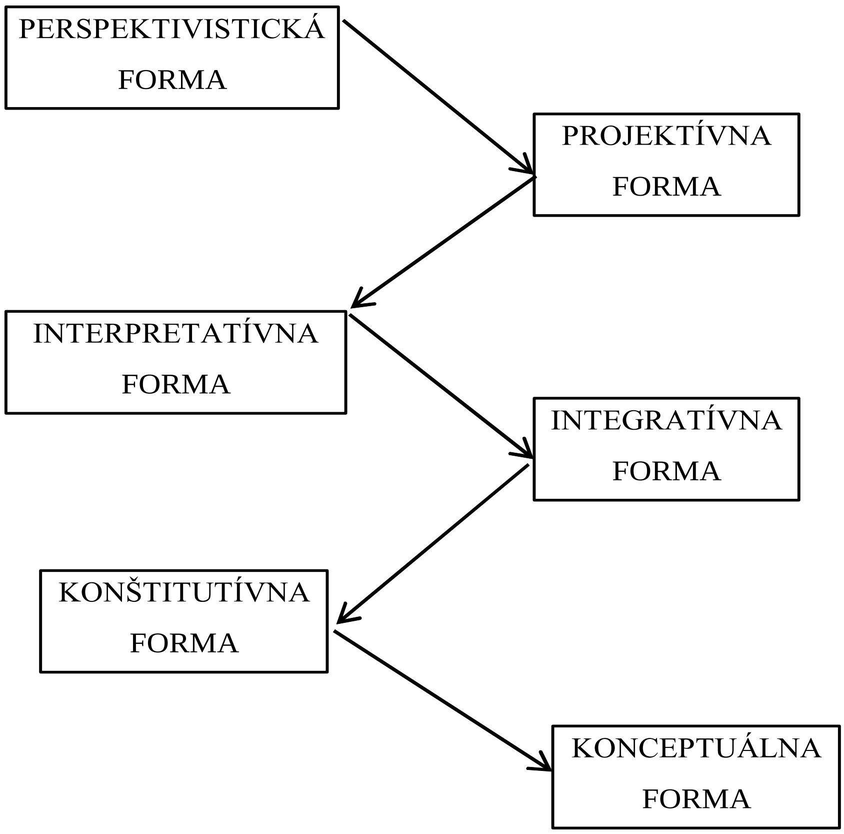
Pre vznik explicitnej podoby konceptuálnej formy jazyka syntetickej geometrie je podstatná premena priamok na množiny bodov. Paralelne s tým sa aj priestor, ktorý bol pôvodne chápaný ako prázdno do ktorého sú jednotlivé geometrické objekty umiestňované, mení na množinou bodov. Tým sa priestor stáva čímsi plným, je vyplnený až do posledného miestočka svojimi bodmi. Premena kontinua na množinu bodov sa udiala v druhej polovici 19. storočia pod vplyvom teórie funkcií reálnej premennej.[28] Do oblasti syntetickej geometrie sa dostala až v diele Alfreda Tarského.

Za medzník znamenajúci prechod k ***explicitnému variantu konceptuálnej formy jazyka syntetickej geometrie*** možno považovať Tarského prácu *The completeness of elementary algebra and geometry*. Ako píše vo svojej recenzii Alonzo Church (pozri Church 1969), výsledky obsiahnuté v tejto práci získal Tarski okolo roku 1930. Rukopis svojej monografie predložil k publikácii roku 1939 a kniha bola zaradená do edičného plánu vydavateľstva Hermann & Cie. v Paríži. Práca na knihe dosiahla štádium stránkových korektúr, avšak v dôsledku vojnových aktivít bola celá sadzba zničená a zachovali sa iba dva exempláre stránkových obťahov. Po vojne Tarski svoju knihu prepracoval a vydal pod názvom *A decision method for elementary algebra and geometry* (Tarski 1948).

Na rozdiel od Hilberta, ktorý má tri druhy objektov (body, priamky a roviny) má Tarski iba jediný druh objektov – body (priamky považuje za množiny bodov). Podobne namiesto Hilbertových piatich typov relácií medzi objektmi (ležať na, medzi, zhodný, rovnobežný, spojitý) zavádza Tarski iba dve relácie – ternárnu reláciu medzi a kvaternárnu reláciu ekvidištantnosti. To umožňuje Tarského systém formalizovať v rámci (jedno-sortového) predikátového počtu prvého rádu a skúmať ho prostriedkami teórie modelov. Tarski dokazuje hlboké výsledky – úplnosť a rozhodnuteľnosť svojho axiomatického systému elementárnej geometrie. Týmito výsledkami ukončíme náš výklad dejín syntetickej geometrie.

2.1.A.7 Prehľad objektácií v dejinách geometrie

V dejinách syntetickej geometrie sa podarilo odlíšiť šesť foriem jazyka, teda šesť spôsobov, ako je možné jazyk geometrie napojiť na svet, ktorý geometria opisuje. V prvej z nich, nazvanej *perspektivistická forma* je jazyk schopný reprezentovať predmety z určitého hľadiska, teda zachytiť nielen izolované objekty, ale aj ich rozmiestnenie v priestore. Všetko ostatné je syntetické, t.j. dané v geometrickom nazeraní. Postupne stále viac a viac aspektov geometrického názoru nachádza spredmetnenie v jazyku až nakoniec v *konceptuálnej forme* sa jazyk stáva nositeľom všetkých informácií o objektoch ktoré teória opisuje. Geometria sa tým úplne oddeľuje od nazerania a možno povedať, že dochádza k plnému spredmetneniu štruktúr nazerania v jazyku. Matematik už nepotrebuje žiadnu mimojazykovú skúsenosť, žiadne nazeranie, o ktoré by svoju prácu opieral. Axiómy a striktne logické dokazovanie sa stávajú praxou matematiky. Z disciplíny, ktorá bola vzorom syntetickej práce mysle sa stáva čisto analytická a dokonca rozhodnuteľná teória. Tento oblúk, ktorý geometria prekonala, sa snaží zachytiť schéma, zhŕňajúca výsledky našej rekonštrukcie.



2.1.B Historický opis objektácií v algebre

Algebra a geometria sú z hľadiska svojho matematického významu rovnocenné disciplíny. Z hľadiska ich miesta vo filozofii matematiky existuje však medzi nimi veľký rozdiel. Filozofické otázky geometrie predstavujú klasické témy vo filozofii matematiky; stačí spomenúť Platóna, Kanta, Russella či Husserla. Naproti tomu filozofické otázky algebry ostávajú na okraji pozornosti a okrem kníh Jacoba Kleina a Julea Vuillemina prakticky neexistuje filozofická literatúra venovaná algebre.

Ignorovanie algebry zo strany filozofie má mnoho príčin. Jednou z nich je dominantný vplyv antickej gréckej kultúry na formovanie európskej filozofickej tradície. Grécky prístup k analýze myslenia sa zakladá na metafore zrakovej skúsenosti.[29] Algebra, ktorá je svojím pôvodom arabská a svojou povahou taktylno-motorická, nemala v európskej filozofickej tradícii adekvátny pojmový aparát na tematizáciu zmien, ktoré sa v nej odohrali. Preto základné zlomy v dejinách algebry ostali mimo poľa osvetleného filozofickou reflexiou. Cieľom tejto kapitoly je opísať tieto zlomy a pokúsiť sa o ich filozofickú refleksiu. Použijeme pri tom periodizáciu, ku ktorej sme dospeli pri analýze vývinu geometrie. Čitateľa možno prekvapilo, že hneď potom, ako sme zdôraznili základný rozdiel medzi algebrou a geometriou, chceme preniesť periodizáciu dejín geometrie na vývin algebry. Tento rozpor je však len zdanlivý, lebo už periodizáciu geometrie sme sa pokúšali založiť na analýze zmien jazyka. Geometria slúžila len ako materiál, analýzou ktorého sme sa snažili odhaliť zmeny hlbšej, epistemickej štruktúry. Voľba geometrie za východisko epistemologických analýz bola prirodzená, lebo v západnej tradícii je geometria najlepšie reflektovaná, jej zmenám najhlbšie rozumieme. Ale potom, ako sme v dejinách geometrie našli určité regularity, je prirodzené použiť ich pri výklade dejín menej pochopenej časti západnej matematiky, akou je algebra. Takto treba chápať periodizáciu dejín algebry pomocou termínov ako perspektivistická či projektívna forma.

Perspektíva a projekcia sú geometrické pojmy, ale my ich používame v epistemologickom zmysle na charakterizáciu formy jazyka. Pre perspektivistickú formu jazyka je typické považovať deskripcie jazyka za obrazy skutočnosti, kým projektívna forma prináša ako základnú inováciu výrazy predstavujúce obrazy obrazov. V geometrii je tento prechod zrejmý, ale ukážeme, že podobný posun sa odohral aj v dejinách algebry. Spočiatku považovali matematici za riešenie rovnice jedinú hodnotu neznámej, ktorá zodpovedala podmienkam úlohy (a bola „obrazom“ skutočnej situácie). Až keď rozvoj formálneho aparátu umožnil vznik *substitúcií*[30] (teda vkladania „obrazov“ do „obrazu“), vzniklo presvedčenie, že za riešenie treba považovať všetky *korene rovnice*,[31] a nielen ten jediný, ktorý má priamy vzťah ku skutočnosti. Koreň prestáva byť „obrazom“ mimojazykovej skutočnosti a stáva sa z neho prvok štruktúry vzťahov. Substitúcia v mnohom pripomína premietanie známe z projektívnej geometrie. Pritom podobne ako Desargues doplnil rovinu o nekonečne vzdialené body, aby sa projekcia stala jednoznačnou, algebraici dopĺňajú číselný obor o záporné a komplexné čísla, aby sa algebraické úpravy stali ekvivalentnými. Takto existuje príbuznosť medzi premietaním geometrického útvaru a úpravou algebraického výrazu. Pri premietaní rovnako ako pri algebraických úpravách ide o transformácie výrazov jazyka spojené so snahou zachovať referenciu.

Keď prenesieme do algebry pojem formy jazyka, na ktorom sme založili analýzu geometrie, ukazuje sa, že úlohu, akú v geometrii hral pojem horizontu, hrajú v algebre význačné objekty jazyka, akými sú 0 a 1. Úlohou formy jazyka je vzájomne prepojiť epistemický subjekt jazyka so svetom jazyka. V geometrii, kde sa svet rozprestiera pred nami a subjekt má podobu hľadiska, je jeho poloha voči svetu fixovaná zadaním horizontu. Horizont má za úlohu je fixovať polohu subjektu vo svete. V algebre je situácia v porovnaní s geometriou v mnohom opačná. Algebra konštruuje svoj svet zvecňovaním aktov subjektu. Číslo 3 alebo $\sqrt{5}$, to sú pomocou symbolov zvecnené úkony počítania či odmocňovania. Svet algebry nie je oblasť, ktorá by bola odkrytá nášmu pohľadu ako niečo, voči čomu potrebujeme fixovať našu polohu. Je to práve naopak niečo, čo je pôvodne súčasťou nás, súčasťou nášho konania, a my len postupne získavame od toho odstup, dostávame to pomocou symbolickej reprezentácie pred seba. Dejiny algebry tak pripomínajú zvliekanie kože, akoby sa niečo, čo bolo pôvodne súčasťou tela, čo sprevádzalo jeho pohyby, zrazu od tela oddelilo a zmenilo sa na určitý predmet. Na tomto predmete ešte stále badať stopy ohybov tela, tento predmet ešte stále nesie v sebe pamäť jeho gest.[32] Pritom zvlečením jednej vrstvy sa odhalí vrstva hlbšia, na ktorej práve zvlečená vrstva pôvodne spočívala.

Svet algebry teda nie je odkrytý zraku a preto sa vymyká gréckemu duchu, ktorý chápe pravdu ako to, čo už nie je skryté pohľadu. Svet algebry je svetom, ktorý sa zrodil zvecnením určitej vrstvy jazyka. Preto nie je náhoda, že algebru nevytvorili Gréci ale Arabi. Svet algebry je plodom arabského ducha a dejiny algebry sú drámou, v ktorej sa západná kultúra postupne tohto sveta zmocňuje. Keď budeme opisovať dejiny algebry, budeme hovoriť o dejinách algebry v rámci západnej civilizácie. Budeme sledovať, ako v rámci západnej kultúry, kultúry „geometrického ducha“, kultúry, pre ktorú rozumieť znamená získať vhľad, prebiehal vývin algebry teda disciplíny, ktorej svet je zraku neprístupný, disciplíny, ktorá vychádza z motorickej skúsenosti, z manipulácie, z činnosti. Na rozdiel od gréckeho teoretika, ktorý nezasahuje do diania sveta a len sa mu prizerá, algebraik koná, počíta, upravuje rovnice, transformuje výrazy. Vhľad je v algebre možný vždy až dodatočne, až potom, ako sa podaril určitý trik. Okrem takejto pozitívnej skúsenosti je však v algebre častá aj skúsenosť negatívna, skúsenosť s tým, že trik nevyšiel, že úprava sa nepodarila, že rovnicu sa nepodarilo vyriešiť. Negatívna skúsenosť vedie ku konceptualizácii, k snahe porozumieť, prečo sme neuspeli. Jedna z ústredných línií vo vývine algebry bola motivovaná práve snahou porozumieť, prečo sa nikomu nedarí riešiť niektoré rovnice piateho stupňa, prečo napriek tomu, že sa daným problémom zaoberali najlepší matematici po dobu troch storočí, sa nikomu nepodarilo pohnúť s takou jednoduchou rovnicou ako napríklad $x^5 - 6x + 3 = 0$.

V problémoch tohto typu nejde o to, získať do niečoho vhľad, lebo spočiatku tu niet ničoho, na čom by mohol náš pohľad spočinúť. Je tu len neúspech, neúspech tiahnuci sa stáročiami. Existujú len haldy papiera zapĺňajúce smetné koše najlepších matematikov. Nie je tu nič pevné, len pohyb – rozbeh, postupnosť úprav, narazenie na neprekonateľné ťažkosti a nakoniec rezignácia. Dráma dejín algebry spočíva v tom, že sa podarilo nahmatať tvar neviditeľného múru, o ktorý sa rozbili všetky pokusy o riešenie rovnice piateho stupňa, podarilo sa uchopiť ho, vyniesť na svetlo, uvidieť a porozumieť. Tento múr sa volá *alternujúca grupa piatich prvkov*. Matematici, ktorým sa podarilo nahmatať jeho obrysy, sú Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel a Evariste Galois.

Keď arabská algebra prenikla cez Španielsko do Európy, začal sa dialóg západného ducha s týmto jemu bytostne cudzím, ale nepopierateľne hlbokým duchom algebry. Tento dialóg je vedený snahou vizualizovať, snahou dostať triky, úpravy a manipulácie pred oči, získať do nich vhľad. Ale vždy potom, ako sa podarí zvecniť jednu vrstvu algebraického myslenia, objaví sa pod ňou ďalšia, hlbšia rovina. V našej rekonštrukcii ukážeme, ako sa pod regulami objavili formuly, pod formulami formy, pod formami polia, pod poľami grupy, pod grupami ideály. Dejiny algebry sú dejinami postupného zvecňovania performácie, postupnou premenou algebraických úkonov na objekty.

2.1.B.1 Perspektivistická forma jazyka algebry

Arabský matematik Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí je autorom diela

Krátka kniha o počte algebry a al-muqábaly (Al-kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džabr wa-l-muqábala) venovaného riešeniu rovníc. Slovo *al-džabr*, ktoré je v titule, sa onedlho začalo používať na označenie náuky o rovniciach a z neho pochádza aj náš termín algebra. Al Chwárizmího kniha je pozoruhodná nielen tým, že nepoužíva žiadnu symboliku, ale dokonca nepoužíva ani znaky na označenie čísel a úplne všetko vyjadruje slovne. Pre mocniny neznámej používa zvláštne termíny: pre x – ***šai*** (vec), x^2 – ***mál*** (majetok), x^3 – ***káb*** (kocka), x^4 – *málmál*, x^5 – *kábmál*... Pri preklade boli arabské názvy pre mocniny neznámej nahradené latinskými ekvivalentmi, teda ***res*** pre *šai*, ***census*** pre *mál* a ***cubus*** pre *káb*. V talianskom prostredí sa presadilo talianske *cosa* namiesto latinského *res,* a tak sa algebra v 15. a 16. storočí označovala ako ***regula della cosa*** – pravidlo veci. Išlo o súbor pravidiel, ktoré pomocou manipulácií s vecou (t.j. s neznámou) hľadali riešenie určitej úlohy.

Al Chwárizmí prv, než sa pustil do riešenia nejakej „rovnice“, najprv ju upravil na tvar, v ktorom vystupovali len kladné koeficienty a pri najvyššej mocnine bola jednotka.[33] Aby to dosiahol, používal tri operácie: ***al-džabr*** - ak na jednej strane „rovnice“ vystupujú členy, ktoré treba ubrať, tak sa k obom stranám pripočíta zodpovedajúca hodnota; ***al-muqábala*** - ak vystupujú na oboch stranách rovnaké mocniny, odčíta sa menší člen na jednej strane od väčšieho na druhej, a ***al-rad*** - ak je koeficient pri najvyššej mocnine rôzny od jednotky, tak sa ním vydelí celá „rovnica“. Slovo rovnica sme písali v úvodzovkách, lebo, prísne vzaté, Al Chwárizmí žiadne rovnice nepoznal. Riešil vzťahy medzi veličinami, ktoré zapisoval pomocou viet prirodzeného jazyka. Jeho postup si ukážeme na príklade rovnice $x^2 + 10x = 39$, ktorú vyslovil v tvare: „*Majetok a desať vecí sa rovná tridsaťdeväť*“. Jeho riešenie je nasledovné: „*Zober polovicu počtu vecí, to jest päť, a vynásob ju samu sebou, dostaneš dvadsaťpäť. Pridaj to k tridsiatim deviatim, dostaneš šesťdesiatštyri. Zober druhú odmocninu alebo osem a odčítaj od nej polovicu počtu vecí, čo je päť. Výsledok tri je hľadaná vec*“. Tento postup je blízky babylonskej tradícii. Je to konkrétny návod na riešenie. Je tu však jeden zásadný rozdiel. Na rozdiel od babylonskej matematiky má al Chwárizmí ***pojem neznámej*** (*šai*), a preto jeho postup „*zober polovicu počtu vecí, vynásob ju samu sebou, pridaj k nej číslo, odmocni a od výsledku odčítaj polovicu počtu vecí*“ je použiteľný v prípade ľubovoľnej kvadratickej rovnice tohto tvaru. Teda kým babylonskí matematici počítali s konkrétnymi hodnotami koeficientov, al Chwárizmí uchopuje ***všeobecný postup***, a zakladá novú matematická disciplínu, ktorá raz dostane názov algebra.

Európa nadväzuje na arabskú matematiku v 12. storočí. Zvyk formulovať riešenia úloh v podobe ***verbálnych pravidiel,*** ktoré sa nazývali *regule*, sa udržal až do 16. storočia. Tak prvý výsledok európskej matematiky, ktorý prekračuje rámec znalostí antiky, bol sformulovaný v tomto tvare. Išlo o riešenie rovnice tretieho stupňa, uverejnené v knihe *Ars Magna Sive de Regulis Algebracis*[34] talianskeho matematika Girolama Cardana. Cardano formuluje rovnicu slovami: „*De cubo et rebus aequalibus numero*" a jeho riešenie udáva v tvare: „*Umocni na tretiu jednu tretinu počtu vecí, pridaj k tomu štvorec polovice čísla rovnice a vypočítaj druhú odmocninu z tohto celku. Toto zduplikuj a k jednej z dvoch pridaj polovicu čísla rovnice a od druhej odčítaj polovicu toho istého. Potom budeš mať binomium a jeho apotome.*[35] *Potom odčítaj tretiu odmocninu apotome od tretej odmocniny binomia, zvyšok, ktorý ostane je vec.*" Aby čitateľ lepšie ***videl***, čo Cardano ***robí***, uvedieme rovnicu v dnešnom ***tvare*** $x^3 + bx = c$ a jej riešenie zapíšeme pomocou dnešnej symboliky:

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}\ .$$

V Cardanovej dobe žiadne vzorce neexistovali a Cardano používal výlučne verbálny zápis. Svoje všeobecné pravidlo ilustruje na konkrétnej rovnici $x^3 + 6x = 20$, ktorej riešenie udáva v tvare:

„*RV: cub: R: 108 p: 10 m: RV: cub: R: 108 m: 10*"

kde ***RV*** znamená *radix universalis*; ***cub*** označuje, že odmocnina bola treťou odmocninou; ***R*** znamená *radix*; ***p*** je skratka za *plus*; ***m*** znamená *mínus*. Cardano koeficienty rovnice nevie vyjadriť všeobecne, preto ešte nemožno hovoriť o vzorci. Uvedený zápis sa týka riešenia konkrétnej rovnice. V našej symbolike jeho zápis vyzerá nasledovne:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

V Cardanovej dobe bola algebra, aspoň na povrchu, ešte stále *regula della cosa*, súbor verbálnych pravidiel na nájdenie veci. Pod týmto povrchom však dochádza k zásadným premenám.

2.1.B.2 Projektívna forma jazyka algebry

V predošlej kapitole sme uviedli Cardanovu regulu na riešenie rovnice tretieho stupňa. Aj keď samotná regula nevybočuje z al Chwárizmího pojatia algebry, nie je jasné, ako možno čosi tak zložité objaviť. Aby sme to pochopili, musíme sa vrátiť zhruba o storočie pred Cardana a opísať prvú etapu zvecňovania jazyka algebry, etapu spojenú so zrodom algebraickej symboliky. Potom, ako sa arabská matematika dostala na západ, vzniká snaha zapísať algebraické operácie pomocou symbolov, priviesť algebraické operácie pred oči. Tento proces trval dlho a spočiatku asi nebol plne uvedomelý. Tak Regiomontanus zavádza symbolické označenie pre odmocňovanie. Operáciu odmocňovania označuje veľkým písmenom *R*, pochádzajúcim od slova *radix*, takže napríklad tretiu odmocninu z ôsmich píše ako *R cubica de 8*. Tým odmocňovanie premieňa na odmocninu, ***operáciu nahrádza jej výsledkom***.[36] Michael Stifel nahrádza veľké *R* malým, takže tretiu odmocninu z 8 píše ako $\sqrt{c}8$. Hornú „nožičku“ písmena r predĺžil a napísal pod ňu prvé písmeno slova *cubica*, ktoré udáva, že ide o tretiu odmocninu. Číslo, ktoré sa odmocňuje, písal za tento znak. Naša konvencia písať odmocňované číslo pod predĺženú hornú „nožičku“ písmena r, a to, ktorú odmocninu počítame, udať pomocou ľavého horného indexu, teda tretiu odmocninu z ôsmich zapísať ako $\sqrt[3]{8}$, pochádza od René Descarta.

Snáď najvýznamnejším krokom pre rozvoj algebry bolo zavedenie symbolov na označenie mocnín neznámej. Prekladom arabských termínov šai, mal a kab vznikli európske res, zensus a cubus a postupne sa namiesto vypisovania celých slov začali používať prvé písmená, teda *r* pre *res*, *z* pre *zensus* a *c* pre *cubus*. Samozrejme, podobne ako Arabi ani kosisti (ako nazývali predstaviteľov tejto novej algebry, považujúcich algebru sa *regula della* ***cosa***) sa nezastavili pri tretej mocnine. Slobodne vytvárali mocniny vyššie, napríklad *zz* (*zenso di zensi*), *zc* (*zenso di cubo*) atď. Postupnou premenou algebraických úkonov na výrazy sa zrodila algebraická symbolika. Z odmocňovania sa stala odmocnina, z umocňovania sa stala mocnina a postupne sa zvecnila celá vrstva jazyka. Tento proces prebiehal pomaly a spočiatku asi nešlo o viac než o uľahčenie zápisu. Keď sa však nové symboly nahromadili v dostatočnom množstve, umožnili zásadný prelom v algebraickom myslení – vyriešenie rovnice tretieho stupňa. Cardanovu regulu sme uviedli v kapitole, opisujúcej algebru regulí, lebo svojím jazykom tam bezpochyby patrí. Pri jej objave je však už nutné použiť symboliku, a teda prekročiť rámec algebry regulí. Uvedieme rekonštrukciu tohto objavu, ktorú kvôli prehľadnosti zapíšeme v modernej symbolike. Historické okolnosti tohto objavu sú spletité a dramatické (pozri

Waerden 1980 s. 53-56, alebo Scholz 1990 s. 165-172). Uvažujme teda rovnicu tretieho stupňa

$$x^3 + bx = c,$$

teda Cardanove „*cubus a veci sú rovné číslu*“.[37] Rozhodujúcim krokom procesu riešenia je predpoklad, že výsledok bude mať tvar rozdielu dvoch tretích odmocnín. Ako k tomuto predpokladu matematici dospeli, to netušíme, je to jeden zo záhadných okamihov dejín matematiky, veľký krok do neznáma. Ak ho urobíme, ďalej sú už veci viac-menej jasné. Ale urobiť tento prvý krok, natrafiť na tú správnu kombináciu symbolov, to prináša obrat v dejinách algebry. Teda nech

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}\,. \tag{13}$$

Umocnením tohto výrazu na tretiu a následným porovnaním s pôvodnou rovnicou dostaneme vzťahy medzi neznámymi u a v a koeficientmi b a c:

$$b = 3\sqrt[3]{uv} \qquad\qquad c = u - v. \tag{14}$$

Keď z druhého vzťahu vyjadríme v a toto vyjadrenie dosadíme do prvého, získame rovnicu

$$u^2 - uc - \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 0, \tag{15}$$

ktorej koreň dostaneme podľa známeho vzťahu pre koreň kvadratickej rovnice v tvare

$$u = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}\,. \tag{16}$$

Neznámu v dostaneme pomocou druhého vzťahu v riadku (14).Výsledné riešenie je teda

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}\,.$$

Na tomto odvodení vidieť výhodu algebraickej symboliky, výhodu zvecnenia jazyka arabskej algebry. Hneď v prvom kroku sme predpokladali, že výsledok bude mať tvar rozdielu dvoch tretích odmocnín. V arabskej algebre neexistovali výrazy, ale len reguly. A regula nemá tvar, na regulu sa nepozeráme, ale načúvame jej, vykonávame jednotlivé úkony presne tak, ako nám hovorí. Až keď úpravy, ktoré regula predpisuje, zapíšeme pomocou symbolov, až keď sa proces počítania dostane pred oči, až vtedy sa vynorí tvar. ***Z reguly sa tak stáva formula***. Až formulu možno hľadať v určitom tvare, napríklad v tvare rozdielu dvoch tretích odmocnín. Regula žiadny tvar nemá. Pozoruhodná je aj formula (15). Je to rovnicu pre *u*. Ale čo je to *u*? To už nie je vec, to už nie je neznáma, ktorá označuje niečo skutočné. Keď proces riešenia rovnice prirovnáme k obrazu, tak sa tu zrazu vynára obraz v obraze. V procese riešenia rovnice pre neznámu *x* sme dospeli k ***rovnici pre pomocnú neznámu u***. Z technického hľadiska je to rozhodujúci krok v procese riešenia, lebo namiesto pôvodnej rovnice tretieho stupňa, dostávame pomocnú rovnicu, ktorá je len stupňa druhého, a teda ju vieme riešiť. Z epistemologického hľadiska tu ide o zásadný posun. Premennú *x*, o ktorej zo zadania úlohy presne vieme, čo označuje, nahrádzame nejakým *u*, o ktorom nevieme, čo to vlastne je. Jeho význam je určený len pomocou vzťahu (13). Premenná *u* nemá samostatnú referenciu. Referuje len sprostredkovane, prostredníctvom premennej *x*. Preto túto vrstvu jazyka algebry označujeme termínom *projektívna forma*.

Paradigmatickým príkladom projektívnej formy jazyka je Dürerova rytina, ktorá ilustruje stratu priamej referencie jazyka, a jej nahradenie referenciou nepriamou. Na Dürerovej rytine sa nachádza obraz v obraze podobne, ako v algebre vystupujú pomocné neznáme. Algebra tak prestáva byť *regula della cosa* a stáva sa z nej analytické umenie, umenie upravovať výrazy, umenie uhádnuť tvar výsledku, umenie nájsť šikovnú substitúciu. Toto umenie, ktoré tvorí jadro Cardanovho *Ars magna*, pripomína premietanie, ktoré tvorí jadro projektívnej formy jazyka geometrie. V oboch prípadoch ide o transformáciu výrazov jazyka pri zachovávaní referencie. Dôležité je však uvedomiť si, že tým, že sa zvecnila jedna vrstva jazyka, tým, že reguly nadobudli podobu formúl, tým, že z „umocni vec na druhú a pridaj päť vecí“ sa stalo „$x^2 + 5x$“, otvára sa možnosť manipulovať nielen s jednotlivými vecami, ale s celými formulami. Al Chwárizmí poznal tri operácie, *al-džabr, al-muqábala* a *al-rad*, nepoznal však ***substitúciu***. Jeho operácie predstavujú len premiestňovania členov rovnice pri zachovaní ich „tvaru“. V tomto al Chwárizmí pripomína euklidovskú geometriu, ktorá tiež skúmala len transformácie zachovávajúce tvar (posunutie, otočenie, rovnoľahlosť). Stredové premietanie môže zmeniť tvar útvaru, napríklad kružnicu môže premietnuť na hyperbolu. V tom sa premietanie podobá substitúcii. Substitúcia je transformácia rovnice, ktorá môže zásadným spôsobom zmeniť jej tvar, keď od rovnice tretieho stupňa pre *x* prejdeme ku kvadratickej rovnici pre *u*. V algebre sa nástup projektívnej formy vyznačuje objavením sa substitúcií, transformácií, ktoré menia „tvar“ výrazov. Pri týchto transformáciách sa už jednotlivé členy rovnice neprenášajú na druhú stranu rovnice ako celky – podobne, ako pri premietaní sa geometrický útvar neposúva po rovine ako jeden celok. Transformácie prislúchajúce k projektívnej forme jazyka rozkladajú objekty na časti a menia vzájomné usporiadanie týchto častí. Akoby sa prechodom k projektívnej forme ***ontologická báza jazyka posúvala hlbšie***. Už nejde o to, „chytiť vec do ruky a niekam ju preniesť“ (nech už je vecou neznáma a ide o to, preniesť ju na druhú stranu rovnice, alebo je ňou geometrický útvar a ide o to, premiestniť ho v rovine), ale mení sa tvar samotnej veci. Z x sa stáva $\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$, z kružnice sa stáva hyperbola. Pre projektívnu formu jazyka algebry je charakteristický vznik nepriamej referencie (pomocné premenné), vznik reprezentácie v reprezentácii (pomocné rovnice) a vznik transformácií meniacich tvar výrazu (substitúcie). Tieto zmeny sú navzájom podmienené, každá z nich predpokladá všetky ostatné. Preto hovoríme o zmene formy jazyka. Uvedené zmeny sme objavili pri analýze projektívnej geometrie, ale ukazuje sa, že ide o zmeny, majúce paralelu aj v algebre.[38]

Ďalším aspektom, ktorý prináša používanie pomocných rovníc, je zmena v tom, čo treba považovať za riešenie algebraickej úlohy. Pôvodne, v rámci algebry chápanej ako *regula della cosa,* bolo za riešenie úlohy považované len kladné riešenie, veď predsa vec nemôže byť záporná. Ešte aj Cardano pri riešení rovníc tretieho stupňa akceptuje len kladné riešenia. Ak neznáma označuje určitú skutočnú veličinu, tá nemôže byť „menej ako nič“. Keď však používame pomocné rovnice, ktorých premenné referujú len nepriamo, vďaka substitúciám, môže sa stať, že zápornému riešeniu pomocnej rovnice zodpovedá kladné riešenie pôvodnej rovnice. Preto u pomocných rovníc musíme brať do úvahy ako kladné, tak aj záporné riešenia. Cardano v tejto súvislosti hovorí o „skutočných“ a „falošných“ riešeniach. Pojem riešenia rovnice sa tak oslobodzuje od závislosti na priamej referencii. Za riešenie rovnice sa už považuje nielen to číslo, ktoré vyjadruje skutočný počet vecí, ale aj všetky ostatné čísla, ktoré spĺňajú rovnicu. Pridať ku „skutočným“ aj „falošné“ riešenia je nevyhnutné preto, aby sa úpravy rovníc stali ekvivalentnými úpravami. To opäť pripomína projektívnu geometriu, kde Desargues dopĺňa rovinu o nevlastné body, aby sa stredové premietanie stalo jednoznačným zobrazením. Teda ďalším aspektom projektívnej formy je dopĺňanie jazyka o výrazy, ktoré nemajú priamu referenciu (nevlastné body, záporné riešenia), ale ktoré napomáhajú fungovanie jazyka.

Hlavným nedostatkom kosistickej symboliky bolo, že používala rôzne písmená (r, z, c, ...) na označenie rôznych mocnín tej istej neznámej. Preto vlastne to, že písmená *r*, *z* a *c* sa týkajú toho istého, teda, že ak *r* je 7, tak *z* je nutne 49, bolo prítomné len implicitne. Ich metódy sa preto obmedzovali len na rovnice s jednou neznámou. Keď však vstúpili do hry substitúcie, stáva sa táto symbolika nedostatočnou. Pri substitúcii vystupujú vždy aspoň dve neznáme, stará a nová. Označovať ich obe tým istým písmenom je síce v istom zmysle na mieste, lebo obe koniec koncov referujú na tú istú vec, ale na druhej strane to vyvoláva zmätok. Druhým závažným nedostatkom kosistickej symboliky bolo to, že nemala symboly pre koeficienty rovnice, a teda aj keď samotná regula obsahoval termíny ako „počet vecí“, čo je zrejme koeficient pri prvej mocnine neznámej, symbolika to nevedela vyjadriť, a pri symbolických manipuláciách sa pracovalo len s konkrétnymi číslami. Roku 1591 vychádza dielo *In Artem Analyticam Isagoge* (Úvod do analytického umenia) francúzskeho matematika Francoisa Viéta, v ktorom je uvedený symbolizmus, ktorý je schopný pracovať naraz s viacerými neznámymi (t.j. zapísať substitúciu) a je tu zavedené aj symbolické rozlíšenie neznámej a parametra. Viétova myšlienka sa zakladala na tom, označovať vyššie mocniny neznámej nie iným písmenom ako kosisti, ale tým, že vedľa písmena sa slovne uvedie jeho mocnina, teda napríklad *A longitudo, A planum, A solidum* a podobne. To umožňuje do jednej rovnice zahrnúť viaceré neznáme. Písmeno nám označuje, o ktorú neznámu ide, tak povediac indikuje jej identitu, kým slová označujú rád mocniny. Tento krok umožňuje zapísať rovnice s viacerými neznámymi.

Viéte sa však v tomto bode nezastavil ale vo vylepšovaní jazyka algebry išiel ďalej a zaviedol odlíšenie parametra a neznámej. Kým matematici pred Viétom v procese riešenia úloh pracovali vždy s konkrétnymi číselnými hodnotami parametrov zo zadania, a aj keď si boli vedomí všeobecnosti svojich metód, t.j. vedeli že samotný postup je od konkrétnych hodnôt parametrov nezávislý a možno ho použiť aj v prípade iných hodnôt parametrov, túto všeobecnosť nedokázali vyjadriť v jazyku. Predstavovala iba implicitné poznanie, ktoré sa s jazykom spájalo. Viéte našiel spôsob ako sa možno oslobodiť od nutnosti vypisovať číselné hodnoty koeficientov. Začal aj koeficienty označovať písmenami. Aby sa mu neplietli parametre s neznámymi, neznáme označoval veľkými samohláskami (*A, E, I, O, U*) kým koeficienty spoluhláskami (*B, C, D, F, G, H*). Viéte bol prvý, kto aj koeficienty rovníc zapisoval pomocou písmen. Preto vlastne až od Viéta je možné hovoriť o formule, o všeobecnom vzorci, ktorý vyjadruje riešenie úlohy pomocou jej koeficientov. Pritom ale každá veličina mala rozmer: 1-*longitudo,* 2-*planum,* 3-*solidum,* 4-*plano-planum*, ... Rozmer veličiny písal slovne za symbolom, napríklad *A planum* je druhá mocnina neznámej *A*. Teda písmeno drží identitu veličiny, kým slovo udáva jej rozmer. Takto môže pracovať s rôznymi veličinami, môže ich substituovať, lebo písmeno označuje, ktorá veličina je v hre. Viéte chápal veličiny ako dimenzionálne objekty, a preto dodržiaval princíp homogenity. Sčítať a odčítať bolo možné iba veličiny rovnakej dimenzie, pričom výsledok bola veličina rovnakého rozmeru ako sčítance. Aj keď sa tým Viétova symbolika stala pomerne komplikovanou, predstavuje kvalitatívny krok vpred. Je to prvý univerzálny symbolický jazyk určený na manipuláciu s výrazmi.

Napríklad rovnicu $2x^3 - 3by^2 = c$ Viét písal ako

$$A_2\,cubus - B\ latus\ in\ A_3\ quadratum\ equatur\ C\ solido$$

Všimnime si, že u Viéta majú aj koeficienty rozmer (*B latus, C solido*), pričom taký, aby celá rovnica bola homogénna, čo sa týka dimenzie. Takéto chápanie rovníc je dodnes bežné vo fyzike. Viétova symbolika nemá znak pre sčítanie ani pre rovnosť a preto ich vyjadruje slovami (*addere, equatur*). Je aj pomerne ťažkopádna, lebo používa veľké množstvo slov. Naša konvencia označovať neznáme písmenami z konca abecedy (*x, y, z, ...*) a koeficienty písmenami so začiatku abecedy (*a, b, c, d, ...*), na označenie mocnín neznámej používať nie slová ale exponenty (x, x^2, x^3, ...) ako aj upustenie od princípu homogenity, tieto tri inovácie pochádzajú od Descarta. Descartes tak zásadne sprehľadnil a zjednodušil Viétove „analytické umenie". Základné princípy tohto „umenia" sú však u Viéta už v plnej sile. Je to prvý formálny jazyk, ktorý umožňuje explicitne vyjadriť formálne úpravy výrazov. Viéte si bol významu svojho objavu plne vedomý. Hovorí, že umožní vytvoriť „*všeobecnú metódu na riešenie všetkých problémov*". Táto metóda pozostávala z troch krokov: 1. Všetky veličiny treba označiť písmenami a ich vzťahy treba vyjadriť pomocou rovníc. 2. Overiť správnosť vyjadrenia úlohy pomocou rovníc. 3. Príslušné rovnice vyriešiť a nájsť vyjadrenie neznámej. Viéte končí svoju knihu vyhlásením: „*Analytické umenie si osobuje plným právom problém všetkých problémov, ktorým je: NENECHAŤ ŽIADNY PROBLÉM NEROZRIEŠENÝ*". Verí, že analytické umenie umožní vyriešiť všetky problémy. Ukázalo sa, že Viéte sa hlboko mýlil. Poznatok, že rovnice piateho stupňa sú neriešiteľné, je z epistemologického hľadiska jedným z najzaujímavejších poznatkov algebry.

2.1.B.3 Koordinatívna forma jazyka algebry

Jednou z Cardanových predností bola jeho systematickosť. Preto vedľa typu rovnice „*cubus a veci sú rovné číslu*“, ktorej riešenie sme vyššie rekonštruovali, uvádza aj riešenie zvyšných dvoch typov rovníc tretieho stupňa. Formuly vyjadrujúce riešenie týchto rovníc sú podobné formulám pre prípad, ktorý sme podrobne rekonštruovali, preto ich tu nebudeme analyzovať.[39] Uvedieme len jav, ktorý Cardano objavil, keď sa pokúsil riešiť pomerne nevinne vyzerajúcu rovnicu $\boldsymbol{x^3 = 7x + 6}$. Keď pre túto rovnicu použil osvedčený postup, dostal nepochopiteľný výsledok

$$x = \sqrt[3]{3+\sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}\,.$$

Pod druhou odmocninou sa objavilo záporné číslo. Máme vypočítať $\sqrt{-\frac{100}{27}}$, čo sa nedá urobiť, lebo umocnením žiadneho čísla nemôžeme dostať $-\frac{100}{27}$. Jazyk tu záhadným spôsobom zlyháva. Cardano je tak objaviteľom čohosi, z čoho sa neskôr stanú *komplexné čísla,*[40] a $\sqrt{-\frac{100}{27}}$ je vlastne prvým komplexným číslom v dejinách. Pre celý ďalší vývin algebry sa stáva rozhodujúcim porozumieť tomuto problému, pochopiť, čo sa deje, keď sa pod druhou odmocninou začnú objavovať záporné čísla. Cardano tu narazil na hranice analytického umenia. Manipulácie s formálnymi výrazmi ho priviedli do situácie, ktorej nerozumie, do situácie, kde ho regula vyzýva, aby urobil niečo, čo sa urobiť nedá. Z hľadiska projektívnej formy jazyka je odmocnina zo záporného čísla nezmysel.

Prvý krok na ceste k pochopeniu komplexných čísel bol umožnený oslobodením jazyka algebry od bezprostrednej naviazanosti na realitu a v osamostatnení algebraických výrazov od referencie. Tento proces prebiehal postupne a opieral sa o narastanie dôvery k formálnym úpravám, ktoré síce nevieme priamo interpretovať, ale v podstate im rozumieme. Algebraické výrazy sa tak prestávajú chápať ako formuly, ako vzorce vyjadrujúce určitú reálne existujúcu veličinu, a stále viac sa do popredia dostáva chápanie, podľa ktorého sú algebraické výrazy určité ***formy***,[41] formálne objekty vytvorené zo symbolov. Významným motívom tejto zmeny bola neprehľadnosť teórie rovníc tak, ako ju prezentoval Cardano. Cardano považoval rovnice $x^3 + bx = c$ a $x^3 = bx + c$ za rôzne problémy, lebo za koeficienty rovníc bral len kladné čísla. V prípade rovnice tretieho stupňa to ešte nepredstavuje až taký závažný problém, ale v prípade rovnice štvrtého stupňa je už jednotlivých typov sedem a u rovníc piateho stupňa, ktoré nás zaujímajú, ide už o pätnásť rôznych typov. Zorientovať sa v takejto spleti prípadov nie je jednoduché. Preto je prirodzené pokúsiť sa zložitosť situácie redukovať. Myšlienka, ako to urobiť, pochádza od Michaela Stifela, ktorého sme spomenuli v súvislosti so zavedením symbolu pre odmocninu. Vo svojej knihe *Arithmetica integra* (Úplná aritmetika) z roku 1544 Stifel zavádza pravidlá na počítanie so zápornými číslami, pričom záporné čísla interpretuje ako čísla menšie než nula. To je v rámci projektívnej formy jazyka algebry prirodzený krok, lebo záporné veličiny tu začínajú vystupovať ako hodnoty pomocných premenných. Stifel však išiel ďalej a záporné veličiny začal používať aj v úlohe koeficientov rovníc. Teda nielen pomocné veličiny, nepriamo označujúce počet vecí, ale aj parametre úlohy, teda koeficienty rovníc, môžu byť podľa neho záporné. To mu umožnilo spojiť všetkých pätnásť typov rovníc piateho stupňa do jedinej všeobecnej formy $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Rôzne typy vznikajú tak, že niektoré koeficienty tejto formy sú kladné a niektoré záporné, pričom záporné prenesieme na druhú stranu.

Stifel predtým, ako sa pustil do riešenia určitej rovnice, najprv všetky členy preniesol na jednu stranu rovnice, čím dostal rovnicu tvaru $p(x) = 0$. Tento krok prekračuje hranice Viétovho analytického umenia. U Viéta museli mať všetky členy rovnice rovnakú dimenziu, a teda na pravej strane nesmela byť nula. To, čím Stifel začína riešenie ľubovoľného problému, je teda z hľadiska projektívnej formy jazyka algebry nezmysel. U Stifela sa tak rodí pojem polynómu. *Polynómom* v algebre nazývame výraz tvaru $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + ... + dx + e$, kde n je prirodzené číslo, udávajúce stupeň polynómu, a a, b, c, d, ... sú čísla, ktoré môžu byť ako kladné, tak aj záporné a nazývajú sa jeho koeficientmi. Polynóm je teda výraz, ktorý v sebe zjednocuje celý rad rôznych rovníc. Na prvý pohľad sa môže zdať tento posun ako malý, ale bol to nevyhnutný krok na ceste k pochopeniu neriešiteľnosti rovníc piateho stupňa. Stifel odstránil podružné detaily, v ktorých sa pätnásť druhov rovníc piateho stupňa od seba líši, a umožnil matematikom sústrediť sa na ich podstatné spoločné aspekty. Takto sa dostávame k jednému zmyslu, v akom používame termín ***koordinovať***, ktorým sme označili toto štádium vývinu jazyka algebry. Ide o koordináciu rôznych typov rovníc do jednotného tvaru polynómu. Možno povedať, že koordináciou jednotlivých ***formúl*** sa rodí všeobecná ***forma*** – polynóm. Je to spoločný tvar všetkých rovníc daného stupňa, ktorý ostáva skrytý, ak sa usilujeme ukotviť jazyk v skutočnosti. Až keď Stifel prestal robiť rozdiely medzi kladnými a zápornými číslami, vynára sa jednota, ktorá sa na predošlom štádiu stratila v neprehľadnom množstve detailov.

Keď sa oslobodíme od chápania algebraických výrazov ako obrazov skutočnosti, ako tieto výrazy interpretovala projektívna forma jazyka, a začneme ich považovať za viac-menej samostatné formálne objekty, otvorí sa možnosť akceptovať odmocniny so záporných čísel jednoducho ako určitý typ výrazov. Týmto výrazom síce nemôžeme priradiť bezprostrednú denotáciu, nemôžeme povedať, čo vlastne označujú, predsa im však rozumieme, vieme s nimi formálne manipulovať. Toto chápanie je v pozadí knihy *Algebra* od Rafaela Bombelliho z roku 1572, ktorý uviedol pravidlá na sčítanie, odčítanie a násobenie týchto nových výrazov. Asi najkrajšie vyjadrenie tohto prístupu možno nájsť u Leonarda Eulera, ktorý vo svojej knihe *Vollständige Anleitung zur Algebre* z roku 1770 imaginárne veličiny nazýva nemožnými číslami (*numeri impossibile*), lebo nie sú ani menšie ako mula, ani rovné nule, ani väčšie ako nula, a píše: „*Nanucujú sa nášmu duchu, existujú v našej predstave a máme o nich dostatočný pojem, lebo vieme, že* $\sqrt{-4}$ *znamená číslo, ktoré násobené samé sebou dá* -4“. Teda aj keď v skutočnosti žiadna taká veličina, ktorá by po umocnení na druhú bola záporná, existovať nemôže, rozumieme, čo výraz $\sqrt{-4}$ znamená.

Prechod od formúl k formám je dôležitý aj z iného dôvodu. Ide o to, že ak za základné objekty algebry považujeme formuly, ostáva nám jeden z ústredných aspektov jazyka algebry skrytý. Týmto aspektom je to, že určitý polynóm má viacero koreňov, teda existuje viac čísel, ktoré vyhovujú zadaniu úlohy. V rámci perspektivistickej formy jazyka sa táto skutočnosť ignorovala, pretože v skutočnosti je počet vecí, ktorý hľadáme, jednoznačne určený. Preto matematici ignorovali ďalšie riešenia a ako jediné riešenie úlohy uvádzali to z riešení rovnice, ktoré vyhovovalo okolnostiam úlohy. Pritom si ani neuvedomovali, že určité riešenia ignorujú, lebo väčšinou išlo o záporné riešenia a tie boli z hľadiska perspektivistickej formy tak či tak neprijateľné. Vecí predsa nemôže byť menej ako nič. V rámci projektívnej formy jazyka sa situácia mierne zlepšila. U pomocných rovníc už bolo treba brať do úvahy aj záporné riešenia, lebo sa mohlo stať, že práve zápornej hodnote pomocnej neznámej zodpovedá „skutočné“ riešenie pôvodnej rovnice. Ale za riešenie úlohy matematici väčšinou akceptovalo aj tak len číslo, ktoré udávalo hľadaný „počet vecí“. Až keď snaha zakotviť jazyk algebry priamo v skutočnosti oslabla, odhalilo sa, že rovnice majú viac riešení. Pre pochopenie tejto skutočnosti bol prechod od algebraických formúl k algebraickým formám zásadný.

Od ***formuly*** očakávame, že nám „povie“ výsledok a dá jednoznačnú „odpoveď“ na otázku, ktorá nás zaujíma. Formula vyjadruje určité číslo, ktoré chceme vedieť, odpoveď na určitú otázku, ktorá nás zaujíma. ***Forma*** je naopak niečo, do čoho keď dosadíme určité číslo, dostaneme výsledok – hodnotu formy v danom čísle. Preto aj keď je ťažko prijateľné, že by určitá úloha mohla mať viac riešení (veď skutočnosť je jednoznačná), keď rovnicu vyjadrujúcu príslušnú úlohu pochopíme ako polynomiálnu formu, stane sa pochopiteľným, že tú istú hodnotu nadobúda pre viaceré argumenty. Preto po prechode od formúl k formám je prijateľné, že určitá rovnica má viac riešení. V istej podobe si túto skutočnosť uvedomil už aj Viéte, ktorý našiel vzťahy medzi koreňmi a koeficientami rovnice. Ale všetky korene, ktoré uvádza vo svojich príkladoch, sú kladné, lebo jazyk algebry ešte stále spája priamo so skutočnosťou. Až keď sa presadí chápanie rovnice ako formy, odhalí sa v úplnej všeobecnosti skutočnosť, ktorú objavili nezávisle Albert Girard a René Descartes, že totiž polynóm *n*-tého stupňa má *n* koreňov. To znamená, že rovnica tretieho stupňa má tri korene, rovnica piateho stupňa päť koreňov atď. Formula nás zaujímala len pre určité špeciálne hodnoty svojich parametrov, hodnoty, ktoré zodpovedajú zadaniu riešenej úlohy. Forma naopak priraďuje hodnotu každému číslu číselného oboru nezávisle od toho, či ide o číslo, ktoré nás zaujíma, pretože zodpovedá nejakej úlohe, alebo o číslo, ktoré je nám ľahostajné. Forma ***koordinuje*** čísla, podriaďuje ich svojim operáciám.

Osamostatnením formy nadobúda relatívnu samostatnosť aj druhý pól jazyka algebry – súbor veličín, ktoré do formy dosadzujeme. Od Euklida až po Descarta bol súčin dvoch veličín veličinou nového druhu. Tak súčinom dvoch úsečiek bol obdĺžnik, teda plocha. Súčinom obdĺžnika a úsečky bol hranol, teda objem. Kosisti síce prelomili bariéru trojrozmernosti, ktorá Euklida nepustila ďalej, ale v princípe sa pridŕžali jeho interpretácie algebraických operácií. Tak napríklad súčinom *res* a *cubus* je *zenso di zensi*, teda veličina vyššej dimenzie ako súčinitele. Dimenzionality veličín sa pridŕžal aj Viéte. Až Descartes opúšťa túto tradíciu a prináša zásadne novú interpretáciu algebraických operácií. Preňho po prvýkrát súčinom dvoch úsečiek x a y nie je obdĺžnik s plochou xy centimetrov štvorcových, ale úsečka dlhá xy centimetrov. Táto zmena predstavuje jeden z najvýznamnejších zlomov v dejinách algebry. Keď Descartes interpretuje súčin dvoch úsečiek opäť ako úsečku, vytvára systém veličín uzavretý na algebraické operácie. Preto s miernou dávkou ahistorizmu možno povedať, že od Descarta pochádza prvý príklad poľa. *Poľom* v algebre rozumieme súbor veličín, obsahujúci 0 a 1 a uzavretý na štyri aritmetické operácie (+, –, x, :). Z epistemologického hľadiska uzavretosť na operácie znamená uchopenie celku sveta.

Jazyk tak nadobúda zásadne novú úlohu, úlohu uchopiť jednotu sveta, uchopiť spôsob ***koordinácie*** jeho jednotlivých aspektov. Táto koordinácia existuje paralelne na dvoch úrovniach. Jednak ide o koordináciu rôznych typov rovníc (Cardanových *cubus a veci sú rovné číslu* atď.) do jednotnej formy polynómu a paralelne s tým o koordináciu rôznych druhov veličín (Viétových *longitudo, planum, solidum, plano-planum* atď.) do jednotného poľa. Na úrovni koordintívnej formy jazyk algebry nadobúda novú úlohu. Stáva sa prostriedkom, ktorý umožňuje pochopiť mnohoznačnosť riešení algebraických úloh, ktorá je v rámci projektívnej formy jazyka nepochopiteľná. Pokiaľ význam každého výrazu jazyka kotvíme v skutočnosti, zásadná nejednoznačnosť algebraických úloh je záhadou. Až v jazyku foriem sa stáva nejednoznačnosť prirodzenou vecou.

Keď si uvedomíme, že polynóm n-tého stupňa má práve n koreňov, dostáva problém riešenia rovníc nový obsah. Na miesto úlohy nájsť formulu, ktorá určí hľadanú hodnotu neznámej, sa dostáva úloha nájsť všetky čísla, ktoré vyhovujú danej forme. Inak povedané, treba nájsť čísla, pomocou ktorých sa príslušná forma dá rozložiť na lineárne činitele. Napríklad rozklad

$$x^3 - 8x^2 + x + 42 \quad = \quad (x - 7).(x - 3).(x + 2),$$

ukazuje, že čísla 7, 3 a –2 sú koreňmi polynómu $x^3 - 8x^2 + x + 42$. Riešiť rovnicu $x^3 - 8x^2 + x + 42 = 0$ znamená *nájsť všetky jej korene*. Ak sme ich našli, vieme formu $x^3 - 8x^2 + x + 42$ rozložiť na lineárne súčinitele $(x - 7)$, $(x - 3)$ a $(x + 2)$. Preto riešiť rovnicu znamená ***rozložiť formu na lineárne členy***.

2.1.B.4 Kompozitívna forma jazyka algebry

Potom, ako Girard a Descartes objavili, že polynóm n-tého stupňa má presne n koreňov, stalo sa nevyhnutným opraviť Cardanove formuly, ktoré, ako to už u formúl býva, dávajú len jedno jediné riešenie pre rovnicu tretieho stupňa. Rovnica tretieho stupňa má tri korene, a teda musíme pochopiť, ako dostať zvyšné dva, ktoré v Cardanovej formule nefigurujú. Holandský matematik Johann Hudde našiel postup umožňujúci nájsť všetky korene rovnice tretieho stupňa. Uvažujme rovnicu:

$$x^3 + px - q = 0$$

Hudde ju pomocou substitúcie $x = y - \frac{p}{3y}$ previedol na rovnicu

$$y^6 - qy^3 - (p/3)^3 = 0,$$

ktorá bola neskôr nazvaná ***Huddeho rezolventou***. Napriek tomu, že ide o rovnicu šiesteho stupňa, je jednoduchšia než pôvodná rovnica, lebo keď označíme $y^3 = V$, dostaneme rovnicu druhého stupňa

$$V^2 - qV - (p/3)^3 = 0,$$

ktorej dva korene dostaneme zo známeho vzorca pre riešenie kvadratickej rovnice

$$V_1 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{a} \qquad V_2 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,.$$

Keď sa chceme dostať od neznámej V späť k y, môžeme jednoducho zobrať z V tretiu odmocninu. Ale to nesmieme, lebo tak by sme mali len dva korene y, jeden ako tretiu odmocninu V_1 a druhý ako tretia odmocnina V_2. Ale y je koreňom rovnice šiesteho stupňa a rovnica šiesteho stupňa má šesť koreňov. Hudde si uvedomil, že odmocňovanie je krokom, pri ktorom strácame korene. Keď vo vzťahu $y^3 = V$ zoberieme namiesto V konkrétne číslo, napríklad 1, rovnica $y^3 = 1$ musí mať tri korene, lebo to je rovnica tretieho stupňa. Teda vedľa koreňa $y = 1$, ktorý každý vidí, musia existovať ešte dve ďalšie čísla, ktoré umocnené na tretiu dávajú 1. Sú to takzvané komplexné tretie odmocniny z 1:

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{a} \qquad \omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

kde sme písmenom i označili imaginárnu jednotku, teda $\sqrt{-1}$. Pomocou čísel ω a ω^2 možno vyjadriť všetkých šesť koreňov Huddeho rezolventy:

$$y_1 = \sqrt[3]{V_1}\,, \qquad y_2 = \omega.\sqrt[3]{V_1}\,, \qquad y_3 = \omega^2.\sqrt[3]{V_1}$$

$$y_4 = \sqrt[3]{V_2}\,, \qquad y_5 = \omega.\sqrt[3]{V_2}\,, \qquad y_6 = \omega^2.\sqrt[3]{V_2}\,.$$

Riešenia pôvodnej rovnice tretieho stupňa potom budú

$$x_1 = y_1 + y_4 = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2}$$

$$x_2 = y_3 + y_5 = \omega^2.\sqrt[3]{V_1} + \omega.\sqrt[3]{V_2}$$

$$x_3 = y_2 + y_6 = \omega.\sqrt[3]{V_1} + \omega^2.\sqrt[3]{V_2}\,.$$

Riešenia kubickej rovnice dostávame ako kombinácie dvoch tretích odmocnín, rovnako, ako tomu bolo u Cardana. Celkový postup je však symetrickejší, lebo kvadratická rovnica, ktorá určuje hodnoty výrazov pod príslušnými tretími odmocninami, je priamo zabudovaná do rovnice. Leonard Euler sa pokúsil zovšeobecniť Huddeho postup prípad všeobecného polynómu

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

Chcel nájsť pomocnú rovnicu, tzv. ***Eulerovu rezolventu***, ktorej korene y_i by boli zviazané s koreňmi príslušného polynómu podobnými vzťahmi, ako to bolo v prípade Huddeho rezolventy. Euler sa však nedostal ďalej, lebo rezolventa bola príliš vysokého stupňa. Pre rovnicu tretieho stupňa vychádza rezolventa 6-teho stupňa, pre rovnicu štvrtého stupňa dostaneme rezolventu 24-tého stupňa a pre prípad rovnice piateho stupňa vyjde Eulerova rezolventa 120-teho stupňa. Eulerovi sa nepodarilo nájsť trik analogický substitúcii $y^3 = V$, pomocou ktorého by znížil stupeň rezolventy zo 6 na 2.

V tomto bode vstupuje do diskusie Joseph Louis Lagrange, ktorý zovšeobecnil Eulerov postup a zaviedol nový typ rezolventy, ktorá dnes nesie jeho meno. ***Lagrangova rezolventa*** pre rovnicu štvrtého stupňa nie je polynóm 24-tého stupňa, ako to bolo v prípade Eulerovej rezolventy, ale je len 3-tieho stupňa. To je dôležitý krok vpred, lebo umožňuje nahradiť úlohu riešenia rovnice štvrtého stupňa úlohou riešenia jej rezolventy, ktorá je len tretieho stupňa. Lagrangovi sa podarilo ukázať, že postupy na riešenie rovníc tretieho a štvrtého stupňa, ktoré boli uvedené v Cardanovej *Ars Magna*, sa tiež zakladajú na rezolventách. Stačí sa pozrieť na odvodenie riešenia rovnice tretieho stupňa, v ktorom sa objavila pomocná rovnica druhého stupňa (ako vzťah (15)). Ale kým u Cardana sme dospeli k tejto pomocnej rovnici len vďaka triku, u Lagranga sa rezolventa objavuje s plným pochopením jej významu. Teda to, čo bolo prv len „šťastnou náhodou", sa u Lagranga mení na konceptuálne pochopenú metódu. Všetky doteraz úspešné postupy riešenia algebraických rovníc spočívali v prevode problému na rezolventu, ktorá bola nižšieho stupňa. Lagrange preto očakával, že podobne sa mu podarí nájsť aj pre rovnicu piateho stupňa rezolventu, ktorá bude stupňa štvrtého. Ale tu čakalo Lagranga sklamanie. V prípade rovnice piateho stupňa je Lagrangova rezolventa 6-teho stupňa. Šesť je síce podstatne menej ako 120, čo bol stupeň Eulerovej rezolventy, ale Lagrangova rezolventa je rovnako nepoužiteľná ako Eulerova, lebo je vyššieho stupňa ako riešená rovnica. Takže aj Lagrangov postup, ktorý pre rovnice tretieho a štvrtého stupňa dáva pekné výsledky, pri rovnici piateho stupňa zlyháva.

Ale nech už je to s úspechom Huddeho, Eulerovej a Lagrangovej rezolventy akokoľvek, jednu vec majú spoločné. Snažia riešenie pôvodnej rovnice poskladať, *skomponovať* z riešení pomocných rovníc. Kompozitívna forma sa teda usiluje riešenie určitého problému zložiť z riešení problémov iných. Namiesto plurality alternatívnych pohľadov na ten istý problém, ktorú priniesla projektívna forma, kompozitívna forma kladie pluralitu príbuzných problémov. Nejde jej o jednotný postup, podriadený univerzálnej metóde, o akú usiluje koordinatívna forma. Kompozitívnej forme vyhovuje pluralita. Za rovnicou určujúcou veličinu x, jej rezolventou zadávajúcou veličinu y a rovnicou pre komplexné odmocniny z jednotky kompozitívna forma nehľadá jednotu. Kompozitívna forma nechce rôzne prípady podriadiť jednotnému poriadku. Ide jej len o to, skomponovať z riešení pomocných problémov riešenie pôvodného problému.

2.1.B.5 Interpretatívna forma jazyka algebry

Hlavným prínosom interpretatívnej formy jazyka v algebre bolo prijatie komplexných čísiel medzi štandardné matematické objekty. Prijatie komplexných čísel je spojené so zvecnením ďalšej vrstvy jazyka algebry, zvecnením, ktoré sa však odohralo inak než zvecnenie sprevádzajúce zrod algebraickej symboliky. Kým pri zrode symboliky došlo k zvecneniu jednotlivých činností, teda k nahradeniu odmocňovania odmocninou a sčítania súčtom, pri prechode k interpretatívnej forme jazyka sa nezvecňujú činnosti. Odmocniť záporné číslo nie je možné, preto vlastne niet čo zvecňovať. Nemáme k dispozícii žiadny performatívny akt, ktorý by sme mohli prehlásiť za objekt. Odmocnina zo záporného čísla označuje skôr nemožnosť aktu, zlyhanie jazyka. Proces, ktorého završením je konštrukcia modelu komplexnej roviny, sa zásadne líši od zvecňovania činností. Spočiatku išlo len o prekonanie nedôvery voči výrazom obsahujúcim odmocniny zo záporných čísel a o ich pripojenie k jazyku. Odmocniny zo záporných čísel sa považovali za zvláštny druh výrazov, o ktorých sa síce nedalo povedať, čo označujú, ale bolo viac-menej jasné, ako s nimi treba narábať. Už projektívna forma priniesla do jazyka algebry záporné čísla ako výrazy, ktoré majú nepriamu referenciu. Preto sa matematici pokúsili aj komplexné čísla vyložiť ako výrazy, ktorých referencia je nepriama. Takýto výklad komplexných čísel je však odsúdený na neúspech. Záporné číslo sa substitúciou môže zmeniť na kladné, a možno ho teda považovať za „obraz obrazu veci“; u komplexných čísel však takáto zámena možná nie je. Komplexné číslo nemôže udávať žiadny počet vecí, lebo komplexné čísla nemožno usporiadať, lebo povedané Eulerovými slovami, „*nie sú ani menšie ani väčšie ako nič*“.

Druhý pokus o výklad odmocnín zo záporných čísel sa zakladá na myšlienke nepripisovať im nepriamy ale subjektívny význam. Descartes zaviedol termín ***imaginárne číslo*** na označenie odmocnín zo záporných čísel.[42] V *Geometrii* (Descartes 1637, 379) píše, že v prípade rovnice, ktorá má málo pravých (*vraies*, t.j. kladných) alebo falošných (*fausse*, t.j. záporných) koreňov, si môžeme predstaviť (*imaginer*) ešte ďalšie, imaginárne (*imaginaires*) korene. Imaginárnym koreňom nezodpovedajú žiadne skutočné veličiny. Descartes ich zavádza len preto, aby polynóm n-tého stupňa mal práve n koreňov. Euler vo svojej *Algebre* z roku 1770 píše o odmocninách zo záporných čísel, že

„nie sú ani väčšie, ani menšie ako nič; a nie sú ani nič, kvôli čomu ich musíme považovať za nemožné. Napriek tomu sa však predstavujú nášmu rozumu (Verstand), a nachádzajú miesto v našej obrazotvornosti (Einbildung); preto sa nazývajú aj imaginárne (eingebildete) čísla. Ale aj keď sú tieto čísla, ako napríklad $\sqrt{-4}$ *, podľa svojej povahy úplne nemožné, máme o nich dostatočný pojem, lebo vieme, že tým je naznačené číslo, ktoré násobené samé sebou dá ako výslewdok -4; a tento pojem je dostačujúci na to, aby sa tieto čísla podrobili pravidlám počítania* (Euler 1770, 61).“ Pre Eulera sú komplexné čísla veličiny, ktoré existujú len v našej imaginácii. Táto interpretácia komplexných čísel však nevie objasniť, ako je možné, že výpočty pomocou týchto neexistujúcich veličín vedú k platným výsledkom o reálnom svete. Je to podobné, ako keby biológ úvahami o kentauroch systematicky prinášal stále nové poznatky o koňoch a biológia by neustále potvrdzovala predpovede, ku ktorým ho jeho úvahy o kentauroch priviedli. Ak komplexné čísla umožňujú odhaliť poznatky o skutočnosti, musia so skutočnosťou nejako súvisieť. Ich subjektívna interpretácia je neuspokojivá.

Carl Friedrich Gauss vytvoril roku 1799 geometrický model komplexných čísel v tvare roviny. Problém s komplexnými číslami bol vyriešený nie tak, že by sa našla cesta, ako postupnosťou substitúcií priradiť výrazu $\sqrt{-1}$ referenciu v reálnom svete. Miesto toho došlo ku zvecneniu všetkých možných výrazov, ktorým nevieme priradiť referenciu, a až pre súbor všetkých komplexných čísel sa vytvoril model. Základná idea modelu komplexných čísel spočíva teda v tom, že sa nesnažíme interpretovať jednotlivé komplexné čísla, ale zvecníme celok sveta komplexných čísel. Nehľadáme interpretáciu pre jedno komplexné číslo, ale model pre celý ich obor. Gaussova rovina je tak asi ***prvým modelom v dejinách matematiky***, po prvýkrát sa tu konštruuje umelé univerzum objektov, v ktorom sa interpretuje jazyk ako celok. Gauss v tvorbe modelu predbieha Beltramiho o takmer 70 rokov. Z epistemického hľadiska sú si však Gaussov model komplexných čísel a Beltramiho model neeuklidovskej geometrie podobné. Predovšetkým, v oboch prípadoch slúži model na to, aby z ***určitej problematickej teórie urobil akceptovateľnú teóriu***. Pred Gaussom mali komplexné čísla pochybný status, podobne ako pred Beltramim bol nejasný status neeuklidovskej geometrie. Základná podobnosť medzi Gaussovou rovinou a Beltramiho modelom spočíva v tom, že obaja ***aktualizujú celok sveta***. Beltrami pomocou svojho modelu aktualizoval celok sveta neeuklidovskej geometrie. V dejinách geometrie až po Beltramiho svet vždy ubiehal von z obrázku, reprezentácie zachytávali vždy len fragment sveta. Naproti tomu Beltrami reprezentuje celok neeuklidovského sveta, keď horizont zobrazuje pomocou kružnice a priamky pomocou jej tetív. Podobne Gaussova rovina reprezentuje celok sveta komplexných čísel. Aj keď na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že keď komplexné čísla modeluje pomocou roviny, tak mu celok uniká, lebo rovina sa vymyká celkovému pohľadu. Ale nesmieme zabúdať, že Gaussov model nie je modelom geometrických čiar, ale je modelom algebraických výrazov. Preto i keď z geometrického hľadiska Gaussova rovina ubieha von zo zorného poľa, z algebraického hľadiska zachytáva celok sveta. Svet algebry je svetom činností, svetom operácií. Preto celok sveta znamená v algebre nie „byť celý pred očami“, ale „byť uzavretý na operácie“. A Gauss ukázal, že „súčet“, „súčin“, „rozdiel„ a „podiel“ dvoch bodov komplexnej roviny vytvára opäť bod tejto roviny. Teda Gaussova rovina predstavuje uzavreté univerzum, v ktorom možno interpretovať všetky algebraické operácie. Ďalšia podobnosť medzi Gaussovým a Beltramiho modelom spočíva v tom, že v oboch ide o ***zabudovanie prekladu do syntaxe jazyka***. Gauss priraďuje komplexnému číslu bod roviny, pričom ukazuje, ako možno algebraické operácie sčítania a násobenia komplexných čísel preložiť do jazyka geometrických operácií s bodmi roviny.[43] Beltrami zas priraďuje neeuklidovskej rovine body kruhu euklidovskej roviny, pričom ukazuje, ako sa pojmy neeuklidovskej geometrie dajú preložiť do jazyka euklidovskej geometrie tohto kruhu.

Gauss použil svoj model na dôkaz *základnej vety algebry*, ktorá hovorí, že každý polynóm *n*-tého stupňa má práve *n* koreňov. Dôkaz tejto vety s definitívnou platnosťou ukázal, že problém s rovnicami piateho stupňa, napríklad s rovnicou $x^5 - 6x + 3 = 0$ nespočíva v tom, že by nemali korene. V komplexnej rovine existuje päť bodov, ktorých súradnice spĺňajú uvedenú rovnicu. Problém s rovnicami piateho stupňa je teda subtílnejší. Spočíva v tom, že aj keď korene existujú, ***nie je možné vyjadriť ich prostriedkami jazyka algebry***. To znamená, že neexistuje vzorec, neexistuje formula vytvorená z celých čísel, aritmetických operácií (+, –, x, :) a odmocnín ($\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[17]{\ }$, $\sqrt[542]{\ }$, ...), ktorá by vyjadrovala tieto čísla. Aby sme túto situáciu mohli lepšie pochopiť, predstavme si obrovský hárok papiera, najlepšie nekonečný, na ktorom sú už napísané všetky algebraické vzorce. Sú na ňom formuly pozostávajúce z 500, 1 000, 1 000 000 alebo ľubovoľného iného konečného počtu znakov. Chceme dokázať, že na tomto papieri nie je napísaný ani jeden z piatich koreňov rovnice $x^5 - 6x + 3 = 0$. Ako to dokážeme? Nie je ťažké nahliadnuť, že keď sčítame, odčítame, vynásobíme alebo vydelíme dve algebraické formuly, opäť dostaneme algebraickú formulu. To znamená, že výrazy napísané na našom hárku papiera tvoria určitý uzavretý systém, ktorý sa odborne nazýva ***pole***. Musíme teda ukázať, že toto pole neobsahuje žiadny koreň uvedeného polynómu. Takto vidíme základnú epistemologickú výhodu, ktorú prináša interpretatívna forma jazyka svojím zvecnením celku sveta. Z modálneho tvrdenia, že sa niečo nedá urobiť, že korene rovnice nemožno vyjadriť prostriedkami algebry, sa stáva extenzionálne tvrdenie, že riešenie danej rovnice nepatrí do určitého poľa. Zvecnenie sveta algebraických výrazov tak umožňuje pochopiť jav neriešiteľnosti. Neriešiteľnosť určitej rovnice znamená, že jej korene ležia za hranicami sveta algebraických výrazov. Aby však bolo možné neriešiteľnosť rovníc piateho stupňa dokázať, musíme túto hranicu presnejšie uchopiť. A kvôli tomu muselo dôjsť k zvecneniu ďalšej vrstvy jazyka. Matematici museli prejsť od teórie polí a k teórii grúp.

2.1.B.6 Integratívna forma jazyka algebry

V rámci predošlej formy jazyka došlo k spredmetneniu sveta algebry. Svet algebry je tvorený určitým poľom, t.j. súborom veličín uzavretým na operácie +, –, x, :. Ukazuje sa však, že existuje celý rad rôznych polí, celý rad svetov, od najmenšieho poľa ***Q*** všetkých racionálnych čísel (tvoreného číslami ako 5, $\frac{7}{12}$, 0, $\frac{-4}{3}$), cez bohatšie polia ako ***Q***($\sqrt{2}$) (pole, ktoré vznikne, keď k racionálnym číslam pridáme $\sqrt{2}$ a všetky čísla typu $a + b\sqrt{2}$, kde a a b sú racionálne, aby tento súbor bol uzavretý na aritmetické operácie) až po pole ***C*** všetkých komplexných čísel. Svet algebry sa nachádza niekde medzi poľami ***Q*** a ***C***. Je bohatší než pole racionálnych čísel ***Q***, lebo napríklad iracionálne číslo $\sqrt{2}$ je plnoprávnym obyvateľom sveta algebry. Na druhej strane je však chudobnejší než pole všetkých komplexných čísel ***C***, lebo napríklad Ludolfovo číslo π doň nepatrí (ako ukázal roku 1882 Ferdinand Lindemann). Aby sme mohli ukázať, že korene rovnice $x^5 - 6x + 3 = 0$ nie je možné vyjadriť žiadnym algebraickým vzorcom, musíme predovšetkým presnejšie uchopiť samotný svet všetkých algebraických výrazov. Na zvládnutie tejto úlohy už interpretatívna forma jazyka nestačí. Tá síce dokáže uchopiť určitý svet ako celok, prípadne aj pomocou prekladu prechádzať z jedného sveta do druhého, ale nedokáže porovnávať rôzne svety. Je to preto, lebo preklad pri prechode z vonkajšieho jazyka do vnútorného (z geometrického jazyka Gaussovej roviny do algebraického jazyka komplexných čísel) sa stále pohybuje v tej istej abstraktnej štruktúre. Preklad je umožnený práve tým, že z abstraktného hľadiska sú komplexné čísla a Gaussova rovina vlastne rovnaké (izomorfné). Rozdiel je len v „nosičoch“ tejto štruktúry -- raz sú to čísla, inokedy body roviny. Ale samotná štruktúra, teda formálne vzťahy, sú v oboch prípadoch tie isté. Preto interpretatívna forma sa vlastne stále pohybuje v jedinej štruktúre, ktorú len prenáša z jedného „média“ do druhého.

Až prechodom k integratívnej forme jazyka, prechodom od prekladov (izomorfizmov) k vnoreniam (homomorfizmom), sa otvára možnosť porovnať rôzne štruktúry. Pritom opäť existuje celý rad analógií medzi spôsobom, akým prešli Cayley a Klein k integratívnej forme jazyka geometrie, a tým, ako Evariste Galois prešiel k tejto forme v algebre. Prvým spoločným bodom je existencia určitej ***neutrálnej bázy***, určitej fundamentálnej úrovne opisu, do ktorej sa vnoria porovnávané štruktúry. V geometrii bola touto neutrálnou bázou projektívna rovina a jednotlivé geometrie sa porovnávali ako štruktúry vnorené do projektívnej roviny. V algebre je touto neutrálnou bázou pole komplexných čísel a všetky polia, s ktorými pracuje Galois, sú vnorené do tohto poľa. Druhým spoločným bodom je úloha, ktorú v oboch prípadoch hrá ***teória grúp***. Rovnako ako v geometrii prebieha porovnávanie geometrických štruktúr prostriedkami teórie grúp, aj v algebre je teória grúp základným nástrojom umožňujúcim porovnať rôzne polia. Preto možno povedať, že integratívna forma jazyka vnorí rôzne svety do spoločnej neutrálnej bázy a potom metódami teórie grúp porovnáva štruktúry symetrií týchto svetov. Dôkaz neriešiteľnosti rovníc piateho stupňa je technicky náročný. Aby sme sprehľadnili nasledujúci výklad, rozdelili sme ho na niekoľko krokov.

a. Epistemologický výklad pojmu grupy ako systému symetrií určitého sveta

Uvažujme najprv všeobecnú rovnicu tretieho stupňa

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{17}$$

Od Gaussa vieme, že táto rovnica má tri korene, ktoré si označíme α_1, α_2, α_3. Tieto korene existujú ako body na komplexnej rovine. Pomocou čísel α_1, α_2, α_3 môžeme vytvoriť svet, ktorý prislúcha uvažovanej rovnici, t.j. najmenšie pole, ktoré obsahuje jej korene. Toto pole sa označuje symbolom $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Je to pole, ktoré vznikne, keď k racionálnym číslam pridáme korene α_1, α_2, α_3, a všetko čo treba pridať, aby vzniklo pole (napríklad $5\alpha_1 + 7\alpha_2$ a ľubovoľné iné kombinácie, aby sme dostali súbor uzavretý na operácie +, –, x a :). Zatiaľ nás nezaujíma, či tento svet možno vytvoriť prostriedkami algebry. Vlastne to už vieme, lebo poznáme Cardanove vzorce, ale predbežne budeme tento fakt ignorovať a budeme skúmať pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ nezávisle od toho, či prislúcha rovnici, ktorú vieme riešiť, alebo nie. Naším cieľom je pozrieť sa, ako vyzerajú symetrie tohto poľa.

Svet algebry nie je svetom odkrytým zraku. Je to svet, ktorý vznikol zvecnením algebraických operácií. Za epistemický subjekt jazyka algebry možno preto považovať subjekt vykonávajúci tieto operácie. V geometrii mal subjekt podobu hľadiska, v algebre preto možno hovoriť o akomsi „hľadisku slepca“.[44] Hľadisko slepca však nie je vo svete jednoznačne fixované. Je to podobné ako v geometrii, kde hľadisko tiež nie je určené jednoznačne, ale možno meniť jeho polohu posúvaním horizontu. Rovnako v algebre potom, ako došlo k zvecneniu sveta algebry v podobe poľa, nie je poloha epistemického subjektu v tomto svete jednoznačne určená a treba ju formálne fixovať. Kým v geometrii je však poloha hľadiska vo svete určená pomocou horizontu, teda čiary, ku ktorej ubieha svet v odkrytosti zraku, v algebre je hľadisko slepca určené skôr pomocou význačných objektov ako 0 a 1. Nula určuje počiatok, kde subjekt „stojí“, a jednotka udáva smer a veľkosť „kroku“. Tieto objekty sú jasne odlíšené, lebo $0 + 0 = 0$, kým $1 + 1 \neq 1$, a teda slepec ich vie rozlíšiť na základe toho, ako sa správajú pri algebraických operáciách. Akonáhle sa slepec naučí identifikovať tieto objekty, vie si pomocou aritmetických operácií vytvoriť ľubovoľné racionálne číslo.

Keď však obohatíme svet slepca o čísla α_1, α_2, α_3, teda keď od poľa $\boldsymbol{Q}$ prejdeme k poľu $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, vynorí sa zásadná komplikácia. Slepec nevie čísla α_1, α_2, α_3 od seba odlíšiť. Vie, že sú rôzne, ale nevie rozlíšiť, či drží v ruke α_1, alebo α_2. Tieto čísla spĺňajú rovnicu (17), ale tú spĺňajú všetky tri. K ich číselnej hodnote, ktorá určuje ich polohu na komplexnej rovine, jazyk algebry nemá prístup. Algebra pripúšťa iba konečný počet krokov výpočtu, kým určenie hodnoty koreňov rovníc vyžaduje vo všeobecnosti nekonečný proces aproximácie, čo je algebre cudzie. Z hľadiska algebry sú čísla α_1,

α_2, α_3 predbežne nerozlíšiteľné alebo aspoň nie je jasné, ako ich možno rozlíšiť algebraickými prostriedkami. Na uchopenie tejto nerozlíšiteľnosti slúži pojem grupy. To, že veličiny α_1, α_2, α_3 sú nerozlíšiteľné, znamená, že možno zmeniť ich poradie bez toho, aby sa to akokoľvek prejavilo na poli $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Hovoríme, že pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ je voči tejto zmene symetrické. Je to určitá analógia pravo-ľavej symetrie, známej z geometrie. V oboch prípadoch ide o to, že s určitým objektom môžeme niečo spraviť a objekt pritom ostáva nezmenený. Symetrie poľa si môžeme predstaviť aj ako premiestnenia slepca v jeho svete, ktoré si nemôže všimnúť.

Uvažujme teda svet rovnice tretieho stupňa, t.j. pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Slepec nevie individuálne identifikovať jednotlivé korene rovnice, preto sa môže stať, že si myslí, že si ich pred sebou zoradil ako α_1, α_2, α_3, a v skutočnosti pred ním spočívajú v poradí α_2, α_3, α_1. Nie je ťažké nahliadnuť, že popliesť sa môže práve 3.2.1 = 6 spôsobmi, lebo na prvom mieste môže byť hociktorý z troch koreňov, na druhom môže byť hociktorý zo zvyšných dvoch, no a na poslednom mieste už musí byť ten posledný. Aby sme nemuseli stále vypisovať alfy, budeme písať len indexy, takže napríklad α_2, α_3, α_1 zapíšeme ako (2, 3, 1). Potom všetky možné poradia sú:

$$(1, 2, 3), \quad (1, 3, 2), \quad (2, 3, 1), \quad (2, 1, 3), \quad (3, 1, 2); \quad (3, 2, 1). \qquad (18)$$

Teda pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ prislúchajúce rovnici tretieho stupňa má šesť rôznych symetrií. Tieto symetrie možno navzájom skladať. Napríklad keď po prehodení prvého a druhého prvku, čím vytvoríme poradie (2, 1, 3), prehodíme prvý s tretím, dostaneme výsledné poradie (3, 1, 2). Je zaujímavé si všimnúť, že tento výsledok sa líši od výsledku, ktorý by sme dostali, keby sme tieto prehodenia urobili v opačnom poradí. Keby sme najprv prehodili prvý prvok s tretím, vytvorili by sme poradie (3, 2, 1), a keď teraz prehodíme prvý prvok s druhým, dostaneme (2, 3, 1), čo sa odlišuje od predošlého výsledku.

Symetrie určitého poľa spolu s operáciou skladania tvoria určitý uzavretý systém, ktorý matematici nazývajú ***grupou***. Grupa je teda niečo podobné ako pole, je to určitý súbor objektov uzavretý na určité operácie. Jediný rozdiel je v tom, že kým pole tvorili čísla a vyžadovali sme uzavretosť voči štyrom aritmetickým operáciám, prvky grupy sú (zvecnené) *operácie* a uzavretosť sa vyžaduje voči ďalšej operácii, operácii ich skladania. V prípade grupy máme tak do činenia s operáciami na dvoch úrovniach. Jednak sú operáciami prvky grupy a okrem toho je tu ešte operácia ich skladania. Teda grupa je určitý uzavretý svet operácií, podobne ako pole je uzavretý svet veličín. V pojme grupy tak dochádza k zvecneniu ďalšej vrstvy jazyka algebry. Potom, ako zvecnením sveta algebraických operácií vzniklo pole, teraz sa zvecňujú symetrie tohto poľa.

b. Grupy symetrií polí, ktoré prislúchajú riešiteľným rovniciam

Po tom, ako sme objasnili pojem grupy, vráťme sa k príkladu s rovnicou tretieho stupňa. Už vieme, že pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, prislúchajúce tejto rovnici, má najviac šesť rôznych symetrií. Teraz si chceme utvoriť o týchto symetriách jasnejšiu predstavu. Za týmto účelom zaviedol Augustin Cauchy rozlíšenie medzi permutáciou a substitúciou. ***Permutácie***, ktoré budeme zapisovať ako (1, 3, 2), predstavujú symetrie poľa $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vo zvecnenej podobe a udávajú rôzne poradia, v akých sú uložené korene α_1, α_2, α_3. Naproti tomu ***substitúcie***, ktoré budeme zapisovať ako $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, predstavujú tie isté symetrie v nezvecnenej podobe, ako operácie. Dvojriadková tabuľka hovorí, že jednotka ostáva na mieste, dvojka prejde na miesto trojky a trojka na miesto dvojky. Vo všeobecnosti v tabuľke horné číslo udáva, kto sa hýbe, a dolné číslo udáva, kam sa pohne. Pritom v oboch príkladoch je uvedená tá istá symetria, raz ako zvecnená v podobe permutácie (1, 3, 2),[45] teda určitého usporiadania koreňov, v druhom prípade ako substitúcia $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, teda ako činnosť. Samozrejme, každej permutácii prislúcha práve jedna substitúcia a naopak každej substitúcii prislúcha práve jedna permutácia, stačí len pripísať respektíve zmazať horný riadok. Preto rozdiel medzi týmito pojmami je len epistemologický. Pre zrod teórie grúp je však tento rozdiel dôležitý. Z toho, že každej permutácii zodpovedá substitúcia, vieme, že substitúcií je šesť. Takto máme vlastne dve podoby – zvecnenú a nezvecnenú podobu – symetrií poľa $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. To umožnilo Galoisovi zaujímavý trik – pozrieť sa, čo sa stane, keď ***aplikujeme určitú substitúciu na všetky permutácie***. Keď aplikujeme substitúciu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ na permutáciu (2, 1, 3), vieme, že 2 sa zmení na 3, 1 sa zmení na 2 a 3 sa zmení na 1, teda výsledkom bude permutácia (3, 2, 1). Galois zvecnil súbor všetkých permutácií a začal skúmať, čo sa stane s týmto súborom, keď na všetky permutácie aplikuje tú istú substitúciu. Keď na permutácie

(1, 2, 3), (1, 3, 2), ***(2, 3, 1),*** (2, 1, 3), ***(3, 1, 2),*** (3, 2, 1)

aplikujeme substitúciu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, dostaneme

(2, 3, 1), (2, 1, 3), ***(3, 1, 2),*** (3, 2, 1), ***(1, 2, 3),*** (1, 3, 2).

Na prvý pohľad sa nič nestalo, jednotlivé permutácie si iba vymenili svoje miesta. Pozoruhodné je však to, že tri permutácie, ktoré sme zvýraznili, sa premiešali medzi sebou, a zvyšné tri opäť medzi sebou. Ukazuje sa teda, že permutácie možno rozdeliť do dvoch skupín či blokov

(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) a (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1).

Ľubovoľná substitúcia buď mieša permutácie len vnútri týchto blokov (ako to robila substitúcia $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$), alebo prehodí bloky ako celky. Ale neexistuje žiadna substitúcia, ktorá by premenila permutáciu ***(1, 2, 3)*** na niektorú z permutácií druhého bloku, kým zvyšné dve permutácie prvého bloku, teda ***(2, 3, 1)*** a ***(3, 1, 2)***, by ponechala v prvom bloku. Teda žiadna substitúcia neruší hranice blokov. Bloky buď stoja na mieste, alebo sa hýbu ako celok. Nikdy nenastane situácia, že by sa časť jedného bloku presunula do druhého bloku a kým zvyšok by ostal na mieste. Galois pochopil, že práve rešpektovanie blokov pri substitúciách súvisí s tým, že rovnica tretieho stupňa je riešiteľná. Dá sa ukázať, že každé pole, ktoré vieme vytvoriť pomocou odmocnín, má veľmi špeciálnu štruktúru symetrií. Symetrie takýchto polí sa vždy rozpadajú na niekoľko blokov, pričom daný blok sa ďalej rozpadá ne jednoduchšie bloky, až nakoniec dostaneme blok, ktorého počet prvkov je rovný prvočíslu (v našom prípade to je 3), čím rozkladanie končí.

c. Neriešiteľnosť rovníc piateho stupňa

Zavedením pojmu grupy symetrií dosiahol francúzsky matematik Evariste Galois úroveň abstrakcie, ktorá umožnila porozumieť, prečo sú rovnice piateho stupňa vo všeobecnosti neriešiteľné. Už na predošlej úrovni, v rámci interpretatívnej formy jazyka, Gauss dokázal, že každá rovnica n-tého stupňa má práve n komplexných koreňov. Preto každá rovnica piateho stupňa má päť koreňov, a teda ku každej rovnici piateho stupňa existuje pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ obsahujúce jej korene. Problém riešiteľnosti rovníc piateho stupňa sa tak transformoval na problém, či pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$

možno vytvoriť algebraickými prostriedkami. A tu poskytuje integratívna forma jazyka nový pohľad na otázku riešiteľnosti. Namiesto Gaussovej otázky, či možno pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ vytvoriť pomocou algebraických formúl, Galois kladie otázku, či má grupa symetrií poľa $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ takú štruktúru, ako grupy symetrií všetkých polí, ktorých prvky sú vytvorené pomocou algebraických formúl, teda či sa dá rozložiť na čoraz menšie a menšie bloky. To znamená, že treba vziať súbor všetkých permutácií piatich prvkov (ktorých je 5.4.3.2.1 = 120) a vyskúšať, čo sa s týmto súborom bude diať, keď naň budeme aplikovať zodpovedajúce substitúcie. Presne to urobil Galois a zistil, že jediné delenie, ktoré môžeme urobiť, je delenie na dva bloky po 60 prvkoch. Keď sa obmedzíme na jeden z týchto blokov, dostaneme 60 prvkovú grupu, ktorá je jednou z najzaujímavejších grúp vôbec. Dostala zvláštne meno, volá sa ***alternujúca grupa piatich prvkov***. Keď si Galois vypísal všetkých jej 60 permutácií a pozrel sa, čo s nimi robia príslušné substitúcie, zistil, že tu končí akékoľvek rešpektovanie hraníc a substitúcie bezhlavo miešajú všetkých 60 permutácií alternujúcej grupy. V tejto grupe neexistujú žiadne bloky, do ktorých by sme mohli rozdeliť jej prvky. Objav tejto skutočnosti bol jedným z najprekvapujúcejších momentov v dejinách algebry.

V každom poli, ktoré je vytvorené pomocou algebraických prostriedkov, sa jeho grupa symetrií rozkladá na súbor do seba zapadajúcich blokov. Galoisov objav, že v prípade alternujúcej grupy piatich prvkov takéto rozdelenie neexistuje, ukázal, že pole prislúchajúce k tak nevinne vyzerajúcej rovnici ako $x^5 - 6x + 3 = 0$ má natoľko „zamotanú" štruktúru symetrií, že ho nemôžeme vytvoriť pomocou vzorcov, nech by sme sa o to akokoľvek snažili. Preto rovnice piateho, a teda aj ľubovoľného vyššieho stupňa, sú vo všeobecnosti neriešiteľné. Riešiteľnosť rovníc je výnimočný jav, týkajúci sa malého počtu rovníc s jednoduchými grupami symetrií. Rovnice tretieho a štvrtého stupňa sú riešiteľné len preto, že polia, ktoré týmto rovniciam prislúchajú, majú tak jednoduché grupy symetrií, že ich možno rozložiť do blokov. Ale počnúc rovnicou piateho stupňa, sú už im prislúchajúce grupy symetrií nerozložiteľné, a preto sú rovnice vo všeobecnosti neriešiteľné. Preto algebra musí opustiť svet vzorcov a ***začať skúmať algebraické štruktúry***. Sú to práve štruktúry, ako napríklad alternujúca grupa piatich prvkov, ktoré rozhodujú o tom, čo je a čo nie je možné formálne vyjadriť. Objav alternujúcej grupy tak predstavuje začiatok modernej štrukturálnej algebry.

2.1.B.7 Konštitutívna forma jazyka algebry

Pri výklade integratívnej formy jazyka sme ukázali, že táto forma sa zakladá na určitej neutrálnej báze, do ktorej vnorí rôzne štruktúry, ktoré potom porovnáva prostriedkami teórie grúp. U Kleina bola touto neutrálnou bázou projektívna rovina a v jej rámci porovnával prostriedkami teórie grúp rôzne geometrie, euklidovskú a neeuklidovské. Podobne u Galoisa tvorilo neutrálnu bázu pole komplexných čísel a v jeho rámci porovnával polia $\boldsymbol{Q}(\alpha_1,... \alpha_n)$, prislúchajúce rôznym rovniciam, a pomocou teórie grúp dokázal od seba odlíšiť polia, ktoré prislúchajú riešiteľným rovniciam, od polí, ktoré prislúchajú rovniciam neriešiteľným. Pritom v oboch prípadoch ďalší vývin spočíva v odstránení tejto neutrálnej bázy jazyka, teda v ***osamostatnení štruktúry od jej nositeľa***. V geometrii k tomu došlo vtedy, keď Bernhard Riemann odstránil priestor ako nositeľa geometrickej existencie a vytvoril jazyk kombinatorickej topológie, ktorý umožňuje uvažovať objekty nezávisle od priestoru. Riemann tak oslobodil objekty z ich zajatia v priestore a úlohu konštitúcie objektov preniesol z priestoru na jazyk. Podobne v algebre keď Galois skúmal grupy symetrií, vždy predpokladal, že korene $\alpha_1,..., \alpha_n$, ktorých permutácie tvorili príslušnú grupu, existujú ako komplexné čísla. Takto komplexná rovina hrala v algebre úlohu analogickú úlohe projektívnej roviny v geometrii. Zaručovala existenciu objektov, v tomto prípade grúp symetrií. Ďalší krok vo vývine algebry bol nesený snahou skonštruovať grupy symetrií bez toho, že by sme museli siahnuť po komplexnej rovine. Táto idea pochádza od nemeckého matematika Heinricha Webera. Weber sa rozhodol pri konštrukcii rozšírenia poľa $\boldsymbol{Q}$ o prvok α nepostupovať tak ako Galois, ktorý si prvok α „vypožičal“ z komplexnej roviny. Weber chce prvok α pridať k poľu $\boldsymbol{Q}$ čisto algebraickou cestou. Na prvý pohľad sa to môže javiť čudné, veď keď je α náhodou koreňom polynómu $x^5 - 6x + 3$, tak vieme, že ho nemožno vyjadriť pomocou žiadnej algebraickej formuly. Ako chcel pridať prvok α, keď sa tento nedá vyjadriť prostriedkami algebry? Tu si Weber pomáha pojmom ideálu. Pojem ideálu predstavuje nástroj umožňujúci rozprávať o ***objektoch, ktorých formálne vyjadrenia v jazyku neexistujú***. Weberova konštrukcia je pomerne zdĺhavá, a preto si ju rozložíme na niekoľko krokov.

a. Konštrukcia okruhu $\boldsymbol{Q}[x]$

Uvažujme pole $\boldsymbol{Q}$, ktoré chceme rozšíriť, a formálne k nemu pridajme jeden neinterpretovaný symbol, napríklad x. Dostaneme tak obor $\boldsymbol{Q}[x]$, ktorý sa nazýva *okruh polynómov* nad poľom $\boldsymbol{Q}$. Nie je to nič zvláštne, v podstate ho už poznáme. Je to iný druh uzavretého sveta, svet v ktorom sa odohráva sčítanie, odčítanie a násobenie polynómov. Okruh sa od poľa odlišuje len v tom, že v okruhu nemožno deliť, lebo delením polynómov nemusí vzniknúť polynóm. Okruh $\boldsymbol{Q}[x]$ je tvorený polynómami všetkých možných stupňov, ktorých koeficienty patria do poľa $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{Q}[x] \;=\; \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0;\ a_i \in \boldsymbol{Q},\ n \in \boldsymbol{N}\}$$

Zostrojenie okruhu $\boldsymbol{Q}[x]$ je prvým krokom Weberovej konštrukcie. ***Okruh*** $\boldsymbol{Q}[x]$ sa líši od ***poľa*** $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ jednak tým, že v ňom nemožno deliť, a ďalej tým, že prvok x je zatiaľ neurčitý, kým prvok α má presne vymedzené vlastnosti dané rovnicou, ktorej je koreňom. Preto v ďalšom kroku konštrukcie treba okruh $\boldsymbol{Q}[x]$ modifikovať, „ušiť“ na mieru prvku α. To robí Weber pomocou pojmu ideálu.

b. Konštrukcia ideálu (g(x))

Uvažujme prvok α, ktorý chceme k poľu $\boldsymbol{Q}$ pridať. Vieme, že je koreňom určitého polynómu. Preto môžeme namiesto prvku α vziať polynóm, ktorého je koreňom, teda napríklad namiesto výrazu $\sqrt[3]{2}$ zobrať polynóm $g(x) = x^3 - 2$, ktorého je $\sqrt[3]{2}$ koreňom. V prípade koreňov polynómu piateho stupňa, kde už algebraické vyjadrenie nie je možné, zoberieme priamo príslušný neriešiteľný polynóm (napríklad $g(x) = x^5 - 6x + 3$). Pomocou polynómu $g(x)$ vytvoríme to, čo Dedekind nazval ideálom. Pojem ideálu sa dá najlepšie priblížiť na príklade celých čísel, ktoré tiež tvoria okruh, lebo celé čísla síce možno sčítať, odčítať a násobiť, ale nemožno ich deliť (napríklad 7:3 nie je celé číslo). Dedekindova idea spočíva v tom, že namiesto určitého čísla, napríklad čísla 6, budeme hovoriť o všetkých násobkoch šestky, teda o ideáli

$$\mathbf{(6)} \;=\; \{\mathbf{6}a;\ a \in \boldsymbol{Z}\} \;=\; \{0, 6, -6, 12, -12, 18, -18, \ldots\}.$$

Pritom skutočnosť, že číslo 6 je deliteľné číslom 3, sa do jazyka ideálov premietne tak, že násobky šestky sú aj násobkami trojky, teda ideál **(6)** je podmnožinou ideálu **(3)**. Samozrejme, to je triviálne. Netriviálne na teórii ideálov je to, že za určitých podmienok môžu existovať ideály, ktorých prvky nie sú násobkom žiadneho jedného čísla. Inak povedané, jazyk ideálov je vo všeobecnosti bohatší ako jazyk čísel. Ku každému číslu vieme vytvoriť ideál tvorený všetkými jeho násobkami, ale za istých podmienok môžu existovať aj ideály, ktoré takto vytvorené nie sú, ideály, ktorým v obore čísel nezodpovedá žiadny prvok. A práve preto Weber siahol po teórii ideálov. Namiesto celých čísel pracoval s polynómami, ale základná idea je rovnaká. Podobne ako Dedekind priradil číslu 6 ideál **(6),** Weber vzal všetky možné násobky polynómu $g(x)$ a vytvoril z nich ideál

$$(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \;=\; \{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).f(x);\; f(x)\in \boldsymbol{Q}[x]\} \;=\; \{g(x).2x,\, g(x).x^2,\, g(x).(x^3+7x+3),\; ...\}.$$

Pomocou takýchto ideálov možno skonštruovať abstraktné objekty, ktoré sú riešením rovníc, pre ktoré vo svete vzorcov neexistuje klasické riešenie. Táto konštrukcia sa zakladá na faktorizácii.

c. Faktorizácia okruhu **Q***[x] podľa ideálu* **(g(x))**

Weberovým cieľom bolo vytvoriť rozšírenie poľa $\boldsymbol{Q}$ o prvok α, ktorý je koreňom polynómu $g(x)$. Označme toto rozšírené pole písmenom $\boldsymbol{L}$ (nechceme použiť označenie $\boldsymbol{Q}(\alpha)$, lebo číslo α používané Galoisom nepatrí do jazyka algebry). Na to, aby Weber vytvoril pole $\boldsymbol{L}$, použil konštrukciu, ktorú bežne poznáme z teórie čísel. V elementárnej aritmetike sa asi každý stretol s tým, že aj keď v celých číslach nemožno deliť (to je dôvod, prečo tvoria celé čísla okruh, a nie pole), možno v nich deliť so zvyškom. Tak pri delení číslom 6 môžeme dostať niektorý zo šiestich zvyškov 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5. Napríklad číslo 15 dáva pri delení 6 zvyšok 3, lebo 15 = 2.6 + 3. Túto skutočnosť možno preložiť do jazyka ideálov a vytvoriť namiesto jednoduchých zvyškov takzvané zvyškové triedy. Teória ideálov namiesto určitého čísla n berie všetky čísla, ktoré sú jeho násobkom, a vytvorí z nich ideál $(\boldsymbol{n})$. Podobne namiesto zvyšku k zoberie množinu všetkých čísel, ktoré dávajú rovnaký zvyšok ako k. Tak pri delení šiestimi namiesto zvyšku 3 budeme hovoriť o zvyškovej triede

$$\bar{3} = \{3 + 6a;\; a\in\boldsymbol{Z}\} \;=\; \{3, -3, 9, -9, 15, -15, ...\}$$

Celá konštrukcia sa dá urobiť aj pre prípad polynómov. Jediný rozdiel je v tom, že zvyškových tried bude omnoho viac. Weberovi sa podarilo ukázať, že zvyškové triedy, ktoré dostane pomocou ideálu $(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$, tvoria pole (teda ich možno nielen sčítavať, odčítavať a násobiť, ale možno ich aj deliť), pričom toto pole je úplne rovnaké ako pole $\boldsymbol{Q}(\alpha)$. Weberovi sa tak podarilo vytvoriť pole $\boldsymbol{L}$ bez toho, aby opustil algebru. Získal ho faktorizáciou okruhu $\boldsymbol{Q}[x]$ podľa ideálu $(\mathbf{g}(\boldsymbol{x}))$, teda

$$L = {Q[x]}\big/{(g(x))},$$

ako sa táto konštrukcia zvykne označovať. Symbol naznačuje, že pole $\boldsymbol{L}$ vzniká z okruhu $\boldsymbol{Q}[x]$ ako súbor všetkých zvyškových tried pri delení ideálom $\boldsymbol{(g(x))}$. Prvkom, ktorý v poli $\boldsymbol{L}$ zodpovedá prvku α poľa $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ (teda ktorý je riešením rovnice $g(x) = 0$), je trieda

$$\overline{x} = \{x + g(x).f(x);\ f(x) \in \boldsymbol{Q}[x]\} = \{x + g(x).2x,\ x + g(x).x^2,\ x + g(x).(x^3 + 7x + 3),\ \ldots\}.$$

Je to zvyšková trieda prvku x. Tvoria ju všetky polynómy, ktoré pri delení polynómom $g(x)$ dávajú zvyšok x. Jej prvky dostaneme, keď ku všetkým možným násobkom polynómu $g(x)$ pripočítame x. O tom, že trieda $\overline{x}$ je skutočne riešením príslušnej rovnice, sa možno presvedčiť priamym dosadením ľubovoľného prvku tejto triedy do príslušnej rovnice.

Na tejto konštrukcii vidno silu teórie ideálov. Táto teória umožňuje skonštruovať objekty, ktoré sú v pôvodnom jazyku neuchopiteľné. Weberovi sa podarilo skonštruovať abstraktný objekt, ktorý má po formálnej stránke všetky vlastnosti poľa $\boldsymbol{Q}(\alpha)$, a teda obsahuje aj riešenie príslušného polynómu. Týmto riešením je trieda $\overline{x}$. Nie je to algebraický vzorec, ale určitý súbor polynómov. Preto Galoisov výsledok o neriešiteľnosti rovnice $x^5 - 6x + 3 = 0$ pomocou vzorcov ostáva zachovaný. Weberova konštrukcia však vrhá na tento výsledok nové svetlo. Ukazuje, že problém vlastne nie je v rovnici, ale v prostriedkoch, ktoré pri jej riešení používame. Keď sa nebudeme obmedzovať na svet vzorcov, každý algebraický polynóm sa stane v tomto novom, abstraktnom zmysle, riešiteľným.

Weber touto konštrukciou prináša do algebry konštitutívnu formu jazyka. Vo vývine geometrie konštitutívna forma jazyka prenáša úlohu konštituovať objekty z priestoru na jazyk. Tým sa obohacuje súbor objektov, ktoré tvoria predmet geometrie, geometria získava prístup k objektom ako je napríklad *Kleinova fľaša*, ktorých existencia odporovala trojrozmernému priestoru. Čosi podobné robí v algebre Weber. Pred Weberom algebra zakladala existenciu svojich objektov na možnosti ich symbolickej reprezentácie, a preto nebola schopná vyjadriť ani také jednoduché objekty, ako sú korene polynómu $x^5 - 6x + 3$. Weber túto situáciu zásadne mení. Oslobodzuje algebru od závislosti na vzorcoch a existenciu objektov zaručuje pomocou abstraktnej konštrukcie. Vo Weberovej faktorizácii možno vidieť analógiu s Riemannovými aktami rezania a lepenia. Kým Riemann stotožňuje okraje určitej plochy, Weber stotožňuje všetky objekty, ktoré dávajú rovnaký zvyšok pri delení ideálom. Oba sú to konštitutívne akty, ktoré umožňujú vytvoriť nové objekty, ktorých existencia bola predtým znemožnená úzkym pojatím jazyka. Pritom Weberov posun je imponujúci. Keď za riešenie rovníc prijmeme abstraktné objekty vytvorené v procese faktorizácie (teda keď prejdeme ku konštitutívnej forme jazyka), stáva sa každý polynóm riešiteľným. Pomocou faktorizácie vieme vytvoriť abstraktný objekt, ktorý je koreňom príslušného polynómu, nezávisle od toho, ktorého stupňa je polynóm. Preto vo Weberovom pojatí sú všetky polynómy riešiteľné. Jeho konštrukcia je úplne univerzálna. Nie je to trik fungujúci za určitých zvláštnych podmienok, pre niektoré špeciálne prípady. Je to univerzálna metóda, ktorá funguje vždy, pre všetky rovnice ľubovoľného stupňa.

2.1.B.8 Konceptuálna forma jazyka algebry

Vo svojej učebnici algebry (Weber 1895) prináša Weber novú definíciu pojmu grupy. Je to prvá definícia, ktorá zahŕňa grupy s konečným aj s nekonečným počtom prvkov. Pred Weberom skúmali matematici len konečné grupy. Tie možno charakterizovať zákonom o krátení (t.j. požiadavkou, aby zo vzťahu $a.x = b.x$ vyplývalo $a = b$). V nekonečnom prípade je táto definícia nepoužiteľná a Weber ju preto nahradil požiadavkou existencie inverzného prvku (t.j. požiadavkou, aby ku každému x existoval prvok x^{-1} taký, že $x.x^{-1} = 1$). Táto požiadavka sa používa v definícii grupy podnes. Weberovým motívom na rozšírenie pojmu grupy aj na nekonečný prípad bolo to, že pojem grupy použil ako východisko pri definícii poľa: „*Z grupy vznikne pole, keď sú v nej možné dva spôsoby kompozície, z ktorých prvý sa nazýva sčítaním, druhý násobením*“. Weber bol tak jedným z prvých matematikov, ktorí začali vidieť pole tak, ako ho vidíme dnes, ako grupu, do ktorej je zavedená dodatočná operácia násobenia, teda vlastne ako spojenie dvoch grúp. Tým však zásadne mení vzťah, ktorý existoval medzi pojmom poľa a pojmom grupy v rámci integratívnej a konštitutívnej formy jazyka. V predošlých štádiách bolo pole svetom a grupa bola štruktúrou symetrií tohto sveta, pojem poľa bol teda prvotný a pojem grupy bol odvodený. Weber stiera tento rozdiel. Z hľadiska novej, konceptuálnej formy jazyka sú všetky pojmy epistemologicky rovnocenné. Pojmy sú abstraktné entity, definované súborom axióm. Jediné, čo je pri konceptuálnej forme jazyka dôležité, je logická závislosť medzi definíciami. A keďže definícia poľa predpokladá pojem grupy, lebo každé pole obsahuje aditívnu grupu, je z hľadiska konceptuálnej formy pojem grupy prvotný.

Zisk, ktorý prináša Weberov prechod ku konceptuálnej forme jazyka, je nespochybniteľný. Explicitným formulovaním všetkých podmienok v definíciách základných pojmov algebry sa otvára možnosť jednotlivé podmienky postupne zoslabovať a dospieť tak k rôznym zovšeobecneniam. Napríklad z pojmu grupy možno vytvoriť pojem grupoidu a pologrupy, pojmy, ktoré boli v predošlých štádiách vývinu algebry buď úplne nemysliteľné, alebo aspoň omnoho ťažšie prístupné. Keď ich však nebudeme zavádzať zdola, zovšeobecnením príkladov, ale zavedieme ich zhora, obmieňaním podmienok v definícii pojmu grupy, získame k nim ľahší prístup. Teda podobne ako konštitutívna forma jazyka prináša prelom do úplne nového sveta objektov, prináša konceptuálna forma prelom do úplne nového sveta pojmov. Jazyk tak preberá na seba ďalšiu úlohu, úlohu vytvárať pojmy. V predošlých štádiách vývinu matematiky sa používali len „prirodzené" pojmy, podobne, ako pred konštitutívnou formou jazyka sa skúmali len „prirodzene" konštituované objekty. Boli to pojmy, ktoré prirodzene vyvstali v priebehu matematických bádaní. Naproti tomu konceptuálna forma jazyka začína skúmať pojmy nezávisle od akéhokoľvek prirodzeného kontextu, skúma pojmy systematicky, obmieňaním definícií už existujúcich pojmov. Tento vývin opäť nie je špecifický len pre algebru a jeho paralela sa objavuje aj v topológii, kde sa po tom, ako bol pojem topologického priestoru axiomaticky definovaný, rodí celá plejáda rôznych typov priestorov – T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, z ktorých viaceré dovtedy nikoho nenapadlo skúmať. Teda obmieňanie podmienok v definíciách základných pojmov sa neviaže len na algebru. Je to všeobecný rys konceptuálnej formy jazyka. Konceptuálna forma jazyka poskytuje slobodu v tvorbe pojmov, aká bola prv nepredstaviteľná.

2.1.B.9 Prehľad objektácií vo vývine algebry

Vo vývine algebry sa nám podarilo rozlíšiť štádiá, ktoré sa líšia v tom, čo na nich znamená riešiť algebraickú rovnicu. Riešiť rovnicu v jednotlivých vývinových štádiách algebry znamená:

a) *Nájsť* ***regulu***, teda pravidlo zapísané v prirodzenom jazyku, ktoré vyjadruje návod ako ***vypočítať*** koreň rovnice.

b) *Nájsť* ***formulu***, teda výraz symbolického jazyka, ktorý umožňuje ***vyjadriť*** koreň rovnice pomocou jej koeficientov, štyroch aritmetických operácií a odmocňovania. *Pritom* jednotlivé znaky vo formule korešpondujú s krokmi výpočtu, takže formula je zápisom reguly.

c) *Nájsť* ***rozklad formy***, teda polynóm vyjadrujúci rovnicu v kanonickom tvare ***rozložiť*** na súčin lineárnych členov. *Pritom* každý člen rozkladu obsahuje formulu vyjadrujúcu jeden koreň, takže rozklad dáva toľko formúl, koľkého stupňa je rovnica. Preto riešiť rovnicu znamená nájsť všetky korene, teda pre rovnicu n-tého stupňa nájsť všetkých n riešení.

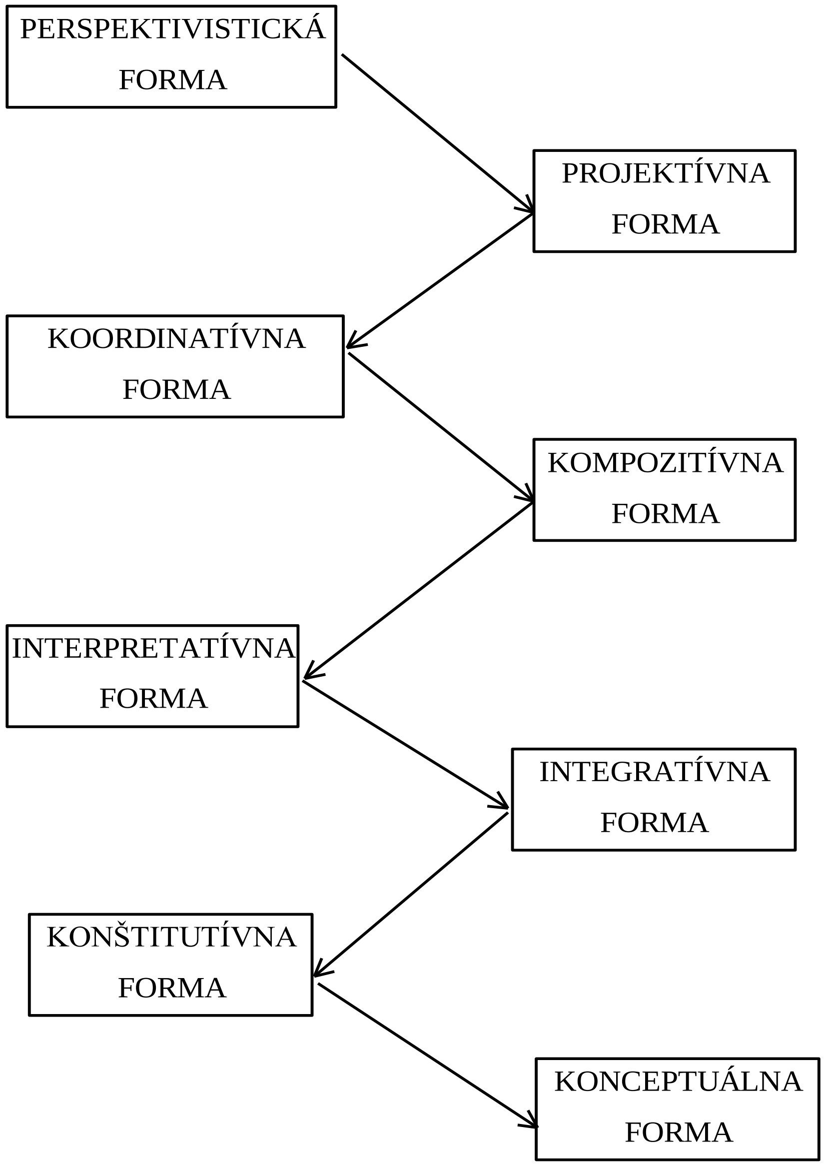
d) *Nájsť* ***rezolventu***, teda daný problém ***previesť*** pomocou vhodnej substitúcie na pomocnú úlohu nižšieho stupňa. *Pritom* keď vyriešime pomocnú rovnicu, spätnou substitúciou dostávame riešenie pôvodného problému. Okrem koreňov rovnice dostávame aj čísla s nimi asociované. Teda v prípade rovnice n-tého stupňa dostaneme vo všeobecnosti $n!$ veličín.

e) *Nájsť* ***rozkladové pole,*** teda postupne ***zostrojiť*** pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1,\dots \alpha_n)$ obsahujúce všetky korene rovnice. *Pritom* jednotlivé kroky konštrukcie poľa priamo korešpondujú s príslušnými rezolventami.

f) *Nájsť* ***faktorizáciu grupy symetrií poľa*** $\boldsymbol{Q}(\alpha_1,\dots \alpha_n)$, teda grupu symetrií ***rozložiť*** na systém blokov. *Pritom* faktorizácia grupy korešponduje s rozkladom poľa na jednotlivé rozšírenia, a tak zo znalosti faktorizácie grupy možno usudzovať na konštrukciu rozkladového poľa.

g) *Vytvoriť* ***faktorizáciu okruhu Q[x] podľa ideálu (g(x)),*** teda nájsť triedy rozkladu okruhu polynómov podľa ideálu prislúchajúceho danému polynómu. Jedna z tried je hľadaným riešením rovnice, a tak máme univerzálny postup na riešenie ľubovoľnej algebraickej rovnice.

Domnievame sa, že tieto rozdiely jasne vystihujú zásadné sémantické rozdiely medzi jednotlivými formami jazyka, ktoré sme podrobnejšie opísali vyššie. Kvôli prehľadnosti si ich ešte zhrnieme do tabuľky.


PERSPEKTIVISTICKÁ FORMA
PROJEKTÍVNA FORMA
KOORDINATÍVNA FORMA
KOMPOZITÍVNA FORMA
INTERPRETATÍVNA FORMA
INTEGRATÍVNA FORMA
KONŠTITUTÍVNA FORMA
KONCEPTUÁLNA FORMA

2.2 Filozofická a didaktická reflexia objektácií

Zmeny jazyka matematiky opísané v tejto kapitole sú zásadne odlišné od re-prezentácií. Kým ***re-prezentácie*** prinášali *nové spôsoby generovania* obrázkov (v syntetickej, analytickej, či iteratívnej geometrii) či formúl (v aritmetike, algebre, diferenciálnom a integrálnom počte, či predikátovom počte), objektácie sa odohrávajú v rámci jednej reprezentácie. Pri objektáciách sa nemení spôsob generovania výrazov jazyka. ***Objektácie*** prinášajú skôr zmeny *ontologických predpokladov* jazyka a zmeny toho, ako jazyka zobrazuje svet, t.j. akým spôsobom zabezpečuje *referenciu svojich výrazov*.

Ako ilustráciu zmien sprevádzajúcich objektácie uvedieme zmeny, ktoré prináša projektívna forma. Je to jednak *zrovnoprávnenie objektov s pozadím*. Vďaka tomu dochádza k začleneniu pozadia do jazyka teórie. Pozadie (priestor v geometrii, číselný obor v algebre) tým nadobúdajú rovnoprávne postavenie so samotnými objektmi. Okrem toho dochádza k explicitnej reprezentácii hľadiska v teórii a následnej relativizácii objektov teórie vzhľadom k hľadisku. Tým sa *narúša homogenita jazyka*. V jazyku sa objavujú zvláštne výrazy (stred premietania a horizont v geometrii, nula a jednotka v algebre) ktoré vyjadrujú hľadisko (epistemický subjekt). Okrem toho projektívna forma jazyka prináša reprezentáciu reprezentácie, čím dochádza ku zdvojeniu výrazov objektového jazyka. Vznikajú dva systémy, ktoré majú duálny vzťah (zobrazenie – obraz v geometrii, operácia – výsledok operácie v algebre). Analogické zmeny možno nájsť aj u ostatných foriem jazyka.

Svet možno zobrazovať „odnikadiaľ“, tak ako to robil Euklides v geometrii a al-Chwárizmí algebre; alebo je možné zobrazovať ho z určitého hľadiska, tak ako to robili Desargues a Viéte. Je tiež možné ho modelovať, ako to robili Beltrami v geometrii a Gauss v algebre; a je možné opisovať akty jeho konštituovania, ako to robili Poincaré a Weber. Podobne ako v prípade re-prezentácií, aj teraz po rozbore historického materiálu pristúpime k výkladu filozofických a didaktických dôsledkov tohto druhu zmien jazyka matematiky.

2.2.1 Porovnanie vývinu algebry s vývinom geometrie

Doteraz sme sa pohybovali na pôde historických rekonštrukcií. Teraz by som rád predložil na diskusiu niekoľko myšlienok všeobecnejšieho epistemologického charakteru. Ich cieľom je podať jednotný výklad zmien, ktoré sa odohrali v dejinách geometrie a algebry. Dejiny geometrie a algebry použijem ako materiál, analýzou ktorého sa chcem dopracovať k hlbšej epistemologickej rovine, ktorá presahuje vývin jednotlivých disciplín. Prvým krokom tejto analýzy je porovnanie výsledkov, ku ktorým sme dospeli pri rekonštrukcii geometrie a algebry.

a. vynechanie niektorých foriem jazyka v prípade geometrie

Asi najdôležitejší rozdiel medzi historickou rekonštrukciou vývinu geometrie a algebry sa týka ***koordinatívnej a kompozitívnej formy jazyka***. Kým vo vývine algebry sú tieto formy jasne prítomné, pri rekonštrukcii vývinu geometrie sa ich nepodarilo identifikovať. Preto sa zdá, že jeden druh rozdielov medzi vývinom geometrie a algebry spočíva v skutočnosti, že niektoré z foriem jazyka môžu vo vývine jednej disciplíny absentovať, kým vo vývine druhej zohrávajú kľúčovú rolu.

To vrhá svetlo na našu metódu rekonštrukcie sémantického vývinu matematických teórií. Zoznam ôsmich foriem jazyka uvedený v závere rekonštrukcie vývinu algebry predstavuje zoznam rôznych možností, ako vytvoriť korešpondenciu medzi univerzom danej teórie a jeho jazykovou reprezentáciou. Pritom uvedené formy sú zoradené podľa narastajúcej komplexnosti. Keď sa v teórii, ktorej vývin sledujeme, vynoria určité ťažkosti, jednou z možností ako sa s nimi vysporiadať spočíva v tom, že teória prejde k jazyku s komplexnejšou formou. Pritom najprirodzenejšie je urobiť jeden krok v postupnosti foriem, uvedenej v našom zozname. Môže sa však stať, že nasledujúca forma jazyka, teda jazyk s najmenšou možnou zmenou sémantickej štruktúry, nepostačuje na rozriešenie problémov, na ktoré teória narazila. Vtedy je nevyhnutné urobiť radikálnejší krok, čo sa prejaví preskočením jednej alebo viacerých foriem v našom zozname. Zdá sa, že presne to sa udialo pri vzniku neeuklidovskej geometrie. Keď koordinatívna forma nepostačovala na riešenie problémov spojených s piatym Euklidovým postulátom, Gauss, Lobačevskij a Bolyai prešli od projektívnej priamo k interpretatívnej forme jazyka.

To znamená, že zoznam foriem jazyka predstavuje maximálny systém štádií, t.j. úplný (aspoň dúfam) systém možných typov korešpondencie medzi výrazmi jazyka a objektmi intendovaného univerza. Aktuálny vývin určitej teórie si vyberá z týchto možností tie, ktoré potrebuje. Je možné, že pri rekonštrukcii vývinu iných oblastí geometrie (napr. projektívnej geometrie) by koordinatívna forma mohla zohrať dôležitú úlohu[46] a zas iná forma jazyka by mohla ostať nepoužitá.

b. striedanie implicitnej a explicitnej podoby formy jazyka

Dôležitým aspektom vývinu geometrie, ktorý v algebre nemá obdobu, je pravidelné striedanie implicitnej a explicitnej podoby formy jazyka. Kým v geometrii každá forma existuje v týchto dvoch podobách, v algebre je situácia zložitejšia. Keď sa napríklad pozrieme na vývin algebraickej symboliky v rámci projektívnej formy, zistíme, že ide o pomalý proces tiahnúci sa od Regiomontana po Descarta. Skôr ako o jednorázovom zabudovaní formy jazyka do jazyka, ako je to typické v geometrii, tu možno hovoriť o pomalom procese postupného zexplicitňovania jazyka. Keď si uvedomíme, že svet geometrie je odkrytý zraku, kým svet algebry sa rodí zvecňovaním motorických schém, je tento rozdiel prirodzený. Zraku je svet odkrytý v jeho celistvosti, a preto zmena odkrytosti musí mať povahu zmeny geštaltu. Naproti tomu svet algebry je daný vždy len fragmentárne, poznáme len tie jeho „miesta“, ktoré sme si „ohmatali“. Objavovanie novej formy jazyka tu prebieha postupne.

Kontrast sveta odkrytého zraku a sveta konštituovaného zvecňovaním motorických schém umožňuje objasniť aj ďalšiu zvláštnosť algebraických textov. Keď sa pozrieme na Cardanovu knihu *Ars Magna* (Cardano 1545), vidíme, že vedľa seba stoja fragmenty patriace do rôznych foriem jazyka. Cardano uvádza regulu na riešenie rovnice tretieho stupňa, čo spadá plne do perspektivistickej formy jazyka. Pri jej odvodzovaní však používa substitúcie a úpravy, ktoré sú typické pre projektívnu formu. A pri svojich výskumoch narazil na odmocninu zo záporného čísla, čo je zárodok nasledujúcej formy jazyka. Teda akoby v algebraickom texte vedľa seba spočívali fragmenty patriace k rôznym formám. Z hľadiska motoriky je to prirodzené, lebo keď poznáme určitú cestu, po ktorej bezpečne dôjdeme z jedného miesta na druhé, môžeme ju používať aj potom, ako vedľa nej vyrástla sieť moderných diaľnic. Naproti tomu v geometrii je koexistencia výrazov patriacich k rôznym formám jazyka nemysliteľná. Nie je možné nájsť obrázok, ktorého rôzne časti by prináležali k rôznym formám. V geometrii forma jazyka fixuje odkrytosť sveta, a svet je odkrytý ako celok. Preto všetky jeho časti musia zapadnúť do jednej formy.

Tento rozdiel je dôležitý, lebo ukazuje, že implicitná a explicitná podoba určitej formy jazyka sú len jej dve varianty jedinej formy. Zhodou okolností v geometrii sa tieto dve varianty striedajú so striktnou pravidelnosťou. To nás zviedlo k predpokladu, že dynamika striedania explicitnej a implicitnej formy jazyka tvorí jadro objektácií (pozri Kvasz 1998). V algebre však existuje každá forma jazyka vo viacerých podobách, tvoriacich viac-menej spojitý prechod od fragmentárnej cez implicitnú až k explicitnej podobe. Navyše, aj po prechode k explicitnej podobe určitej formy jazyka v nej môžu pretrvávať rôzne fragmenty predošlých foriem. Preto sa zdá, že striedanie implicitnej a explicitnej podoby určitej formy jazyka sa netýka objektácií. Preto sme sa rozhodli definovať pojem formy jazyka širšie ako sme to robili roku 1998 a vyložiť implicitnú a explicitnú podobu ako dve varianty jednej formy jazyka. Teda ***explicitnú a implicitnú podobu nebudeme považovať za rôzne formy jazyka***, ale za dve formulácie jednej formy.

2.2.2 Forma jazyka ako nástroj rekonštrukcie vývinu exaktných disciplín

Pri historickej rekonštrukcii vývinu geometrie a algebry sme systematicky narážali na určité formálne aspekty jazyka. V prípade geometrie to bolo *hľadisko* (z pohľadu ktorého je určitý obrázok nakreslený), *horizont* (hranica sveta zachyteného obrázkom), *pozadie* (rovina či priestor, do ktorého jazyk situuje svoje objekty) a *ideálne prvky* (nekonečne vzdialené body, ku ktorým sa zbiehajú rovnobežky). Pritom bolo zaujímavé, že zásadné zmeny, ku ktorým dochádzalo vo vývine geometrie, sa týkali práve týchto aspektov jazyka. Pri rekonštrukcii dejín algebry sa ukázalo, že uvedené štyri aspekty treba doplniť o ďalšie dva, o *indivíduá* a o *kategórie*.

a. upresnenie pojmu formy jazyka

Odteraz budeme formu jazyka považovať za štruktúru tvorenú šiestimi aspektmi:

epistemický subjekt jazyka,	***horizont jazyka,***
indivíduá jazyka,	***základné kategórie jazyka,***
ideálne prvky jazyka,	***pozadie jazyka***.

Tvrdíme, že tieto aspekty sú formálne, teda nemajú faktický obsah. Okrem toho sú navzájom prepojené, preto keď sa zmení jeden z nich, paralelne sa musia zmeniť aj ostatné. Keď tvrdíme, že vyčlenenie indivíduí je aspektom formy jazyka, znamená to, že je to čosi podobné ako určenie polohy horizontu. Keby sme sa išli pozrieť na miesto, kadiaľ podľa určitého obrazu prebieha horizont, nič tam nenájdeme. Tvrdenie, že horizont je aspektom formy jazyka, znamená práve to, že sa nedá empiricky uchopiť. Napriek tomu, že na obraze možno horizont jasne identifikovať, v krajine, ktorú obraz znázorňuje, sa nenachádza žiaden objekt, ktorý by zodpovedal horizontu. Keď tvrdíme, že vyčlenenie indivíduí je aspektom formy jazyka, tvrdíme, že objekty, ktoré jazyk vyčleňuje ako indivíduá, sa po empirickej stránke ničím neodlišujú od ostatných objektov. Pojmy, ako napríklad pojem telesa v klasickej mechanike, sú čisto formálne pojmy. Neexistuje empirická procedúra, ktorá by umožnila rozhodnúť, či nejaký predmet je telesom alebo nie. Predstava akéhosi *detektora indivíduí*, teda prístroja, ktorý by zablikal vždy, keď by bol nasmerovaný na indivíduum jazyka, je absurdná. To, ktoré objekty sú indivíduá, jazyk nemôže vyjadriť. Ukáže sa to až pri jeho používaní. Práve preto tvorí vyčlenenie indivíduí aspekt formy jazyka.

Keď formu jazyka doplníme o indivíduá a kategórie, začína sa črtať celková štruktúra formy jazyka. Úlohou formy jazyka je spojiť epistemický subjekt (hovorcu jazyka) so svetom (univerzom jazyka). Deje sa to na troch úrovniach: Prvou úlohou formy jazyka je ***začleniť epistemický subjekt do sveta***. Tomuto účelu slúži hľadisko a horizont. Hľadisko (v geometrii stred premietania, v algebre nula) indikuje, kde sa nachádza hovorca, z hľadiska ktorého je teória formulovaná. Hľadisko tak začleňuje hovorcu do sveta a konštituuje ***identitu subjektu*** vo svete jazyka. Horizont (v geometrii úbežnica, v algebre jednotka) zas usúvsťažňuje svet voči tomuto subjektu. Tým, že fixuje základné smery (úbežnica fixuje vodorovnú rovinu, čím odlíši smer hore a smer dole; jednotka fixuje kladný smer číselnej osi), konštituuje ***situovanosť subjektu*** vo svete jazyka.

Druhou úlohou formy jazyka je ***štruktúrovať svet z hľadiska epistemického subjektu***. Tomuto účelu slúži vyčlenenie indivíduí a určenie základných kategórií. Vyčleniť indivíduá znamená identifikovať vo svete objekty, ktoré sú analogické ako subjekt, objekty, na ktoré sa môže subjekt vzťahovať. Nie náhodou je termín teleso, ktorým klasická mechanika označuje svoje indivíduá, odvodený od termínu telo. Teleso je čosi podobné ako naše telo, niečo, k čomu sa môžeme telesne vzťahovať. ***Individualita*** je základná vlastnosť subjektu. Subjekt sám seba prežíva ako indivíduum a túto individualitu prepožičiava objektom, čím ich konštituuje ako indivíduá. Preto vyčlenenie indivíduí nemôže byť empirická otázka, teda otázka rozhodnuteľná nezávisle od typu epistemického subjektu. Práve naopak, jednotlivé formy jazyka líšiace sa druhom subjektu sa líšia aj spôsobom vyčlenenia svojich indivíduí. Pritom naša individualita má rôzne dimenzie. Každý z nás dokáže individuálne meniť svoju polohu a na základe tejto individuácie sa v geometrii stáva indivíduom (útvarom) všetko, čo je schopné mať samostatnú polohu. Inou dimenziou našej individuality je schopnosť manipulovať s vecami a skladať manipulatívne akty do sekvencií, a tak v algebre sa indivíduom (termom) stáva všetko, čo možno získať sekvenciou operácií. Okrem vyčlenenia indivíduí, teda rozkladu homogénneho kontinua súcna na diskrétne jednotky, ku ktorým sa možno jednotlivo vzťahovať, forma jazyka vnáša do sveta aj rôzne ***príbuzenstvá***. Medzi geometrickými útvarmi definujeme podobnosť či afinitu, v algebre zavádzame medzi objektmi rôzne kongruencie. Takto jazyk vnáša do sveta určité členenie, základnú štruktúru, ku ktorej sa subjekt dokáže vzťahovať.

Treťou úlohou formy jazyka – po začlenení subjektu a štruktúrovaní sveta – je zaviesť do sveta určité neutrálne pozadie, ktoré umožní subjektu ***orientovať sa v celku sveta***. Typickými prvkami tohto druhu sú v geometrii priestor a v algebre číselný obor. Tieto pojmy neoznačujú nič faktické a možno sa preto bez nich zaobísť. Namiesto polohy bodu v priestore by sme v geometrii mohli dôsledne hovoriť o vzájomnej polohe rôznych bodov. Ale je zrejmé, že okrem komplikácií pri vyjadrovaní by sme tým veľa nezískali. Ukazuje sa, že je účelné jazyk doplniť o podobné neutrálne pozadie, o ktoré potom subjekt môže oprieť rôzne schémy, pomocou ktorých sa dokáže vo svete lepšie ***orientovať***. Často sa však stáva, že svet nie je v zhode so schematizmom, pomocou ktorého sa subjekt orientuje. Vtedy je vhodné jazyk doplniť o ideálne prvky, ako sú nevlastné (nekonečne vzdialené) body v geometrii alebo komplexné čísla v algebre. Sú to výrazy jazyka, ktorým síce vo svete nič nezodpovedá, ale keď ich k jazyku pridáme, bude tento omnoho ***prehľadnejší***. Schémy, ktoré by inak mali iba obmedzenú platnosť, sa stanú univerzálnymi. Po pridaní nekonečne vzdialených bodov k rovine majú každé dve priamky priesečník (rovnobežky v nekonečne), podobne ako po pridaní imaginárnych čísel k číselnému oboru má každé číslo druhú odmocninu (záporné čísla komplexnú).

b. možnosť rekonštrukcie vývinu exaktných disciplín ako zmien formy jazyka

Videli sme, že jednotlivé aspekty formy jazyka slúžia spoločnému cieľu – situovať subjekt do sveta, štruktúrovať svet spôsobom, ktorý je pre subjekt zrozumiteľný, a poskytnúť prostriedky na lepšiu orientáciu v takto štruktúrovanom svete. Pritom prvky jazyka, ktoré zakladajú *identitu, situovanosť, individualitu, príbuzenstvo, orientáciu* a *prehľad* subjektu, nie sú faktické. Tam, kde prebieha horizont, sa fakticky nič nenachádza, reálne nie sú dané žiadne pevné indivíduá, fakticky neexistuje priestor, nehovoriac už o jeho nevlastných bodoch. A práve preto sa aspekty formy jazyka ponúkajú ako ideálny nástroj na opis objektácií, typu zmien, ktorý je predmetom tejto kapitoly. Je to prirodzené, lebo tie prvky jazyka, ktoré priamo alebo sprostredkovane referujú, sú vzťahom referencie zviazané, a preto sa dajú iba ťažko meniť. Naproti tomu aspekty formy jazyka, práve tým, že nereferujú, sú do značnej miery voľné. Zviazané sú iba vzťahmi medzi sebou, a preto v prípade, že rozvoj poznania vyžaduje zmenu jazyka, poskytujú dostatočný priestor pre inovácie.

Aby sme sa vyhli nedorozumeniam, chceme zdôrazniť, že naša koncepcia, aj keď sa do značnej miery opiera o historický materiál, nemá nič spoločné s rôznymi koncepciami historizmu. Regularity, ktoré sme našli v dejinách geometrie a algebry, nepovažujeme za historické zákonitosti. Náš prístup je verziou štrukturálnej analýzy a historický materiál používa iba ako zásobáreň príkladov. Zakladá sa na troch predpokladoch:

1. Existuje malý počet spôsobov, ako možno dať do vzťahu jazyk teórie so svetom, ktorý teória opisuje. Tieto spôsoby sú určené formou jazyka, ktorých sme zatiaľ sme našli osem.
2. Keď sa v procese rozpracovávania teórie vynoria problémy, jednou z možností, ako sa s nimi vysporiadať, je zmeniť formu jazyka. Nová forma často umožní vyriešiť problémy, ktoré boli v rámci predošlej formy neriešiteľné.
3. Vedci sú konzervatívni, preto sa snažia urobiť čo najmenšiu zmenu vo forme jazyka.

Tieto princípy vnášajú do historickej postupnosti foriem jazyka regularitu. Postupnosť, ktorú sme našli (*perspektivistická forma, projektívna forma, koordinatívna forma, ... konceptuálna forma*) je usporiadaná v smere narastajúcej komplexnosti. Zdrojom regularity v dejinách vedy však nie je žiadna historická nevyhnutnosť, ale racionalita vedcov, ktorí siahajú po zložitejšej forme jazyka až potom, keď vyčerpali možnosti všetkých jednoduchších foriem. Spoločná regularita, ktorú sme objavili v dejinách geometrie a algebry je vysvetlená. Vývin v geometrii a algebre prebiehal rovnakým spôsobom (až na výnimky, na ktoré sme upozornili v odseku 2. 2. 1) preto, lebo matematici majú tendenciu riešiť problémy „ekonomicky“, teda na úkor čo možno najmenšej zmeny v štruktúre jazyka. Preto, aj keď sa príslušná regularita odkryla v časovom priebehu, ako pravidelné striedanie foriem jazyka v dejinách geometrie a algebry, ide o zákonitosť štrukturálnu. Jej podstatou je existencia ôsmych foriem jazyka, ktoré tvoria lineárnu postupnosť z hľadiska komplexnosti svojej stavby. Práve táto lineárne narastajúca komplexnosť spôsobila, že sa vo vývine geometrie a algebry jednotlivé formy opakovali v rovnakej historickej postupnosti. Takto sa ukazuje, že pojem formy jazyka môže byť účinným nástrojom pri rekonštrukcii historického vývinu exaktných disciplín.

Preto možno sformulovať úlohu pokúsiť sa v podobnom duchu rekonštruovať vývin ďalších matematických disciplín. V geometrii vedľa syntetickej geometrie, ktorej rekonštrukciu sme načrtli, sa možno pokúsiť o analogickú rekonštrukciu analytickej, algebraickej a diferenciálnej geometrie. Podobne v oblasti symbolických jazykov možno vedľa algebry, ktorej rekonštrukciu sme podali, pristúpiť k rekonštrukcii diferenciálneho a integrálneho počtu a aj matematickej logiky. Ako ďalšie možné použitie si možno predstaviť rekonštrukciu vývinu klasickej mechaniky, termodynamiky alebo teórie poľa. V oblasti klasickej mechaniky sa naša metóda ukazuje byť použiteľná (pozri Kvasz 2001), ale ostatné oblasti sú stále otvorené.

2.2.3 Pojem formy jazyka a filozofia matematiky

Vedľa nástroja pre rekonštrukciu historického vývinu exaktných disciplín sa pojem formy jazyka ukazuje ako užitočný aj pre filozofiu matematiky. Už v bode c kapitoly 2.1.A.4 sme sa snažili Poincarého filozofiu geometrie dať do súvislosti s integratívnou formou jazyka. Skutočne sa zdá, že to čo Poincaré hovorí o geometrii v *La Science et l'Hypothése* (Poincaré 1902) je epistemologickou analýzou situácie, ktorá bola nastolená zavedením integratívnej formy jazyka. Podobne by bolo možné Kantovu filozofiu geometrie vztiahnuť ku kompozitívnej forme jazyka. Ak to urobíme, teda ak určitú filozofickú koncepciu nebudeme chápať vo všeobecnosti, ale vo vzťahu ku konkrétnej forme jazyka, môžeme si utvoriť lepšiu predstavu o jej pozitívnom prínose, ako aj o jej medziach.

a. filozofia matematiky a jej možná podmienenosť formou jazyka

Takýto prístup by mohol pomôcť vyvarovať sa striktným odsúdeniam mnohých filozofických pozícií, ktoré sú (podobne ako Kantova) perfektne legitímne a adekvátne v medziach určitej formy jazyka. A rovnako by nás to mohlo ochrániť pred snahou obhajovať neobhájiteľné (ako sa to niekedy deje aj v súvislosti s Kantom) a vidieť rovnako jasne aj medze, za ktorými je potrebné prejsť k inej filozofii. Keď Kanta pochopíme ako filozofickú pozíciu založenú na kompozitívnej forme jazyka a Poincarého ako pozíciu zviazanú s integratívnou formou jazyka, otvára sa nový pohľad na vzájomnú korešpondenciu foriem jazyka a rôznych filozofických pozícií. Zdá sa, že platnosť určitej pozície vo filozofii matematiky možno najlepšie vymedziť pomocou zodpovedajúcej formy jazyka. Mnoho nedorozumení vo filozofii matematiky súvisí s tým, že sa *zmení forma jazyka* a matematika pomocou novej formy dospeje k výsledkom, ktoré sú v rozpore s príslušnou filozofickou pozíciou. Pritom, keďže forma jazyka sa v jazyku iba ukazuje, ale nedá sa vyjadriť, filozofi si zmenu formy jazyka neuvedomia, a nové poznatky pokladajú za vyvrátenie príslušnej filozofickej pozície.

Rekonštrukcia vývinu geometrie nás vyzýva pokúsiť sa aj pre ostatné formy jazyka geometrie nájsť (alebo vypracovať) filozofické pozície, ktoré by ich reflektovali s rovnakou hĺbkou a presnosťou, s akou Kant reflektoval kompozitívnu a Poincaré integratívnu formu jazyka geometrie. Sme presvedčení, že každá forma jazyka nastoľuje špecifické filozofické problémy a vyžaduje preto špecifickú filozofickú reflexiu. Okrem zúplnenia spektra filozofických pozícií je možné, že naše analýzy umožnia pochopiť márnosť niektorých filozofických kontroverzií. Zdá sa, že niektoré kontroverzie sú nerozhodnuteľné práve preto, že každá zo strán zakladá svoju argumentáciu na inej forme jazyka. Potom argumenty, ktoré sú pre jednu stranu prijateľné, sú pre druhú absurdné.

b. forma jazyka a problém hraníc jej filozofickej reflexioe

Rovnako zaujímavé, ako porovnávať filozofické pozície zodpovedajúce rôznym formám jazyka, je porovnať filozofickú reflexiu určitej teórie s aktuálnou matematickou praxou. Z tohto hľadiska predstavuje Poincarého dielo pozoruhodný podnet na zamyslenie. Na jednej strane bol Poincaré popredným matematikom svojej doby. Na druhej strane bol významným filozofom matematiky. Je však zarážajúce, že tieto dve oblasti jeho aktivity akoby spolu vôbec nesúviseli. Matematika, ktorú vo svojej filozofii reflektuje nesúvisí s matematikou, ktorú sám rozvíjal. Domnievam sa, že pojem formy jazyka umožňuje vysvetliť tento pozoruhodný aspekt Poincarého tvorby. Poincaré prispel do matematiky okrem mnohých iných vecí založením algebraickej topológie, ktorá znamenala prechod ku konštitutívnej forme jazyka geometrie. V oblasti filozofie matematiky zas podal prenikavú epistemologickú reflexiu integratívnej formy jazyka geometrie. A práve rozdielnosť formy jazyka oblasti, v ktorej bol tvorivo činný a oblasti ktorú filozoficky reflektoval, ilustruje tézu, že jazyk nemôže svoju formu vyjadriť. Poincaré filozoficky reflektoval integratívnu formu jazyka, kým konštitutívnu formu, ktorú sám vytvoril, filozoficky nereflektoval. Preto v relativizovanej podobe si Witgensteinova téza zachováva platnosť. V danom jazyku možno reflektovať iba jazyky s jednoduchšou formou. Je možné, že práve preto, že sa Poincaré vo vlastnej tvorbe dostal o úroveň nad integratívnu formu jazyka, bol schopný integratívnu formu jazyka tak presne reflektovať.

Ak tento jav nie je púhou historickou náhodou, mohol by vniesť jasno do jedného aspektu Kantovej filozofie geometrie, ktorý je inak dosť nepochopiteľný. Bez najmenších pochýb možno tvrdiť, že Kant bol v oblasti epistemológie objaviteľom interpretatívnej formy jazyka, teda presne tej formy, pomocou ktorej v geometrii Gauss, Lobačevskij a Bolyai objavili svoje neeuklidovské systémy. Kant bol jedným z prvých, kto si uvedomil, že súčasťou videnia je okrem pasívnej registrácie zmyslových vnemov aj aktívny, interpretačný výkon vedomia. Je však zarážajúce, že tento svoj filozofický objav použil na artikulovanie filozofie matematiky, ktorá je v plnej zhode s kompozitívnou formou jazyka.[47] Kant tak pri budovaní filozofie geometrie nevyužil možnosti, ktoré odkrýva interpretatívna forma jazyka, ktorú v epistemológii sám objavil. Je prirodzené pokúsiť sa tento rozpor v Kantovom myslení dať do súvisu s podobným rozporom v diele Poincarého, ako ďalšie potvrdenie názoru, že tvorcom novej formy jazyka ostávajú zastreté možnosti jej reflexie.

V prípade Kanta je však situácia zložitejšia. U Poincarého sa konštitutívna forma jazyka prejavuje v jeho matematickom diele, kým vo filozofii matematiky Poincaré reflektuje integratívnu formu. Preto tu nie je žiaden zásadnejší problém, stačí si uvedomiť, že Poincaré filozoficky reflektuje formu jazyka ktorá predchádza formu, v rámci ktorej sám matematicky tvorí. U Kanta je situácia zložitejšia preto, lebo ako tvorivý čin (objav interpretatívnej úlohy mysle) tak aj reflexia (tézy ktoré predkladá) sa týkajú tej istej oblasti, totiž filozofie. Preto u neho nie je možné tak jednoducho oddeliť formu, ktorá je základom jeho tvorby od formy, ktorá je použitá pri reflexii. Kantova tvorba sa totiž týka filozofie a teda reflexie. Preto je možné, že interpretatívne spory, ktoré sú v prípade Kanta tak časté, možno vpísať na vrub prítomnosti dvoch foriem v jeho diele. Tí, ktorí chcú Kanta kritizovať, vykladajú Kantove názory na pozadí kompozitívnej formy jazyka, a uvedú rad matematických výsledkov (spravidla prislúchajúcich k interpretatívnej forme) ktoré takto pojatej Kantovej filozofii protirečia. Na druhej strane filozofi, ktorí chcú Kanta obhajovať, poukazujú na interpretatívnu formu, ktorá je v jeho diele tiež obsiahnutá. Napríklad podľa novokantovcov objav neeuklidovskej geometrie treba považovať skôr za potvrdenie Kantovej filozofie geometrie, ako za jej vyvrátenie.

c. Kantova filozofia verzus neeuklidovské geometrie

Vyššie uvedené úvahy možno sformulovať do podoby určitej stratégie na obhajobu (či ústretovú interpretáciu) Kantovej filozofie geometrie. Lobačevského objav neeuklidovskej geometrie bol spojený so zásadnou lingvistickou inováciou – so zavedením interpretačného odstupu pri vnímaní geometrických obrázkov. Pokiaľ človek nie je ochotný takýto posun urobiť, neeuklidovský svet sa mu neotvorí a tak nebude schopný porozumieť tomu, čo Lobačevskij tvrdí. Keď relativizujeme Kantovu pozíciu a priradíme ju k zodpovedajúcej forme jazyka, je možné racionálne obhajovať Kantovu filozofiu geometrie, a to nielen ako pozoruhodný výkon špekulatívneho génia Königsbergského učenca, ale ako vecne správnu a fakticky platnú filozofickú reflexiu geometrie pred vznikom interpretatívnej formy jazyka. To neznamená odmietnutie všetkých kritických argumentov proti Kantovi. Vylúčime iba argumenty, ktoré používajú výdobytky interpretatívnej formy jazyka, teda napríklad argumenty založené na objave neeuklidovskej geometrie. Sú to totiž argumenty, ktorých sformulovanie nie je možné v kompozitívnej forme (pozri Kvasz 2005b).

d. veľký počet paralelných nezávislých objavov neeuklidovských geometrií

V úvode ku kapitole 2 sme uviedli citát od Igora Šafareviča, upozorňujúci na pozoruhodný charakter objavu neeuklidovských geometrií. Šafarevič spomína štyroch matematikov, ktorí nezávisle na sebe „*prišli s tým istým riešením*“ pričom ich práce obsahujú obrázky „*akoby nakreslené tou istou rukou*“. Náš prístup umožňuje tento pozoruhodný fenomén, ak nie vysvetliť, tak aspoň spraviť pravdepodobnejším. Ako sme už niekoľkokrát spomenuli, foriem jazyka existuje iba malý počet, preto je plauzibilné, že matematici, ktorí pracovali začiatkom 19. storočia na probléme piateho postulátu, používali rovnakú formu jazyka. Keďže príslušný problém nebolo možné vyriešiť v rámci dobovej formy jazyka, Gauss, Bolyai, Lobačevskij aj Schweikart boli nútení zmeniť formu jazyka. Pritom malý počet foriem jazyka ako aj regularita ich usporiadania robia pravdepodobným, že všetci uskutočnia inováciu rovnakého druhu – prechod k interpretatívnej forme. Preto obrázky o ktorých hovorí Šafarevič, nekreslila jedna ruka, ale štyri rôzne ruky, vedené spoločnou formou jazyka.

Samozrejme, ešte stále ostáva zodpovedať otázku, prečo bolo treba na tento objav tak dlho čakať. Prečo muselo od doby, keď v piatom storočí Proclos sformuloval problém piateho postulátu, po dobu, kedy ho uvedení matematici nezávisle od seba rozriešili, uplynúť štrnásť storočí. Domnievam sa, že aj v tomto bode poskytuje naša teória plauzibilné vysvetlenie. K tomu aby mohla vzniknúť interpretatívna forma jazyka, v rámci ktorej je možné formulovať neeuklidovskú geometriu, musel vývin geometrie prejsť perspektivistickou a projektívnou formou, čo si vyžiadalo určitú dobu.

Vidíme, že epistemológia umožňuje úspešne zodpovedať viaceré otázky o vývine matematiky. Vývin matematiky nie je len otázkou vhodných spoločenských podmienok či iných náhodných okolností. Existuje rad epistemologických faktorov, daných regularitou zmien formy jazyka, ktoré hrajú vo vývine matematiky rovnako dôležitú úlohu. Otázku vzniku neeuklidovských geometrií nie je možné redukovať na psychológiu objavu, t.j. na otázku, kedy a koho napadol príslušný odvážny dohad (bold guess, o ktorom hovorí Popper) ani na sociológiu vedeckého spoločenstva, t.j. na otázku, kedy vedecké spoločenstvo prijalo novú paradigmu (ako by problém formuloval Kuhn). Otázka vzniku určitej teórie je podmienená radom epistemologických faktorov súvisiacich so zmenami formy jazyka, ktorých porozumenie je dôležité ako z hľadiska filozofie matematiky, tak aj z hľadiska jej vyučovania.

2.2.4 Zmeny formy jazyka a vývin subjektivity

Postupnosť objektácií, ktorú sme našli v dejinách matematiky, prináša zmeny epistemického subjektu (jedného z aspektov formy jazyka), ktoré na seba pozoruhodným spôsobom nadväzujú. Desargues preniesol implicitné hľadisko renesančného maliarstva do jazyka a pretvoril ho v explicitný perspektivistický subjekt. Lobačevskij pri prenášaní trigonometrických vzorcov z hraničnej plochy na neeuklidovskú rovinu využíval perspektivistický subjekt (pomocou neho uskutočnil premietanie), avšak, keďže celý obrázok je neeuklidovský a teda v euklidovskej geometrii nenakresliteľný, bol nútený zaviesť ešte implicitný interpretačný subjekt. Pomocou neho zabezpečil, aby sme to, na čo sa pozeráme, nechápali prvoplánovo, ako čiary euklidovskej geometrie (čím v skutočnosti sú) ale aby sme boli schopní vidieť v nich nenakresliteľné objekty neeuklidovskej geometrie. Beltrami zabudoval tento implicitný interpretačný subjekt do jazyka v podobe explicitných pravidiel na preklad medzi vonkajším a vnútorným jazykom modelu. Tým vytvoril explicitný interpretatívny subjekt. Cayley oddelil od seba vnútorný a vonkajší jazyk, medzi ktorými sa uskutočňoval preklad, a umiestnil medzi ne projektívnu rovinu. Aby to však mohol urobiť, musel napred rovinu zbaviť jej euklidovskej štruktúry. Nato potreboval dodatočnú štruktúru jazyka, založenú na novom druhu epistemického subjektu – integratívnom. Avšak u Cayleyho bol integratívny subjekt iba implicitný. Klein zabudoval implicitný integratívny subjekt do jazyka v tvare transformačných grúp, čím vytvoril explicitný integratívny subjekt. Riemann vo svojej *analysis situs* používa transformačné grupy explicitného integratívneho subjektu. Avšak kvôli tomu, aby mohol prekročiť obmedzenia, ktoré jazyku geometrie kladie trojrozmerný priestor, zaviedol rezanie a lepenie, čo sú akty, ktoré prislúchajú implicitnému konštitutívnemu subjektu. Poincaré vo svojej kombinatorickej topológii zabudoval tento konštitutívny subjekt explicitným spôsobom do jazyka. Cantor objavil, že všetky konštitutívne akty majú rovnakú štruktúru – spočívajú v tom, že sa určitý systém objektov uchopí ako jeden celok. Teória množín tak využíva ešte základnejšiu štruktúru než konštitutívne akty. Hilbert priniesol túto novú konceptuálnu formu jazyka do geometrie. Konceptuálna forma jazyka je zviazaná s novým druhom epistemického subjektu, ale ten je spočiatku, podobne ako v ostatných prípadoch, len implicitný. Nakoniec Tarski zabudoval túto implicitnú štruktúru epistemického subjektu explicitne do jazyka.

a. dynamika zmien epistemického subjektu v geometrii

Vidíme, že uvedená postupnosť prechodov nie je náhodná sekvencia, ale ide o zmeny na seba nadväzujúce, v ktorých sa stále bohatšie štruktúry subjektu zabudovávajú do jazyka. Najprv perspektivistického subjektu v podobe hľadiska, ktoré zakladá subjektívnosť pohľadu. Potom interpretatívneho subjektu v podobe prekladu, ktorý zakladá subjektívnosť významu. Ďalej integratívneho subjektu v podobe zjednotenia možných interpretácií, ktoré zakladá subjektivitu možností sebapojatia. Ďalším krokom bolo zabudovanie konštitutívneho subjektu v podobe konštitutívnych aktov, ktoré zakladajú subjektívnosť sebautvárania. Posledným bol konceptuálny subjekt, ktorý je zatiaľ najhlbšou štruktúrou subjektivity, používanou v geometrii. Nemôžeme poprieť, že všetky opísané dimenzie naša subjektivita má. Máme svoje jedinečné hľadisko, z ktorého vnímame svet. Na báze tohto hľadiska sa zakladá naša jedinečná interpretácia skutočnosti. Táto interpretácia zakladá našu jedinečnú potencionalitu sebaporozumenia. Na tejto potencionalite sa zakladá náš jedinečný proces sebautvárania. Preto je zrejmé, že zdrojom, odkiaľ geometria čerpala pri svojom vývine všetky opísané štruktúry jazyka sme my sami, naša vlastná subjektivita. Stále bohatšie štruktúry našej subjektivity sú postupne zabudovávané do jazyka geometrie. Preto na otázku, o čom sú dejiny geometrie, možno dať jednoduchú odpoveď. Sú o nás.

Epistemický subjekt v jazyku geometrie môže byť buď implicitný alebo explicitný. Implicitný či explicitný vzhľadom k jazyku. Implicitný subjekt je spojený s postojom, ktorý musíme zaujať, aby sme za zjavne sa zbiehajúcimi úsečkami uvideli rovnobežné strany stropu, za obyčajnými krivkami euklidovskej roviny zahliadli čiary neeuklidovskej geometrie, za metrickou štruktúrou euklidovskej roviny uvideli projektívnu rovinu zbavenú pojmu vzdialenosti a uhlov alebo v štvorci s označenými stranami zahliadli Kleinovu fľašu. Tento subjekt síce nie je v jazyku vyjadrený, pri kreslení obrázkov sa však s ním počíta, obrázky sa kreslia pre neho. Ďalší krok, predstavovaný Desarguom, Beltramim, Kleinom, Poincarém či Tarskim spočíva vo zvnútornení tohto subjektu. Subjekt nadobúda podobu explicitného výrazu jazyka. Epistemické ruptúry spočívajúce v explicitnom zabudovávaní stále hlbších štruktúr subjektu do jazyka nazývame ***objektáciami***. Totiž v ich priebehu dochádza ku spredmetneniu subjektu, subjekt nadobúda predmetnú podobu hľadiska, prekladového slovníka, grupy symetrií, simpliciálneho komplexu alebo schémy axióm. Pritom objektácia úzko súvisí s objektivizáciou. Dá sa povedať, že každý jazyk umožňuje ***objektivizovať*** také vzťahy, ktoré zodpovedajú tomu, aká štruktúra subjektu je v jazyku spredmetnená. Keď chcem napríklad objektivizovať to, ako vyzerá predmet z rôznych hľadísk, tak potrebujem desarguovský jazyk, v ktorom je zabudovaný perspektivistický subjekt. Využijúc možnosti, ktoré tento jazyk ponúka, menovite explicitne vyjadriť hľadisko pomocou bodu, sme schopní toto hľadisko transformovať, a tak analyticky (t.j. opierajúc sa iba o syntax) zodpovedať postavenú otázku. Takto štruktúra subjektu, zabudovaného do jazyka, umožňuje objektívne ukázať vzťahy medzi rôznymi hľadiskami. Totiž to, ako sa predmet javí z rôznych hľadísk je subjektívne, z každého hľadiska sa to javí inak. Avšak táto subjektivita má objektívny ráz, lebo každému, kto príslušné hľadisko zaujme, a nemá očnú vadu, sa to javí rovnako. Na to, aby sme túto objektívnu črtu mohli vykázať, potrebujem jazyk, v ktorom je hľadisko spredmetnené (objektované), a ktorý preto umožňuje zmenu obrazu pri zmene hľadiska objektívne rekonštruovať. Možno teda povedať, že objektivita je daná objektáciou.

b. prehĺbenie porozumenia vývinu subjektivity vďaka prechodu do algebry

Pri prenose nášho aparátu do oblasti algebry sme sa opierali o určité epistemologické paralely medzi týmito dvoma oblasťami matematiky. Napríklad Weberova faktorizácia okruhu polynómov podľa určitého ideálu je z epistemologického hľadiska príbuzná s Riemannovou ideou rezania a lepenia plôch v geometrii. Formu jazyka spoločnú týmto dvom teóriám možno označiť termínom konštitutívna forma, lebo v oboch prípadoch jazyk preberá úlohu konštituovať objekty teórie.[48] Ale kým v jednotlivých oblastiach, uvažovaných samostatne, je vývin formy jazyka jasný, keď postavíme do paralely dejiny algebry s dejinami geometrie, vynára sa otázka, čo zjednocuje tieto vývinové procesy. Pokúsim sa ukázať, že tým spoločným základom, je vývin epistemického subjektu.

Akoby ľavý stĺpec schémy, uvedenej v kapitole 2.1.A.9 zhŕňajúcej dejiny algebry, predstavoval okamihy zrodu nového druhu subjektivity, zrodu novej ***skúsenosti seba***. Naproti tomu formy jazyka stojace v pravom stĺpci vnášajú do tejto skúsenosti seba pluralitu, prinášajú ***skúsenosť iného***. Perspektíva vyjadruje to, ako *ja* vidím svet, pomocou projektívnej formy môžem pochopiť, ako vidí svet *iný*. Koordinatívna forma vyjadruje to, ako *ja* vnášam poriadok do svojej skúsenosti, kým kompozitívna forma umožňuje zladiť alternatívne poriadky *iných*. Interpretatívna forma vyjadruje to, ako *ja* rozumiem svojej skúsenosti, integratívna forma mi poskytuje možnosť porozumieť skúsenosti *druhého*. Konštitutívna forma vyjadruje to, ako *ja* konštituujem seba, konceptuálna forma mi odkrýva možnosť porozumieť sebakonštitúcii *iného*. Teda dynamika v rovine objektácií je dynamikou stretania sa so sebou a stretania sa s iným.

Uvedený diagram ukazuje, že cesta k sebe vedie cez iného. Na to, aby som sa mohol so sebou stretnúť v koordinatívnej rovine ako s nositeľom poriadku sveta a odkryť svoju neodňateľnú slobodu subjektu (čo je jadrom ***karteziánskeho zmocnenia sa seba***), musím sa napred stretnúť s iným v rámci projektívnej formy, naučiť sa vidieť svet očami druhého, a tým sa oslobodiť od egocentrickej perspektívy. Podobne na to, aby som sa mohol so sebou stretnúť v interpretatívnej rovine ako s nositeľom hodnôt a hodnotovej interpretácie skutočnosti (čo je jadrom ***romantického precítenia seba***), musím sa napred stretnúť s iným v rámci kompozitívnej formy a naučiť sa tolerancii alternatívnych poriadkov. Podobne na to, aby som sa mohol stretnúť so sebou v konštitutívnej rovine, ako nositeľom svojej existencie (čo je jadrom ***existencionálnej voľby seba***), musím sa napred stretnúť s iným v integratívnej rovine, musím pochopiť základnú ekvivalentnosť všetkých interpretácií sveta. Až keď sa oslobodím od pocitu samozrejmosti (prirodzenosti, správnosti ...) svojej interpretácie sveta a naučím sa integrovať životnú skúsenosť druhého do spoločného ľudského údelu, až potom sa môžem stretnúť so sebou ako s existenciou.

Bez stretnutia s iným človeku hrozí uviaznutie na povrchu seba, uviaznutie vo vrchných vrstvách vlastnej subjektivity. Ale platí to aj naopak. Každému stretnutiu s iným musí predchádzať stretnutie so sebou. Na to, aby som sa mohol stretnúť s iným v projektívnej rovine ako s nositeľom alternatívneho pohľadu na svet a odkryť tak pluralitu vízií sveta (čo je jadrom ***manieristickej fascinácie iným***), musím sa napred stretnúť so sebou v rámci perspektivistickej formy a naučiť sa vidieť svet z pevného hľadiska. Podobne na to, aby som sa mohol stretnúť s iným v kompozitívnej rovine ako so zástancom alternatívneho poriadku sveta (čo je jadrom ***osvietenskej tolerancie iného***), musím sa napred stretnúť so sebou v rámci koordinatívnej formy a naučiť sa podriadiť svet pevnému poriadku. Podobne na to, aby som sa mohol stretnúť s iným v integratívnej rovine ako s nositeľom alternatívnych hodnôt (čo je jadrom ***pozitivistickej neutrality vo vzťahu k inému***), musím sa napred stretnúť so sebou v interpretatívnej rovine ako s nositeľom hodnotovej interpretácie skutočnosti.

Dynamika prenikania do stále hlbších vrstiev subjektivity je základom dejín geometrie aj algebry. V tomto zmysle sú dejiny algebry súčasťou všeobecnej ľudskej skúsenosti, podobne ako dejiny literatúry či maliarstva, a ich štúdiom môžeme odhaliť mnoho nového o nás samotných.

2.2.5 Problém porozumenia matematickým pojmom

Keď prenesieme obraz vývinu matematiky ktorý sa odkryl pri rekonštrukcii objektácií v matematike do teórie vyučovania matematiky, dostávame pomerne silný nástroj pre identifikáciu zdrojov neporozumenia matematike. Za týmto účelom je dôležité uvedomiť si nasledovné skutočnosti.

Každý matematický pojem sa viaže na určitú formu jazyka, v rámci ktorej sa prirodzene vynoril. Napríklad pojem substitúcie sa viaže na projektívnu formu jazyka algebry, kým pojem grupy na jeho integratívnu formu. V rámci formy v ktorej sa zrodil má daný pojem bohatú sémantickú štruktúru, jeho zavedenie je motivované a zrozumiteľné. Na predchádzajúcich formách je jazyk príliš jednoduchý, takže obsah príslušného pojmu nedokáže dostatočne ilustrovať. Na neskorších formách je jazyk naopak príliš abstraktný, a tak zavedenie daného pojmu nedokáže patrične motivovať. Preto pre každý pojem existuje určitá optimálna formu jazyka, v rámci ktorej je pojem dostatočne konkrétny a súčasne dostatočne bohatý, aby sa mohol správne konštituovať.

Matematika má tendenciu svoje pojmy sémanticky i motivačne vyprázdňovať. Pritom to nie je nejaká zlovolnoť matematikov, ale nevyhnutnosť. Matematika totiž žije práve z toho, že pojmy, ktoré sa zrodili v určitej oblasti, v určitom kontexte a z určitej potreby prenáša a tvorivo aplikuje v úplne inej oblasti, v úplne odlišnom kontexte a na úplne iné ciele. Aby prenášanie pojmov, ktoré je motorom napredovania matematiky, mohli úspešne uskutočňovať, musia matematici pojmy dekontextualizovať. Musia ich teda zbaviť naviazanosti na konkrétny kontext ako aj na konkrétne motívy jeho vzniku. Preto keď určitý pojem vojde do matematiky, je už do veľkej miery ochudobnený a vyprázdnený. A čo je najdôležitejšie, je vytrhnutý z formy jazyka, do ktorej prirodzene patrí. Matematickú teóriu tvorí súbor pojmov, ktoré patria k rôznym formám jazyka, pojmov, ktoré majú pôvod v rôznych obdobiach rozvoja teórie. Keď matematici pristupujú k úlohe určitú teóriu vyložiť študentom, predkladajú ju spravidla v takejto dekontextualizovanej podobe. Závisí potom od zrelosti študenta, ako veľkú časť teórie dokáže rekontextualizovať a zabudovať do svojej vlastnej sémantickej siete. Samozrejme, čím vyspelejšiu formu jazyka dosiahol študent v osobnom vývine, tým má väčšiu šancu rozumieť tomu, čo mu učiteľ predkladá. Väčšinou sa tomu hovorí, že má na matematiku talent. Naopak študenti, ktorých vlastné myslenie dospelo iba po niektorú z jednoduchších foriem jazyka, výkladu nerozumejú.

Domnievam sa, že rekonštrukcia matematiky, ktorú sme uviedli v tejto časti knihy, ponúka učiteľovi silný nástroj na zlepšenie zrozumiteľnosti svojich prednášok. Môže si totiž položiť otázku, k akej forme jazyka sa viažu pojmy a tvrdenia, ktoré ide študentom predkladať. Ak je učivo príliš nehomogénne, a obsahuje materiál patriaci do viacerých foriem jazyka (čo je skôr pravidlo ako výnimka), príslušná rekonštrukcia mu umožňuje zoradiť látku podľa narastajúcej komplexnosti formy a urobiť v nej určité presuny, ktoré zvýšia jej zrozumiteľnosť. Keď sa učiteľ stretne s neporozumením, naša teória mu ponúka nástroj na lokalizovanie príčiny neporozumenia. Som presvedčený, že neporozumenie matematike má vo väčšine prípadov príčinu v odlišnosti formy jazyka, ktorú používa učiteľ pri výklade učiva a formy jazyka, na základe ktorej interpretuje učiteľove slová žiak. Učiteľ si rozdiely medzi jednotlivými formami jazyka neuvedomuje, a v priebehu jedného celku predkladá študentovi pojmy a tvrdenia, ktoré patria do viacerých foriem. Metóda rekonštrukcie matematiky, uvedená v tejto kapitole, umožňuje položiť si otázku, do akej formy jazyka patria pojmy a tvrdenia, ktoré robia študentom problémy. Po identifikácii problémových pojmov a tvrdení je ďalším krokom pokúsiť sa premostiť formu jazyka, charakteristickú pre myslenie žiaka v danej oblasti s formou jazyka, v ktorej je zasadené učivo, ktoré mu robí problémy. Niekedy je možné nájsť premostenie priamo, inokedy (v prípade, keď je vzdialenosť medzi žiakovým myslením a učivom väčšia) si to vyžiada priniesť do hry ďalšiu formu jazyka, ktorá umožní takéto prepojenie sprostredkovať. Čitateľ asi rozpoznal, že v pozadí nášho prístupu je varianta konštruktivizmu, ktorá pripomína Piagetovu teóriu. Na rozdiel od Piageta však naša teória nevychádza zo psychológie, ale opiera sa o epistemologickú rekonštrukciu dejín matematiky.

2.2.6 Dvestoročná diera v osnovách

Zvláštnym aspektom vyučovania viacerých matematických disciplín je pozoruhodná priepasť, ktorá od seba oddeľuje stredoškolské a vysokoškolské učivo. Asi najmarkantnejší je tento fenomén v matematickej analýze, kde stredná škola končí niekde na konci 17. storočia (pojem súradníc, elementárne vlastnosti funkcií jednej premennej, základné vlastnosti pojmu derivácie a integrálu) a univerzitný kurz analýzy sa začína spravidla ***ε-δ analýzou***, teda druhou polovicou 19. storočia. Takto sa vlastne takmer dve storočia vytratili z učiva. Rovnaká medzera existuje aj v oblasti algebry, kde stredná škola končí na konci 17. storočia (zvládnutím koordinatívnej formy jazyka, prinášajúcej manipulácie s polynómami a inými výrazmi), kým univerzitný kurz algebry štartuje pojmom ***grupy*** (poľa či vektorového priestoru), čo je pojem integratívnej formy jazyka. Spravidla sa pojem grupy zavádza vo weberovskej podobe (t. j. abstraktne, pomocou axióm). To znamená, že žiak od koordinatívnej formy musí prejsť priamo k forme konštitutívnej. Podobne ako v matematickej analýze, aj v algebre tak existuje medzera, spojená s vynechaním kompozitívnej a interpretatívnej formy. Analogická diera sa vyskytuje aj v geometrii, kde sa univerzitný kurz začína ***topológiou*** bez toho, aby sa ukázala cesta, ktorá k nej vedie. Topológia je jazyk, ktorý je spojený s konštitutívnou formou jazyka. Študent nemá šancu pochopiť túto formu jazyka, keď prv nepochopil interpretatívnu formu a integratívnu formu. Samozrejme, podobne ako v prípade ε-δ analýzy a teórie grúp, aj v prípade topológie sa študent môže učivo naučiť naspamäť a lokálne môže porozumieť jednotlivým dôkazom a konštrukciám. Celkový zmysel topológie mu však ostane skrytý.

Je pravdepodobné, že práve táto medzera v učive je zodpovedná za šok, ktorý mnohí študenti zažívajú po príchode na vysokú školu. Naša rekonštrukcia vývinu algebry a geometrie ukazuje, že jednotlivé formy jazyka, ktoré sa vo vývine určitej matematickej disciplíny postupne objavujú, na seba po sémantickej stránke nadväzujú. Preto nie je možné porozumieť látke, ktorá sa opiera o konštitutívnu formu jazyka, pokiaľ študent nezvládne interpretatívnu a integratívnu formu.

Každý prechod od danej formy k nasledujúcej, braný sám o sebe, je zrozumiteľný, a nepredstavuje zásadnejší didaktický problém. Keď však dva či tri medzistupne vynecháme (čo sa deje pri prechode na univerzitu), študenti nemajú šancu tento skok nasledovať, nedokážu napojiť učivo na svoju sémantickú sieť. Myslenie študenta, ktorý prichádza na univerzitu, je v prevažnej väčšine prípadov na úrovni projektívnej či koordinatívnej formy, teda v zásade realistické. Naproti tomu univerzitný kurz začína učivom, založenom na konštitutívnej forme jazyka. Aj keď sa študent bude systematicky učiť, to, čo sa naučí, vytvorí iba izolovaný ostrov v jeho mysli, ostrov ktorý v dôsledku nedostatočného prepojenia na zvyšok sémantickej siete rýchlo zabúda.

3 Re-formulácie ako tretí typ zmeny vo vývine matematiky

Zmeny v dejinách matematiky analyzované v predošlých kapitolách sú globálneho charakteru. Týkajú sa prebudovania syntaktickej či sémantickej štruktúry rozsiahlych oblastí jazyka matematiky, a preto k nim dochádza len zriedkavo. Spravidla nie sú dielom jedného človeka, ale výsledkom úsilia celého radu významných matematikov. Výsledný jazyk, ktorý vďaka nim vznikne, je kompromisom zjednocujúcim inovácie, pochádzajúce od rôznych autorov. Zmeny, ktorých analýza je predmetom tejto kapitoly, sú lokálneho charakteru. Týkajú sa spravidla jedinej definície, vety, dôkazu či axiómy. Dochádza k nim často a tvoria náplň každodennej práce matematikov. Spočívajú v preformulovaní problému, definície, tvrdenia či axiómy, a nazývam ich preto ***re-formulácie***. Pomlčka v názve naznačuje, že sa nejedná o akúkoľvek reformuláciu, ale iba takú, ktorá prinesie podstatnú zmenu z hľadiska epistemológie. Určitý problém, definíciu, tvrdenie či axiómu možno v jazyku sformulovať rôznym spôsobom. V určitom kontexte môžu byť tieto formulácie ekvivalentné a môžu sa javiť ako synonymá. Prechod od jednej formulácie k inej budem považovať za re-formuláciu len vtedy, keď bude existovať matematicky relevantný kontext, z hľadiska ktorého príslušné formulácie vstupujú do zásadne iného súboru súvislostí, vrhajú iné svetlo na svoje okolie, orientujú myslenie iným smerom.

Príkladom, na ktorom sa pokúsim objasniť pojem re-formulácie, je piaty Euklidov postulát. Euklides ho sformuloval okolo roku 300 pnl. v tvare: *„Ak na dve priamky priamka padla tak, že vnútorné uhly po jednej strane dvoch pravých menšie tvorí, tak predĺžené tie dve priamky neobmedzene, schádzajú sa na tej strane, kde sú uhly menšie dvoch pravých.“* (Hejný 1986, s. 70). Alternatívna formulácia piateho postulátu pochádza od Johna Playfaira z roku 1795: *„Ak je daná priamka l a bod P, ktorý na nej neleží, tak cez bod P môžeme viesť iba jedinú priamku, ktorá nepretne l.*“ (Gray 1979, s. 87). O Playfairovej formulácii poznamenáva Jeremy Gray: *„Jej hlavná príťažlivosť spočíva v tom, že ju možno ľahko preformulovať do tvaru, ktorý naznačuje neeuklidovské geometrie tým, že poprieme buď existenciu alebo jednoznačnosť rovnobežky.*“ (Gray 1979, s. 34). V kontexte euklidovskej geometrie sú obe formulácie ekvivalentné, existuje však kontext, v tomto prípade je to kontext neeuklidovských geometrií, v ktorom Playfairova formulácia piateho postulátu vrhá jasnejšie svetlo na možné alternatívy voči euklidovskej geometrii. Preto navrhujem Plaifairovu formuláciu považovať za *re-formuláciu* pôvodnej formulácie.

Ďalšia možnosť ako sformulovať piaty postulát je tvrdenie: „*Nad ľubovoľnou stranou možno skonštruovať štvorec*“. Táto formulácia je v zhode s duchom Euklidových postulátov (má analogickú dikciu ako tretí postulát, zaručujúci, že z ľubovoľného stredu možno ľubovoľným polomerom opísať kružnicu) a je tiež stručnejšia. Musíme však byť Euklidovi vďační, že zvolil svoju komplikovanú formuláciu, a nie toto, na prvý pohľad úplne samozrejmé tvrdenie. V kontexte euklidovskej geometrie sú všetky tri formulácie ekvivalentné; každá postačuje na zaručenie euklidovskosti roviny. Napriek ich logickej ekvivalentnosti je však medzi nimi zásadný rozdiel. Keby Euklides zvolil ako piaty postulát posledne uvedené tvrdenie, asi by nikoho nenapadlo ho spochybňovať a dejiny geometrie by sa uberali inými cestami. Bola to práve ťažkopádnosť Euklidovej formulácie, ktorá priviedla Prokla z Konstantinopolu k presvedčeniu, že toto tvrdenie nie je postulát (t.j. niečo jednoduché a evidentné), ale ide o teorému, ktorú možno dokázať. Úsilie generácií matematikov nájsť dôkaz piateho postulátu sa stáva nezrozumiteľným, keď si postulát predstavíme v jeho Playfairovej formulácii, a absurditou, ak ho sformulujeme v posledne uvedenom tvare.

V prípade Playfaira budeme teda hovoriť o re-formulácii piateho postulátu. Pritom je dôležité si uvedomiť, že v 18. storočí, kedy túto re-formuláciu urobil, kontext neeuklidovských geometrií ešte neexistoval, takže o plodnosti svojej re-formulácie sa Playfair nemohol presvedčiť. Až vďaka objavu neeuklidovských geometrií sa ukázalo, že od Playfairovej formulácie vedie priama cesta do neeuklidovských svetov. Preto podobne ako v prípade re-prezentácií a objektácií, aj v prípade re-formulácií máme na mysli objektívnu zmenu v jazyku matematiky, nezávisle od toho, či si význam tejto zmeny jej tvorcovia uvedomovali alebo nie. Ako ukazuje príklad piateho postulátu, uhladené a elegantné formulácie nie sú z heuristického hľadiska najvhodnejšie. Niekedy práve ťažkopádnosť a nemotornosť formulácie určitého tvrdenia prezrádza skryté možnosti pre ďalšie skúmanie. Náš príklad ukazuje tiež, že aj keď re-formulácie predstavujú zmeny malého rozsahu a často sa týkajú jediného tvrdenia, ich dôsledky pre vývin matematiky môžu byť ďalekosiahle.

S re-formuláciami sa najčastejšie stretávame v podobe viacnásobných nezávislých objavov v matematike. Ako príklad možno vziať objav diferenciálneho a integrálneho počtu Isaacom Newtonom a Gottfriedom Wilhelmom Leibnizom, objav komplexnej roviny Casparom Wesselom, Jeanom Robertom Argandom, Johnom Warrenom a Carlom Friedrichom Gaussom alebo objav neeuklidovskej geometrie C. F. Gaussom, Jánosom Bolyaim a Nikolajom Ivanovičom Lobačevským. Každý z objaviteľov novej teórie ju sformuluje svojím vlastným spôsobom, pričom každá z týchto formulácií má prednosti v niektorej z oblastí použitia teórie a je naopak poznačená ťažkopádnosťou v iných. Preto to, čo sa nakoniec ujme ako štandardná formulácia a dostane sa do učebníc, spravidla nie je ani jedna z formulácií tvorcov teórie, ale *re-formulácia*, ktorá v sebe spája prednosti každej z nich pričom sa snaží vyvarovať sa ich nedostatkom.

Vidíme, že aj keď re-formulácie predstavujú zmeny menšieho rádu než re-prezentácie či objektácie, poskytujú bohatý materiál pre epistemologické skúmania. Analýza re-formulácií, ktorými teória prechádza na ceste od objavu k štandardizácii, ako aj porovnávanie alternatívnych formulácií, v ktorých sa zrodila, je nepochybne dôležité. Na rozdiel od predošlých dvoch kapitol, v prípade re-formulácií sa nepodarilo objaviť žiadnu regularitu. Preto nebudeme uvádzať žiaden „historický opis re-formulácií", a nebudeme sa usilovať ani o ich filozofickú či didaktickú reflexiu. Uvedieme len niekoľko typických príkladov. Vzhľadom k tomu, že re-formulácie hrajú významnú úlohu pri riešení problémov, dokazovaní viet a budovaní teórií, v knihách o riešení matematických problémov alebo v učebniciach matematiky možno nájsť veľké množstvo re-formulácií. Kvôli prehľadnosti sme príklady re-formulácií rozdelili do troch skupín: re-formulácie pri riešení problémov, re-formulácie pri tvorbe pojmov a re-formulácie pri budovaní teórií

3.1 Re-formulácie a **problem solving**

Re-formulácie hrajú dôležitú úlohu pri riešení matematických problémov. Táto oblasť má svoju bohatú literatúru, pričom za klasické sa považujú knihy Georga Polyu. Z jeho *How to solve it*, ktorá vyšla roku 1945, sa predalo vyše milióna výtlačkov. Ako jednu z heuristík Polya uvádza práve re-formuláciu: „*Ak neviete vyriešiť predložený problém, pokúste sa najprv vyriešiť nejaký príbuzný problém.*" (Polya 1945, s. 23). Aj ďalšie jeho knihy, ako *Mathematics and the Plausible Reasoning*

(Polya 1954) a *Mathematical discovery* (Polya 1962) obsahujú množstvo príkladov toho, ako môže re-formulácia pomôcť pri riešení problému. Ako ilustráciu heuristickej sily re-formulácie uvedieme problém určenia súčtu prevrátených hodnôt druhých mocnín prirodzených čísel

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+\ldots$$

Táto úloha upútala pozornosť Leonarda Eulera, ktorý napred vypočítal súčet tohto radu na šesť desatinných miest a dostal hodnotu 1,644934. V tomto čísle sa mu však nepodarilo odhaliť žiadnu pravidelnosť a nepripomínala mu ani žiadne známe číslo. Po dlhšom hľadaní sa Eulerovi podarilo nájsť presnú hodnotu tohto súčtu vďaka pozoruhodnej re-formulácii, ktorú stručne opíšeme.

Je známe, že ak má polynóm $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ presne *n* rôznych reálnych koreňov $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, z ktorých žiaden nie je rovný 0, tak ho možno vyjadriť ako

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = a_0.\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right).\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right).$$

Toto síce nie je úplne bežný spôsob zápisu polynómu, ale nie je to nič zložité. Polynóm sme napísali ako súčin „koreňových činiteľov“ teda ako súčin výrazov tvaru $\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)$, pričom sme zobrali po jednom výraze za každý koreň. To, že oba zápisy sú ekvivalentné vidno z toho, že na oboch stranách rovnosti stojí polynóm *n*-tého stupňa, ktorý má korene $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a jeho absolútny člen je a_0. Týmito podmienkami je polynóm jednoznačne určený. Nie je ťažké ani overiť, že

$$a_1 = -a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Stačí porovnať koeficienty pri prvej mocnine *x* v oboch vyjadreniach. Keďže ide o vyjadrenia toho istého polynómu, tieto koeficienty musia byť rovné.

Uvažujme teraz o niečo komplikovanejší polynóm $b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \ldots + (-1)^n b_nx^{2n}$, ktorý sa od predošlého líši v tom, že má iba párne mocniny neznámej. Predpokladajme, že poznáme korene tohto polynómu. Predpokladajme, že uvedený polynóm má 2*n* navzájom rôznych koreňov, a označme ich $\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \ldots, \beta_n, -\beta_n$. S každým koreňom β v tomto zozname vystupuje aj opačný koreň $-\beta$, pretože v polynóme vystupujú iba párne mocniny neznámej, a umocnené na druhú dávajú β aj $-\beta$ tú istú hodnotu. Preto ak je nejaké β koreňom, je ním aj −β. Analogicky s predošlým prípadom platí

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - ...+ (-1)^n b_n x^{2n} = b_0 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right) ... \left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right) \quad (19)$$

Roznásobením možno z rovnice (19) dostať úplne analogicky ako v predošlom prípade, že

$$b_1 = b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + ... + \frac{1}{\beta_n^2}\right).$$

Toto všetko je pomerne elementárne a nie moc zaujímavé. Ale teraz príde ten rozhodujúci krok. Uvažujme nekonečný rad pre funkciu sínus, ktorý bol Eulerovi dobre známy

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - + ...$$

Eulerova rozhodujúca idea bola pozrieť sa na tento rad ako na „polynóm“ nekonečného stupňa. Čísla 0, π, –π, 2π, –2π, 3π, –3π, ..., v ktorých funkcia sin(x) nadobúda nulovú hodnotu, sa tak stávajú *koreňmi* tohto „polynómu“. Aby sa zbavil čísla 0 v zozname koreňov (a mohol použiť vzťah (19) pre zápis „polynómu“ v tvare súčinu koreňových činiteľov), Euler vydelil rad pre sínus premennou x. Dostal tak ďalší „polynóm“ nekonečného stupňa

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \frac{x^8}{362880} - + ...$$

ktorý má už iba nenulové korene π, –π, 2π, –2π, 3π, –3π, ... Preto v analógii s (19) Euler píše:

$$1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \frac{x^8}{362880} - + ... =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right) ... \quad (20)$$

odkiaľ pre b_1 (koeficient pri $-x^2$ ako na ľavej tak aj na pravej strane vzťahu (20)) dostal rovnosť

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \frac{1}{25\pi^2} + ...$$

a prenásobením rovnice číslom π^2 dostal nakoniec prekvapujúci výsledok

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + ...$$

Tento výsledok je fascinujúci, lebo ukazuje, že aj keby neexistovala geometria a poznali by sme iba prirodzené čísla, mohli by sme dospieť k číslu π. To, že číslo π zvykneme zaraďovať do geometrie (ako obsah jednotkového kruhu) je historická náhoda. Geometria bola zhodou okolností tou oblasťou, kde sme sa s číslom π po prvý raz stretli. Eulerov objav však ukazuje, že číslo π patrí rovnakým právom aj do aritmetiky. V liste z 13. 3. 1736 uvádza Euler vzťah

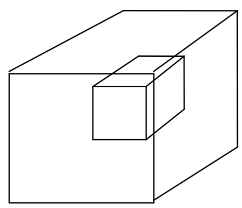
$$\frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449340668482264364$$

Keď si uvedomíme, že v Eulerovej dobe neexistovali kalkulačky, a všetky výpočty urobil ručne, je toto číslo dokladom Eulerovej trpezlivosti. Sú v ňom skondenzované hodiny výpočtov. Tento vzťah predstavujú záver fascinujúceho objavu, na začiatku ktorého stála ***re-formulácia***, Eulerov nápad pozrieť sa na nekonečný rad funkcie sínus ako na polynóm a tento polynóm zapísať ako súčin koreňových činiteľov. Samozrejme, nie všetky re-formulácie vedú k takto spektakulárnym výsledkom, ale Eulerov príklad dáva tušiť význam re-formulácií pri riešení matematických problémov. Podobných fascinujúcich príkladov by sme mohli uviesť stovky, rozumnejšie však bude odkázať čitateľa na rozsiahlu literatúru o riešení problémov, z ktorej vedľa už citovaných kníh Georga Polyu uvedieme *Triumph der Mathematik* (Dörrie 1958) a *Proofs from THE BOOK* (Aigner, Ziegler a Hofman 2003).

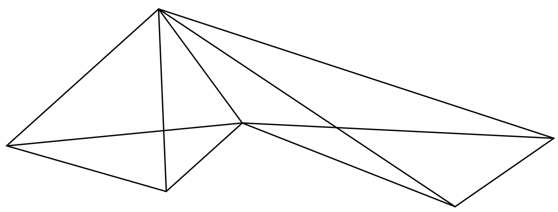
3.2 Re-formulácie a tvorba pojmov

Ďalšia oblasť súvisiaca s re-formuláciami sa týka upresňovania matematických pojmov a hľadania ich vhodných definícií. Táto činnosť nastupuje spravidla po vyriešení určitého problému či série problémov, keď sa matematici snažia zovšeobecniť výsledky, ku ktorým dospeli. Klasickou literatúrou v tejto oblasti je kniha *Proofs and Refutations* Imre Lakatosa. Kniha prináša rekonštrukciu procesu, ktorý sa začína dôkazom Eulerovej vety o mnohostenoch a postupne prerastá v hľadanie definície pojmu mnohostena. Lakatosovi sa podarilo vystihnúť dôležitý aspekt matematickej tvorby, keď opísal techniky, pomocou ktorých matematici čelia protipríkladom. Okrem zaujímavého obsahu bol úspech *Proofs and Refutations* podmienený aj pozoruhodnou formou. Lakatos napísal svoju knihu vo forme dialógu medzi žiakmi v triede. Ale nie je to obyčajná trieda. Lakatos v nej zhromaždil matematikov minulosti, ktorí prispeli k teórii mnohostenov od Cauchyho a Hessela až po Abela a Poincarého. Je vzrušujúce predstaviť si, čo by sa stalo, keby účastníci debaty, ktorá sa tiahla po dobu dvoch storočí, sa mohli stretnúť a spolu diskutovať. Ako by asi Cauchy reagoval na protipríklady k svojmu dôkazu Eulerovej vety, ktoré sa vynorili po jeho smrti? Prijal by Poincarého topologický dôkaz, alebo by zotrval pri geometrickom? Už aj samotná myšlienka takéhoto dialógu je vzrušujúca. Lakatosovi sa však podarilo podstatne viac. Podarilo sa mu z historického materiálu vyextrahovať základné stratégie či spôsoby myslenia, ktoré možno nájsť aj v iných oblastiach matematiky. Sú to slávne „*monster barring, exception barring* a *lemma incorporation*". Stručne si ich opíšeme.

Eulerova veta tvrdí, že pre všetky mnohosteny počet vrcholov V, počet hrán E a počet stien F spĺňa vzťah: $V - E + F = 2$. Po tom, ako učiteľ predviedol jej klasický dôkaz, pochádzajúci od Cauchyho, začali sa vynárať protipríklady. Neuvedieme všetky protipríklady, diskutované v knihe, ale vyberieme iba niektoré, aby vynikla základná idea.



Príklad 1: Predstavme si kocku, ktorá má vo svojom vnútri dutinu v tvare menšej kocky. Nie je ťažké nahliadnuť, že pre toto duté teleso je $V - E + F = 4$ a nie 2, ako by malo byť podľa vety.



Príklad 2: Dva štvorsteny so spoločnou hranou. V tomto prípade je $V - E + F = 3$.

Tieto príklady predstavujú princípy ako možno vytvárať podivné objekty. Nie je ťažké predstaviť si mnohosten s niekoľkými dutinami, a z viacerých dutých mnohostenov vytvoriť reťazec telies pospájaných pomocou spoločných hrán, vrcholov či stien. Otázka samozrejme znie, čo nám tieto objekty hovoria o dokázanej vete. Na zodpovedanie tejto otázky sa vynorili viaceré stratégie.

Prvú stratégiu Lakatos nazval ***monster-barring***: Takéto divné objekty určite nie sú tým, na čo myslíme, keď hovoríme o mnohostenoch. Sú to monštrá, ktoré nie sú zaujímavé a nemali by sme dovoliť, aby nám rozbili našu peknú teóriu. Žiaden normálny človek by nič podobné za mnohosten nepovažoval. Druhú stratégiu Lakatos nazval ***exception-barring***: Uznávame, že tieto objekty sú skutočné mnohosteny, a teda predstavujú protipríklady pre Eulerovu vetu. Veta, tak ako sme ju sformulovali neplatí. Nie je tak všeobecná, ako sme si mysleli. Musíme obmedziť rozsah vety určitou podmienkou tak, aby všetky výnimky padli mimo takto zúženého rozsahu. Nie je ťažké nahliadnuť, že všetky uvedené protipríklady predstavujú nekonvexné telesá (obsahujú body, ktorých spojnice neležia celé v ich vnútri). Preto keď sa obmedzíme na konvexné mnohosteny, veta je zachránená. Tretiu stratégiu Lakatos nazval ***lemma-incorporation***: Vo vyššie opísaných stratégiách sme sa z našich protipríkladov nenaučili nič nového. V prípade *monster-barring* sme ich jednoducho ignorovali, a vetu sme naďalej tvrdili vo väčšej všeobecnosti, než aká jej prislúcha. Naopak, v prípade *exception-barring* sme vetu príliš obmedzili. Eulerova veta platí aj pre celý rad nekonvexných mnohostenov, ako sa možno ľahko presvedčiť. Preto by sme sa nemali snažiť zachrániť platnosť pôvodnej vety tým, že ju obmedzíme na konvexné mnohosteny. Mali by sme sa radšej pokúsiť nájsť všeobecnejšiu vetu, ktorá by zahŕňala aj objekty vytvorené v príkladoch 1 a 2. Iba takto sa naučíme niečo nové.

Teun Koetsier v knihe *Lakatos' Philosophy of Mathematics, A Historical Approach* kritizuje Lakatosa slovami: „*Existuje určitá podobnosť medzi Lakatosovou rekonštrukciou histórie Eulerovej vety o mnohostenoch a reálnou históriou... Avšak racionálna rekonštrukcia sa značne odchyľuje od chronologického poriadku, v akom sa veci skutočne odohrali... Čo sa týka chronologického poriadku, niet mnoho spoločného medzi dialógom a skutočnou históriou. Niet pochybností o tom, že Proofs and Refutations obsahujú značne kontrafaktuálnu racionálnu rekonštrukciu.*“ (Koetsier 1991, s. 42). Napriek tomu knihu hodnotí pozitívne: „*Proofs and Refutations je presvedčivá, lebo ukazuje spoznateľné matematické správanie.*“ (Koetsier 1991, s. 44). O niečo kritickejšie vyznieva hodnotenie Davida Corfielda, ktorý ukázal, že protipríklady nehrajú v rozvoji matematiky tak významnú úlohu, akú im prisudzuje pri svojej racionálnej rekonštrukcii Lakatos. Ako príklad uvádza Poincarého *Analysis situs*, ktorého dôkazy boli značne pozmenené, avšak v celých 300 stranách textu sa objavil iba jediný protipríklad (Corfield 1997, s. 108). To ukazuje, že re-formulácie Poincarého dôkazov neboli výsledkom objavu protipríkladov. Preto sa zdá, že aj keď Lakatos objavil stratégie matematického myslenia, používané pri re-formulácii tvrdení, v procese re-formulácie existujú aj ďalšie stratégie, ktoré Lakatos neuvažoval. K nadmernému zvýrazneniu úlohy protipríkladov Lakatosa priviedol jeho zámer aplikovať Popperovu filozofiu z *Conjectures and Refutations* aj na matematiku. Je preto prirodzené, že sa Lakatos položil dôraz na protipríklady. Napriek tomu nemožno poprieť, že sa mu podarilo objaviť niečo skutočne nového a zaujímavého, menovite stratégie re-formulácie, ktoré matematici používajú pri tvorbe pojmov (v tomto prípade v procese tvorby pojmu mnohostena). Z hľadiska epistemológie nie je dôležité kritizovať Lakatosa za to, že jeho rekonštrukcie sú historicky nepresné. Zaujímavejšie je vziať jeho analýzy za východisko a pokúsiť sa nájsť ďalšie stratégie re-formulácií a tým získať úplnejšie porozumenie pre tento aspekt matematickej tvorby.

Jednu stratégiu, ktorú Lakatos prehliadol, možno nájsť u Koetsiera. Vo svojej knihe Koetsier analyzuje dôkaz vety o zameniteľnosti parciálnych derivácií, pochádzajúci od H. A. Schwarza. Schwarz najprv dokázal túto vetu so šiestimi predpokladmi a potom sa snažil vynechať predpoklady, ktoré neboli pri dôkaze nevyhnutné. Podarilo sa mu vynechať tri zo šiestich podmienok a tak skončil s podstatne všeobecnejšou vetou, než ako bola tá, ktorú pôvodne dokázal (Koetsier 1991, s. 268-271). Domnievam sa, že tu máme do činenia s ďalšou stratégiou, paralelnou k trom, ktoré opísal Lakatos. Navrhujem nazvať ju ***lemma-exclusion***. Keď takto doplníme Lakatosove metódy, dostávame schému:

HYPOTÉZA

DOKAZ

PROTIPRÍKLAD

MONSTER-BARRING | EXCEPTION-BARRING

LEMMA-INCORPORATION | LEMMA-EXCLUSION

NUTNÉ A POSTAČUJÚCE PODMIENKY

Podľa tejto schémy existujú dve reakcie na vynorenie sa protipríkladu. Jedna možnosť je ignorovať protipríklad ako monštrum, druhá je uznať protipríklad a zúžiť platnosť vety. Tieto prístupy však nie sú uspokojujúce. Metóda *monster-barring* tvrdí vetu vo väčšej všeobecnosti, než ako tá platí.

Naopak metóda *exception-barring* príliš obmedzuje tvrdenie (Beta na s. 28 v *Proofs and Refutations* obmedzuje Eulerovu vetu na konvexné mnohosteny, kým H. A. Schwarz obmedzil svoju vetu na funkcie spĺňajúce všetkých šesť podmienok). Po určitom čase matematici rozpoznajú neadekvátnosť týchto prístupov. Takto na metódu *monster-barring* nadväzuje metóda *lemma-incorporation,* pri ktorej sa stále snažíme získať čo najvšeobecnejšie tvrdenie, avšak protipríklady už neignorujeme. Rovnako na *exception-barring* nadväzuje stratégia *lemma-exclusion*, pri ktorej sa usilujeme zotrvať na bezpečnej pôde, ale snažíme sa príliš obmedzujúce podmienky tvrdenia postupne oslabovať. V ideálnom prípade sa tieto dve metódy stretnú keď nájdeme nutné a postačujúce podmienky tvrdenia.

Vidíme, že otázka re-formulácií sa neobmedzuje iba na riešenie konkrétnych matematických problémov. Aj potom, keď je určitý problém vyriešený a veta je dokázaná, môžeme sa snažiť vetu preformulovať. V takomto procese postupného preformulovávania tvrdení a dôkazov sa zrodil celý rad matematických pojmov. Mnohé definície, s ktorými sa stretávame v učebniciach matematiky, sú výsledkom jednej alebo viacerých re-formulácií, ktoré boli vynútené vynorením sa protipríkladov alebo snahou dať určitému tvrdeniu podľa možnosti čo najširšiu platnosť.

3.3 Re-formulácie a budovanie teórií

Vedľa riešenia problémov a tvorby pojmov, treťou oblasťou, v ktorej sa často stretávame s re-formuláciami je oblasť axiomatizácie matematických teórií. Keď sa podarilo vyriešiť dostatočné množstvo problémov a z analýzy použitých metód sa zrodil celý rad dôležitých pojmov, vynára sa potreba zjednotiť príslušnú oblasť a dať jej podobu ucelenej teórie. Príslušné zjednotenie sa často uskutočňuje pomocou axiomatizácie. Stačí spomenúť na Fregeho axiomatizáciu predikátového počtu, Zermelovu axiomatizáciu teórie množín či Kolmogorovovu axiomatizáciu teórie pravdepodobnosti. Fregeho príklad, kedy hneď prvá axiomatizácia bola prakticky definitívna, je pomerne vzácny. Častejšie sú príklady, kedy sa matematici k definitívnej axiomatizácii dopracujú postupne, pomocou série re-formulácií. Stáva sa tiež, že sa pre danú teóriu navrhne niekoľko alternatívnych axiomatizácií (napríklad Zermelov a von Neumannov systém pre teóriu množín) alebo že prijatie určitej axiómy narazí na odpor a je navrhnutý rad alternatív (ako sa to stalo v súvislosti s axiómou výberu). Úloha re-formulácií je pri tvorbe axiomatického systému určitej matematickej disciplíny fundamentálna. Sú to práve jemné rozdiely medzi alternatívnymi formuláciami axióm, ktoré majú rozhodujúci význam. Aby sme zvýraznili význam re-formulácií pre axiomatickú metódu, zvolili sme ako ilustráciu, ktorou sme uviedli celú kapitolu o re-formuláciách práve otázkou alternatívnych formulácií piateho Euklidovho postulátu. Podobne ako v predošlých dvoch prípadoch, aj pri diskusii úlohy re-formulácií pri budovaní matematických teórií sa obmedzíme na jediný príklad. Vybrali sme Zermelovu axiomatizáciu teórie množín. V práci *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*[49] z roku 1908 uvádza Ernst Zermelo nasledovných sedem axióm:

> ***Axióma I***. (*Axióma extenzionality*) Ak každý prvok množiny M je tiež pervkom N a naopak, ak teda, M $\subseteq$ N aj N $\subseteq$ M, potom M = N; alebo stručnejšie: Každá množina je určená svojimi prvkami.
>
> ***Axióma II***. (*Axióma elementárnych množín*) Existuje (fiktívna) množina, *nulová množina* 0, ktorá neobsahuje žiaden prvok. Ak a je nejaký objekt daného oboru, tak existuje množina $\{a\}$ obsahujúca a a iba a ako prvok; ak a a b sú ľubovoľné dva objekty oboru, vždy existuje množina $\{a, b\}$ obsahujúca ako prvky a a b ale žiaden iný objekt x rôzny od nich oboch.
>
> ***Axióma III***. (*Axióma separácie*) Vždy keď je propozicionálne funkcia $E(x)$ definitná pre všetky prvky množiny M, tak M obsahuje podmnožinu M_E obsahujúcu ako svoje prvky tie prvky x množiny M pre ktoré je $E(x)$ pravdivé.
>
> ***Axióma IV***. (*Axióma potencie*) Ku každej množine T prislúcha iná množina UT, *potenčná množina* množiny T, ktorá obsahuje ako prvky práve všetky podmnožiny množiny T.
>
> ***Axióma V***. (*Axióma zjednotenia*) Ku každej množine T prislúcha množina ST, zjednotenie množiny T, ktorá obsahuje ako svoje prvky práve všetky prvky prvkov množiny T.
>
> ***Axióma VI***. (*Axióma výberu*) Ak T je množina, ktorej prvkami sú všetko množiny rôzne od 0 a navzájom dizjunktné, jej zjednotenie ST obsahuje aspoň jednu podmnožinu S_1 ktorá má s každým prvkom T spoločný jeden a len jeden prvok.
>
> ***Axióma VII***. (*Axióma nekonečna*) V obore existuje aspoň jedna množina Z ktorá obsahuje nulovú množinu ako svoj prvok a je tak konštituovaná, že ku každému svojmu prvku a prislúcha ďalší prvok tvaru $\{a\}$, inými slovami, že s každým svojím prvkom a obsahuje aj zodpovedajúcu množinu $\{a\}$ ako svoj prvok.

Vidíme, že axióma výberu je obsiahnutá už v pôvodnej Zermelovej axiomatizácii. Zaujímavú re-formuláciu axiómy III. predložil Abraham Fraenkel v práci *Der Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlsaxioms* z roku 1922. Zermelovej formulácii vyčíta použitie nepresného pojmu „definit". Aby ho nahradil, Fraenkel zavádza pojem *funkcie*, ktorú charakterizuje ako pravidlo nasledovného typu: „objekt $\varphi(x)$ bude vytvorený z objektu x („premennej“), ktorý môže prebiehať prvkami množiny, a možno ešte z ďalších objektov („konštánt“), pomocou predpísaného použitia (opakovaného, samozrejme, iba konečne mnoho krát, a označeného ako φ) Axióm II-VI. Napríklad $\varphi(x) = \{\{\{x\}, \{0\}\}, \mathrm{U}x + \{\{0\}\}\}$... Axióma separácie nadobudne potom znenie:

> ***Axióma III***. Ak je daná množina, ako aj, v určitom poradí, dve funkcie φ a ψ, tak M obsahuje podmnožinu M_E (alebo podmnožinu $M_{E'}$) obsahujúcu ako svoje prvky všetky prvky x množiny M pre ktoré $\varphi(x)$ je prvkom $\psi(x)$ (alebo pre ktoré $\varphi(x)$ nie je prvkom $\psi(x)$), a žiadne iné.

Ďalšia re-formulácia Zermelovho systému pochádza od Thoralfa Skolema, ktorý v práci *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre* z roku 1922 navrhol k Zermelovým axiómam pridať ďalšiu, ktorú nazývame axióma nahradenia. Formuloval ju slovami:

> ***Axióma VIII***. (*Axióma nahradenia*) Nech U je definitná propozícia ktorá platí pre určité dvojice (a, b) v obore B; predpokladajme ďalej, že pre každé a existuje nanajvýš jedno b také, že U je pravdivé. Potom, ako a prebieha prvkami množiny M_a, b prebieha všetkými prvkami množiny M_b.

Posledná axióma, ktorá sa zvykne uvádzať pri axiomatizácii teórie množín, je axióma fundovanosti. Pochádza od Johna von Neumanna z práce *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre* z roku 1925. Vzhľadom k tomu, že príslušná práca sa týka inej formulácie teórie množín (v ktorej okrem množín existujú aj triedy) ako aj vzhľadom k tomu, že von Neumann svoju prácu neformuluje v jazyku množín ale v jazyku funkcií, je jeho formulácia princípu fundovanosti ťažšie zrozumiteľná. Preto si ju uvedieme v tvare, aký jej dali Fraenkel a Bar-Hillel

> ***Axióma IX*** (Axióma fundovanosti.) Každá neprázdna množina a obsahuje taký prvok b, že a a b nemajú spoločné prvky.

Vidíme, že systéme axióm, ktorý sa dnes štandardne používa pre formuláciu teórie množín sa zrodil v priebehu 17 rokov za prispenia štyroch autorov. Pritom sa menil aj jazyk, v ktorom bola teória množín formulovaná. Kým Zermelo používal prirodzený jazyk, postupne sa stále viac a viac do popredia dostával jazyk formálnej logiky. Ten existoval tiež v celom rade alternatívnych formulácií.

Paralelne s tým, ako sa postupne upresňovala formulácia základných pojmov teórie množín, prebiehala búrlivá diskusia ohľadom axiómy výberu. Boli predložené viaceré alternatívy k tejto axióme, a dokonca sa zrodila aj alternatívna formulácia k celej cantorovskej teórii množín v podobe Alternatívnej teórie množín (Vopěnka 1979). Z rozsahových dôvodov sa nemôžeme púšťať do výkladu tejto fascinujúcej oblasti základov teórie množín, a podobne ako v kapitole 3.1, čitateľa odkážeme na odbornú literatúru ako Dauben 1979, Moore 1982, Fereirós 1999, či Vopěnka 2004.

4 Matematika a zmena

Dostali sme sa na záver výkladu jednotlivých typov zmien v dejinách matematiky. V záverečnej kapitole sa pokúsime zaujať stanovisko k vybratým koncepciám vývinu matematiky. Zameriame sa na koncepcie založené na prácach Thomasa S. Kuhna, Imre Lakatosa a Jeana Piageta, pričom ich budeme posudzovať z pozície, ktorú sme rozpracovali v predošlých častiach našej knihy. Zvláštnosťou tejto pozície je, že kladie dôraz na historicitu jazyka matematiky, teda matematické poznanie sleduje v závislosti od historicky existujúcich výrazových prostriedkov jazyka matematiky. Možno povedať, že je pokusom o kompromis medzi analytickými prístupmi k filozofii matematiky, ktoré kladú dôraz na jazyk a logiku, avšak tieto chápu ahistoricky, a historickou školou, ktorá kladie dôraz na historicitu matematického poznania, avšak túto historicitu skúma sociologickými či psychologickými prostriedkami. Náš prístup je strednou pozíciou medzi týmito krajnosťami v tom, že uznávame, že matematické poznanie je v určitom zásadnom zmysle historické, avšak jeho historicitu chceme uchopiť prostriedkami analytickej filozofie, predovšetkým prostriedkami logiky. Veríme, že rekonštrukcia zmien syntaxe matematického jazyka pri re-prezentáciách ako aj rekonštrukcia zmien sémantiky jazyka matematika pri objektáciách ukázali, čo máme na mysli históriou rekonštruovanou prostriedkami analytickej filozofie. Náš prístup je tak rozvinutím niektorých názorov Jakka Hintikku.

4.1 Otázka revolúcií v matematike (Kuhn)

V polovici 1970-tych rokov sa pod vplyvom prác troch historikov matematiky rozprúdila diskusia o možnosti použiť Kuhnovu teóriu vedeckých revolúcii pri opise vývinu matematiky. Michael Crowe v článku *Desať "zákonov" týkajúcich sa foriem zmeny v dejinách matematiky* vyslovil jednoznačne negatívne stanovisko, podľa ktorého „Revolúcie sa nikdy nevyskytujú v matematike." (Crowe 1975, s. 165). O rok neskôr vyšiel článok Herberta Mehrtensa *Kuhnove teórie a matematika: diskusný príspevok o novej historiografii matematiky* (Mehrtens 1976), v ktorom je k použiteľnosti Kuhnovej teórie v oblasti matematiky zaujatý zmierlivejší postoj. Mehrtens ukazuje, že niektoré pojmy (vedecké spoločenstvo, anomálie, normálna veda) majú explanačnú hodnotu a poskytujú nástroj aj pre historické skúmanie matematiky, zatiaľ čo iné (revolúcia, kríza, nesúmerateľnosť) sú v matematike bez explanačnej hodnoty a zavádzajú diskusiu do neproduktívnych sporov. Kuhnova teória ako celok sa však ani podľa Mehrtensa nedá aplikovať na dejiny matematiky. Roku 1984 vychádza stať Josepha Daubena *Konceptuálne revolúcie a dejiny matematiky: dve štúdie o raste poznania* (Dauben 1984). V nej autor uvádza dva príklady - objav nesúmerateľných veličín a vznik teórie množín - na ktoré je podľa jeho názoru Kuhnova teória v plnej miere použiteľná. Uvedené články boli zahrnuté do knihy *Revolutions in Mathematics*, ktorú roku 1992 vydal Donald Gillies. Okrem spomenutých troch štúdií kniha obsahuje deväť článkov, v ktorých historici matematiky analyzujú významné zlomy v dejinách matematiky a diskutujú otázku, či ich je možné nazvať revolučnými alebo nie. V súvislosti s touto diskusiou sa vynára niekoľko problémov.

a. zmeny akého typu považujeme za revolučné

Ako prvú možno položiť otázku: ***zmeny akého typu sme ochotní považovať za revolučné?*** Na príkladoch v knihe *Revolutions in Mathematics* je zaujímavé, že niektoré z nich predstavujú re-prezentácie (vznik teórie množín (Dauben 1984), vznik analytickej geometrie (Mancosu 1992), vznik diferenciálneho a integrálneho počtu (Grosholz, 1992) a vznik predikátového počtu (Gillies 1992b)), kým iné patria medzi objektácie (legitimizácia kalkulu (Giorello 1992), vznik neeuklidovských geometrií (Zheng 1992), zmena v ontológii (Gray 1992), vznik neštandardnej analýzy (Dauben 1992)). V princípe tak prichádzajú do úvahy tri možné vymedzenia pojmu revolúcia v matematike.

Prvé chápanie (ktoré zastáva Crowe) považuje ako re-prezentácie tak aj objektácie za konzervatívne, teda za zmeny pri ktorých nedochádza k revolučnej premene. Zdá sa, že naše analýzy podporujú toto stanovisko, lebo ukazujú vysokú mieru regularity re-prezentácií aj objektácií. Hovoriť tu o revolučnej premene sa preto nezdá adekvátne.

Druhé možné chápanie pojmu revolúcie v matematike by bolo považovať za revolučné re-prezentácie (lebo menia univerzum objektov matematiky), kým objektácie prehlásiť sa konzervatívne zmeny. Toto stanovisko je blízke Gilliesovi, ktorý v predslove k *Revolutions in Mathematics* navrhol odlíšiť dva druhy zmien (a tak zmieriť Crowa a Daubena). Kým Gillies príslušné zmeny odlíšil sociologicky, naša klasifikácia ponúka epistemologické kritérium.

Ako tretie chápanie pojmu revolúcie v matematike by bolo považovať ako re-prezentácie tak aj objektácie za revolučné. Toto stanovisko síce prináša nadmerné rozšírenie pojmu revolúcie, ale pokiaľ niekto chce určitú objektáciu (napríklad objav neeuklidovských geometrií) prehlásiť za revolučnú, je rozumné predpokladať, že aj ostatné objektácie sú kandidátmi pre toto označenie.

b. odlíšenie revolúcií a epistemických zlomov

Ďalší problém, ktorý sa pri konfrontácii Kuhnovej teórie a našich rekonštrukcií vynára, spočíva v možnosti ponechať pojmu vedeckej revolúcie jej sociologický obsah, a zlomy, o ktorých sme hovorili v tejto knihe označiť termínom ***epistemologická ruptúra***. Toto odlíšenie sa zdá byť oddôvodnené tým, že jednotlivé zlomy sme identifikovali analýzou jazyka matematických teórií a jeho epistemologických aspektov (logická, expresívna a explanatorická sila v prípade re-prezentácií, či povaha pozadia, horizontu a epistemického subjektu v prípade objektácií). Odlíšenie vedeckých revolúcií a epistemických ruptúr umožňuje postúpiť v našich analýzach o krok ďalej.

Kým ku každej vedeckej revolúcii prislúcha určitá epistemická ruptúra, ktorá predstavuje epistemologický aspekt príslušnej zmeny, nie každá ruptúra nutne prerastie vo vedeckú revolúciu. Svedčí o tom vývin syntetickej geometrie. V kapitole 2.1.A sme opísali šesť epistemických ruptúr, ktoré sa odohrali v dejinách syntetickej geometrie. V literatúre sa však ako revolúcia označuje iba jedna z nich: objav neeuklidovskej geometrie. Takto odlíšenie pojmu epistemickej ruptúry a vedeckej revolúcie umožňuje nastoliť otázku: ***Ktoré epistemické ruptúry prerastú vo vedecké revolúcie*?** Je pozoruhodné, že zo šiestich zlomov, ktoré sú z formálneho hľadiska podobné, vedecké spoločenstvo vníma jeden ako revolučnú zmenu, kým zvyšným piatim prisudzuje charakter imanentného vývinu. *Prečo je objav neeuklidovskej geometrie inak vnímaný, než ostatné, s ním ekvivalentné zlomy*?

Skutočnosť, že po formálnej stránke sú uvažované ruptúry rovnaké naznačuje, že to, čo rozhoduje o pripísaní revolučného charakteru určitej ruptúre, nie je jej význam pre samotnú vedu, ale rozhodujú skôr mimovedecké dôvody. O povahe týchto dôvodov si môžeme utvoriť predstavu, keď si pripomenieme, akú úlohu hrala geometria vo filozofii tesne pred objavom neeuklidovskej geometrie, predovšetkým u Kanta. Kant tvrdenia geometrie považoval za príklad syntetických súdov *a priori*. Ako apriórne súdy predstavovali absolútne isté poznanie, ktoré žiadna aposteriórna skúsenosť nemohla spochybniť. Na druhej strane, keďže boli syntetické, predstavovali ozajstné poznanie, v protiklade so súdmi analytickými, ktoré môžu nanajvýš nejaký pojem objasniť, ale naše poznanie neobohatia. Na základe tohto výkladu dostala geometria v Kantovej filozofii úlohu vzoru a ideálu poznania. Načo Kant takýto vzor potreboval? Na kritiku metafyziky! Metafyzika nedisponuje syntetickým *a priori*. Je teda poznaním, ktoré je buď apriórne a analytické, ale potom žiadnym skutočným poznaním nie je, a predstavuje skôr súbor lingvistických explikácií. Alebo je metafyzika síce syntetická, ale aposteriórna, a preto, ako každé poznanie pochádzajúce zo skúsenosti, musí byť aj skúsenosťou preverovaná. Vidíme, že v osvietenskej ideológii hrá geometria omnoho dôležitejšiu úlohu, a nie je len náukou o priestorových formách. Zdá sa, že revolučnosť objavu neeuklidovskej geometrie súvisí práve s tým, že tento osvietenský mýtus rúca.

Ak je tomu naozaj tak, potom otázka, že ktoré epistemické ruptúry prerástli vo vedecké revolúcie, teda otázka, ktoré z množstva rovnakých epistemických zmien pritiahli k sebe pozornosť verejnosti, mohla stať cestou k lepšiemu pochopeniu toho, ako funguje veda v kultúre, aké rozmanité ilúzie spoločnosť s vedou spája a ako sa usiluje tieto ilúzie si udržať. To by vysvetlilo aj odozvu na Kuhnovu knihu, ktorá asi nebola daná záujmom o vedu, ale skôr záujmami rôznych spoločenstiev, ktoré vedu používajú na svoju legitimizáciu. Takto oddelenie epistemologického a sociologického aspektu vývinu vedy, a ich následná konfrontácia, umožňuje odhaliť mnoho zaujímavého.

Oddelenie epistemologického a sociologického aspektu zmien vo vede pripomína oddelenie kontextu objavu a kontextu zdôvodnenia v prvej polovici 20-teho storočia. Domnievame sa však, že keď pozitivisti na začiatku tohto storočia zaviedli oddelenie kontextu objavu a kontextu overenia, tým, že sa nikdy nepokúsili tieto dva kontexty navzájom konfrontovať, ochudobnili sa o to najzaujímavejšie, čo sa z podobného oddelenia dá získať. Až konfrontácia epistemologického a sociologického (resp. logického a psychologického) umožňuje položiť tie skutočne zaujímavé otázky.

c. kritika Kuhnovho prístupu

Hlavná výhrada, ktorú možno vzniesť voči Kuhnovej teórii na základe rekonštrukcií uvedených v tejto knihe je, že pod pojem vedeckej revolúcie zahŕňa zmeny rôzneho druhu.[50] Sú to jednak *re-prezentácie*, ktoré Kuhn analyzuje na príklade kopernikovskej revolúcie a vzniku elektromagnetickej teórie, a potom *objektácie*, ktorých príkladom je oxidačná teória horenia. Preto základné kategórie, ako paradigma, anomália, kríza a revolúcia, ktoré získava analýzou takto heterogénneho materiálu, sú hrubé a nešpecifické. Každá z Kuhnových kategórií v sebe zahŕňa viaceré pojmy. Niečo iné tvorí paradigmu v prípade re-prezentácie a niečo iné v prípade objektácie. Vzhľadom na túto nešpecifickosť Kuhnovej analýzy je celkový obraz, ktorý o revolúciách vo vede predkladá, iba opisom sociálnej adaptácie vedeckého spoločenstva na zmeny. Podobný proces zmien ako opísal Kuhn, možno pravdepodobne nájsť aj u iných spoločenstiev a nie je špecifický pre vedeckú komunitu. Kuhn teda neopísal štruktúru ***vedeckých*** revolúcií, ale iba na príklade vedy ilustroval sociálnu dynamiku procesu adaptácie určitej komunity na zmeny.

K tomu, aby bolo možné presnejšie vymedziť základné kategórie Kuhnovej teórie, ako aj zachytiť špecifické črty, ktoré odlišujú vedecké revolúcie od ostatných procesov sociálnej adaptácie, je potrebné odlíšiť rôzne typy vedeckých revolúcií. Navrhujem odlíšiť ***paradigmu reprezentácie***, ktorá kodifikuje spôsob reprezentácie skutočnosti od ***paradigmy objektivizácie***, ktorá kodifikuje, čo z toho, čo spôsob reprezentácie umožňuje sprítomniť, nadobudne status objektívnej skutočnosti. Je pravdepodobné, že nesúmerateľnosť, o ktorej hovorí Kuhn, má rôznu povahu v prípade reprezentácií a objektivizácii. Je možné, že kým vedci, ktorých oddeľuje re-prezentácia, žijú v rôznych svetoch a nemôžu si rozumieť, tak vedci používajúci rôzne paradigmy objektivizácie si do veľkej miery navzájom rozumejú, a líšia sa len hodnotením faktov, ktoré sú však pre oboch rovnaké. Takto by relativizácia pojmu nesúmerateľnosti umožnila presnejšie uchopiť jav, ktorý Kuhn opisuje výlučne v sociologických pojmoch. Jednotlivé typy vedeckých revolúcií by potom spočívali v zmene paradigmy príslušného typu. Re-prezentácia, chápaná tentoraz nie ako epistemická ruptúra, ale ako s touto ruptúrou zviazaná vedecká revolúcia, by bola zmenou paradigmy reprezentácie a podobne chápaná objektácia by zas bola zmenou paradigmy objektivizácie.

V priebehu re-prezentácie sa však mení aj paradigma objektivizácie, lebo re-prezentácia je tak radikálna zmena, že destabilizuje aj paradigmu objektivizácie. To umožňuje presnejšie opísať priebeh vedeckej revolúcie určitého typu. Revolúcia nie je jednorázový akt, ako ju opisuje Kuhn, ale skôr postupný proces zmien, obsahujúci okrem hlavnej ruptúry, ktorá určuje typ príslušnej revolúcie, aj viaceré ruptúry menšieho rádu. Pri každom type revolúcií majú rôzny charakter aj anomálie a príslušná kríza má inú hĺbku. Analýza všetkých týchto aspektov umožňuje opísať to, čo Giorello nazval jemnou štruktúrou vedeckých revolúcií (Giorello 1992). Jemnú štruktúru určitej re-prezentácie by tvorila postupnosť objektácií, ktorá k nej vedie, rovnako ako jemnú štruktúru určitej objektácie by tvorila postupnosť re-formulácií. Práve hierarchická zviazanosť paradigiem a z nej vyplývajúca jemná štruktúra revolúcií sú fenomény, ktoré asi nebudú mať analógie v iných procesoch sociálnej adaptácie, a preto predstavujú to špecifické, čo je vlastné iba vedeckým revolúciám a čo ich odlišuje napríklad od zmien v oblasti náboženstva. To, že vedecké revolúcie boli často prirovnávané k náboženskej konverzii je spôsobené skutočnosťou, že Kuhn opisoval iba sociologickú stránku vedeckej revolúcie, a zo sociologického hľadiska reaguje vedecké spoločenstvo podobne ako spoločenstvo veriacich. Keď však prinesieme do hry aj jemnú štruktúra vedeckých revolúcií, teda skutočnosť že určitá vedecká revolúcia je tvorená postupnosťou epistemických ruptúr menšieho rádu, umožní to vedeckú revolúciu jednoznačne odlíšiť od náboženskej konverzie.

4.2 Otázka matematických výskumných programov (Lakatos)

Rekonštrukciu vývinu syntetickej geometrie z druhej časti našej knihy môžeme použiť na vysvetlenie jedného zvláštneho aspektu Lakatosovej knihy *Proofs and Refutations* (Lakatos 1976). Vo svojej knihe podáva Lakatos racionálnu rekonštrukciu historického vývinu teórie mnohostenov. Ako materiál, na ktorom tento vývin ilustruje, si zvolil Eulerovu vetu. Odhliadnuc od dodatkov, kniha pozostáva z dvoch častí. V prvej, obsahujúcej geometrické dôkazy Eulerovej vety, Lakatos uvádza analýzu stratégií používaných pri rozpracovávaní matematických teórií, ako sú *monster-barring, exception-barring* či *lemma-incorporation*. Na viacerých príkladoch presvedčivo ilustruje, ako je možné zachrániť vetu pred protipríkladmi tak, že tieto prehlásime za monštrá, alebo za výnimky, ktoré sú z hľadiska praktického použitia vety nepodstatné. Niet pochýb, že tieto stratégie matematici naozaj uplatňujú, a ich filozofická rekonštrukcia predstavuje prínos k porozumeniu matematiky. Druhá časť knihy, obsahujúca Poincarého topologický dôkaz Eulerovej vety, už nie je až tak detailne rozpracovaná. Keby však Lakatos nebol predčasne zomrel, je pravdepodobné, že by rozohral paletu stratégií *monster-barring, exception-barring* a *lemma-incorporation* aj na tomto materiáli. Z rovnakých dôvodov možno prehliadnuť obsahovú chybu na str. 113, spočívajúcu v tvrdení, že heptahedron (t.j. projektívna rovina) ohraničuje. Lakatos tu odporuje vlastnému tvrdeniu zo str. 110, kde tvrdil, že heptahedron je jednostranná plocha, a preto neexistuje žiadne geometrické teleso, ktoré by heptahedron ohraničoval. Ale nie toto je problém, ktorý chceme vyzdvihnúť. Čo je na celej knihe nepochopiteľné je absencia čo i len náznaku prepojenia jej dvoch častí. Lakatos, ktorý neustále zdôrazňoval nutnosť rekonštrukcie súvislostí, v ktorých sa nové pojmy zrodili, zrazu ako by nič, vytiahne na nás celý arzenál kombinatorickej topológie.

a. neprepojenosť dvoch častí Proofs and Refutations

Naša rekonštrukcia vývinu geometrie umožňuje vysvetliť tento aspekt Lakatosovej knihy. Prechod od geometrie ku kombinatorickej topológii je objektácia, ktorá sa neudiala primárne v teórii mnohostenov (ktorej genézu Lakatos sleduje), ale v teórii funkcií komplexnej premennej. Ako Riemann tak aj Poincaré boli ku svojim zásahom do jazyka geometrie vedení problémami komplexnej analýzy. Poincaré už len dodatočne zúročuje konceptuálny pokrok, ktorý v oblasti komplexnej analýzy dosiahol a predvádza silu nového jazyka aj v teórii mnohostenov. Objektácia a ešte k tomu taká, ktorá mala pôvod mimo sledovanej oblasti, je zlom, pri rekonštrukcii ktorého bol Lakatos bezradný. Jeho interpretačné nástroje, ako *monster-barring* či *lemma-incorporation* sa týkajú re-formulácií, a preto tu zlyhávajú. Vznik kombinatorickej topológie je objektácia, pri ktorej sa ***mení celá konceptuálna stavba geometrie a nie len rozsah platnosti nejakej vety***. Takže to, čo sa spočiatku javilo ako opomenutie prepojiť dve časti knihy, vrhá svetlo na hranice použiteľnosti Lakatosovej metódy *proofs and refutations*. Lakatosova metóda rekonštrukcie je použiteľná iba v prípade nemenného konceptuálneho rámca. Preto napriek tomu, že v záverečných kapitolách Lakatos píše o tvorbe pojmov, skutočnosť, že jeden z najdôležitejších konceptuálnych zlomov v dejinách geometrie ani len nespozoroval vrhá pochybnosti na jeho teóriu.

Po tom, čo sme uviedli už neprekvapuje, že Lakatos dezinterpretuje epistemologický základ Poincarého dôkazu Eulerovej vety. Vykladá ho ako „*preklad domnienky do jazyka vektorovej algebry*“ (Lakatos 1976, s. 106). Ale to, že prečo práve do jazyka ***vektorovej algebry*** (odkiaľ sa nabrala?), a prečo do vektorovej algebry ***modulo 2*** (prečo nie modulo 7?) necháva nezodpovedané. Z epistemologickej rekonštrukcie Erlangenského programu už vieme, že tu nepôjde o preklad. Vznik kombinatorickej topológie nie je prekladom, ale čímsi omnoho radikálnejším: konštitúciou existencie geometrických objektov nezávisle od ich danosti v priestore. Okrem toho, rovnako ako Klein v Erlangenskom programe nepriniesol pojem grupy z algebry do geometrie, ale iba spravil explicitnou štruktúru, ktorá odjakživa tvorí fundament pojmu priestoru – menovite grupu kompenzačných transformácií, tak ani Poincaré pri založení kombinatorickej topológie neurobil žiaden preklad, ale opäť iba explicitne sformuloval štruktúru konštitutívnych aktov, ktoré tvoria základ, na ktorom operuje geometria. A to, že ide o štruktúry s aritmetikou modulo 2 ukazuje, že máme do činenia s konštitutívnymi aktmi. Aritmetika modulo 2 zachytáva paritu týchto aktov. Parita znamená, že príslušný reťazec sa uzavrie a dá vzniknúť objektu (kým otvorený reťazec nič nekonštituuje).

b. redukcia vývinu na re-formulácie

Neskôr, keď Lakatos prešiel od metodológie *dôkazov a vyvrátení* k metodológii *vedecko-výskumných programov*, stále zotrváva na úrovni re-formulácií. Na strane 50 svojej *Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes* (Lakatos 1970) predvádza aj pri vykreslení rozvoja Newtonovho výskumného programu rovnaké majstrovstvo, ktoré bolo charakteristické pre prvú polovicu *Proofs and Refutations*,. Ukazuje, ako Newton prešiel od modelu planetárnej sústavy s nehybným bodovým Slnkom a jedinou bodovou planétou cez sústavu planéta-Slnko rotujúcu okolo spoločného hmotného stredu, cez model s viacerými planétami, až po nahradenie bodových objektov sférickými a zahrnutie medziplanetárneho pôsobenia. Ale Lakatos mlčí o prechode od newtonovskej mechaniky k lagrangeovskej a neskôr k hamiltonovskej. A dôvod je rovnaký ako v prípade geometrie. Prechody k lagrangeovskej a hamiltonovskej mechanike sú objektácie, a tie sa vymykajú jeho spôsobu analýzy. Preto, aj keď Lakatos prehlasuje, že jeho cieľom je racionálna rekonštrukcia vývinu vedy, v podstate ignoruje všetky vývinové procesy, pri ktorých sa niečo naozaj zmenilo. Objektácie buď úplne vynecháva, alebo ich môže vyložiť ako vynorenie sa nového výskumného programu (Poincarého programu v teórii mnohostenov, Lagrangeovho programu v mechanike). Ale otázku zásadného epistemologického významu, t.j. ***aký je vzájomný vzťah medzi dvoma po sebe nasledujúcimi programami***, čiže napríklad, aký je vzťah medzi Kleinovým a Poincarého programom v geometrii, či medzi Newtonovým a Lagrangeovým programom v mechanike, túto otázku Lakatos nikdy nepoložil. Jeho pozornosť je sústredená na detailné analýzy re-formulácií, pričom objektácie mu unikajú.

4.3 Otázka štádií kognitívneho rozvoja (Piaget)

Jean Piaget s Rolandom Garciom v knihe *Psychogenesis and the History of Science* (Piaget a Garcia 1989) predložili historickú rekonštrukciu vývinu geometrie, algebry a klasickej mechaniky. V dejinách geometrie vyčlenili tri etapy: euklidovskú geometriu, projektívnu geometriu a Kleinov Erlangenský program. Tieto etapy priradili trom vývinovým fázam geometrického myslenia – intra-figuratívnej, inter-figuratívnej a trans-figuratívnej. Podrobne opísali procesy transformácie poznania, ktoré sprostredkovávajú prechod z jedného štádia vo vývine geometrie na druhé. Ich teória je podopretá empirickým výskumom detského myslenia, ktorý ukazuje, že analogické etapy, ako sa vyskytli v dejinách geometrie, možno nájsť aj vo vývine myslenia detí. Napriek týmto, bezosporu príťažlivým aspektom majú Piagetove a Garciove rekonštrukcie aj problematické miesta.

a. otázka vynechaných štádií

Pri konfrontácii teórie vývinu geometrie s historickým materiálom sa vynárajú viaceré nejasnosti. Jednak autori ***ignorujú niektoré vývinové štádiá*** (napríklad neeuklidovskú geometriu), ktoré z historického hľadiska neboli o nič menej dôležité ako etapy, ktoré uvádzajú (projektívna geometria). Okrem toho ***dejiny geometrie predkladajú ako uzavreté***. Po dosiahnutí trans-figuratívneho štádia sa už nemá čo vyvíjať. Naša rekonštrukcia vývinu syntetickej geometrie umožňuje prekonať obe tieto obmedzenia. V jej rámci dostáva neeuklidovská geometria miesto rovnocenné s ostatnými štádiami a vývin geometrie nie je po vzniku konceptuálnej formy jazyka (zodpovedajúcej Kleinovmu Erlangenskému programu) nijako ukončený. To znamená, že spomenuté nedostatky Piagetovej a Garciovej koncepcie nemajú vecný pôvod. Vývin geometrie, tak ako sa historicky odohral, neoprávňuje vynechať Lobačevského, ani prehlásiť Kleina za vrcholné štádium vo vývine geometrie. Lobačevskij patrí do dejín geometrie rovnako ako Poncelet či Klein. Vynára sa tak otázka, prečo sa Piaget a Garcia dopustili spomenutých nepresností. Odpoveď na túto otázku nie je ťažké nájsť. Ich tri etapy (*intra, inter* a *trans*) pripomínajú Heglovskú dialektickú trojicu (téza, antitéza a syntéza). Preto nepresnosti Piagetovej a Garciovej analýzy dejín geometrie majú svoj pôvod nie v historickom materiáli, ale v konceptuálnej schéme, pomocou ktorej tento materiál analyzujú.

b. vzťah ontogenézy a fylogenézy geometrie

Ďalším rozporuplným bodom Piagetovej a Garciovej analýzy vývinu geometrie je téza, že ***ontogenéza opakuje historický vývin geometrie v obrátenom poradí*** (Piaget a Garcia 1989, s. 113). Podľa tejto tézy si deti najprv osvojujú topologické invarianty a až potom invarianty metrické, kým historicky bola najprv sformulovaná metrická (euklidovská) geometria a až podstatne neskôr bola sformulovaná topológia. Spoľahlivosť tejto tézy je oslabená skutočnosťou, že v rekonštrukcii vývinu geometrie Piaget a Garcia topológiu neuvádzajú. To znamená, že sa pokúšajú o paralelu výsledkov psychologických výskumov s historickým materiálom, ktorý neanalyzovali. Na prvý pohľad sa naozaj detské kresby ***javia*** ako topologické. Ale oni sa tak len javia. Keď si uvedomíme zložitú štruktúru jazyka topológie, tak sa zdá nepravdepodobným, že by detské myslenie začínalo topológiou. Preto sa musíme pýtať na pôvod tohto názoru, na to, ako k nemu Piaget a Garcia dospeli.

Keď si prezrieme stavbu Piagetovej a Garciovej knihy, pravdepodobne nám neunikne jedna zvláštnosť. Autori rekonštruujú vývin určitej disciplíny buď len predtým, ako sa konštituovala ako exaktná veda (v prípade mechaniky opisujú jej prednewtonovské obdobie), alebo svoju analýzu sústreďuje výlučne na obdobie po tomto zlome (kapitoly o vývine algebry či geometrie). Nikde však neopisujú vývin, ktorý by zahŕňal aj tento zlom, t.j. vývin ktorý by obsahoval, tak predparadigmatické, ako aj paradigmatické etapy rozvoja príslušnej disciplíny. Neopisujú teda vývin mechaniky, zahŕňajúci tak prednewtonovské obdobie (Aristoteles, Oresme, Buridan), ako aj ponewtonovský vývin (Euler, Lagrange, Hamilton). Podobne pri opise vývinu geometrie nepredkladajú obraz, ktorý by zahŕňal tak predgrécku geometriu (Egypt, Mezopotámia), ako aj vývin po Euklidovi. Preto je pravdepodobné, že ***protogeometria*** (tak možno nazvať geometrické myslenie detí predtým, ako si osvoja aparát metrickej geometrie) má svoj historickú analógiu skôr v geometrii Egypta či Mezopotámie, prípadne vo výtvarnom prejave prírodných národov, než v topológii. Piaget a Garcia sú nútení vysvetľovať protogeometriu pomocou topológie iba preto, lebo predgrécku etapu vo svojej historickej rekonštrukcii vývinu geometrie jednoducho vynechali. Potom z toho, čo im ostalo, k detskému geometrickému mysleniu je skutočne najbližšie topológia. Ale snažiť sa pochopiť geometrické myslenie detí pomocou topológie mi pripadá rovnaké, ako chcieť interpretovať umenie afrických domorodcov pomocou kubizmu a na základe takejto interpretácie dospieť k téze, že ontogenéza opakuje vývin maliarstva v obrátenom poradí.

Vráťme sa ešte k téze o prevrátenom poradí ontogenézy geometrie. Už sme povedali, že to nie je hlboká analógia, založená na podobnosti epistemickej štruktúry topológie a geometrických prejavov detí. Na druhej strane faktom je, že obrázky detí v mnohom pripomínajú obrázky topológie. Nie v tom zmysle, že keď dieťa nakreslí dom, tak to, čo nakreslilo, by zachovávalo topologické invarianty (počet komponent, otvorenosť, súvislosť), ale porušovalo metrické invarianty (pomery, uhly). Deti zväčša nie sú schopné udržať ani topologické invarianty. Mnohé čiary, ktoré by mali byť súvislé, nakreslia nesúvislé, mnohé oblasti, ktoré by mali byť uzavreté, nakreslia otvorené. Teda deti neustále narúšajú aj topológiu. Analógia nefunguje v detailoch, ale predsa len tu je určitá podobnosť. Základom tejto podobnosti je však skôr skutočnosť, že topologické invarianty sú omnoho robustnejšie než invarianty metrické. Keď z kruhu urobíme elipsu, topologicky aj projektívne sa nič nestalo, kým z metrického hľadiska sme objekt zmenili. Podobne, keď z kruhu spravíme štvorec, topologicky sa nič nestalo, kým projektívne a metricky nastala katastrofa. Preto je prirodzené očakávať zachovávanie topologických, projektívnych a až nakoniec metrických invariantov pri každom procese učenia – od osvojovania si vlastného tela, cez učenie sa chodiť, až po učenie sa kresliť a rysovať. Vždy, keď si treba osvojiť určitú komplexnú koordináciu, tak si dieťa napred osvojí jeho robustnú topologickú štruktúru, potom o niečo jemnejšiu projektívnu štruktúru (držanie smeru) a až na záver jemnú metrickú štruktúru. Preto potácavú chôdzu detí možno tiež označiť za „topologické štádium“ ich motorickej koordinácie. Domnievame sa, že je to rovnako oprávnené, ako nazývať ich kreslenie topologickým. V oboch prípadoch však nazvanie určitého štádia topologickým len málo pomôže problému naozaj porozumieť.

Poznámky

1 – (s. 10) Určitý problém pri chápaní geometrických obrázkov ako jazyka predstavuje otázka zápisu propozícií pomocou obrázkov. Treba si ale uvedomiť, že ani zápis propozícií pomocou symbolov nevznikol ihneď. Ešte ani Viéte na konci 16. storočia nemal symbol pre rovnosť a tak nebol schopný zapísať propozíciu pomocou symbolov. Pomáhal si tým, že fragmenty symbolického jazyka spájal do tvrdení pomocou prvkov prirodzeného jazyka. Preto ani v prípade jazyka geometrie nie je nutné v jednom kroku vyriešiť všetky problémy jeho syntaxe. Zatiaľ sa obmedzíme na tvorbu termov ikonického jazyka. Možno sa neskôr podarí nájsť spôsob ako spojiť viaceré termy ikonického jazyka do propozície podobne, ako pomocou znaku rovnosti vytvárame propozíciu z termov symbolického jazyka.

2 – (s. 10) Z tohto hľadiska možno Paschov objav, že Euklidova geometria neobsahuje postulát, ktorý by zaručil, že dve kružnice opísané z opačných koncov danej úsečky s polomerom rovným dĺžke úsečky sa naozaj pretnú, interpretovať ako objav skutočnosti, že príslušný obrázok nie je korektne utvorený term jazyka syntetickej geometrie. Na obrázku priesečník kružníc jasne vidíme ale keď si uvedomíme, že rovina tvorená iba bodmi s racionálnymi súradnicami je modelom Euklidových postulátov, je zrejmé, že existenciu príslušného bodu nie je možné z Euklidových postulátov dokázať. Tento príklad je ilustráciou výkladu obrázkov ako termov jazyka syntetickej geometrie a chápania Euklidových postulátov ako formačných pravidiel tohto jazyka.

3 – (s. 13) Logické a expresívne medze určitého jazyka sa dajú vyjadriť až prostriedkami neskoršieho jazyka, v rámci ktorého možno vytvoriť situáciu, pri opise ktorej predošlý jazyk zlyháva. Preto pri opise logických a expresívnych medzí si budeme vypomáhať prostriedkami neskorších jazykov.

4 – (s. 16) Je zaujímavé, že v stati *Funktion und Begriff* Frege uvádza ako typické tvrdenie elementárnej aritmetiky vzťah 2 + 3 = 5. V práci *Grundlagen der Arithmetik* Frege kritizuje Kanta a ako príklad na ktorom vidieť, že tvrdenia aritmetiky nemožno odvodiť z nazerania uvádza príklad 135 664 + 37 863 = 173 527 (Frege 1884, s. 17). Tento príklad ukazuje, že jazyk elementárnej aritmetiky sa zakladá na formálnych pravidlách manipulácie so symbolmi.

5 – (s. 27) Je dôležité si uvedomiť, že algebra dokáže explicitne vyjadriť postup vďaka tomu, že má implicitný pojem funkcie (alebo ako píše Frege v citáte uvedenom na strane 11, matematici „*dospeli ku skúmaniu jednotlivých funkcií, avšak ešte bez toho, že by v matematickom zmysle použili toto slovo a že by chápali jeho význam*“). Lebo je to práve odlíšenie funkcie a argumentu, ktoré umožňuje zo vzorca vyčítať poradie, v akom jednotlivé operácie po sebe nasledujú.

6 – (s. 31) Symbol $n!$ označuje súčin čísel od 1 po n ($4! = 1.2.3.4 = 24$, kým $6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$).

7 – (s. 38) Treba však dodať, že s Cardanovým *casus ireducibilis* to nie je takto jednoduché. Polynóm tretieho stupňa, ktorý Cardano skúmal, má tri reálne korene. Máme teda do činenia s jemnejším problémom. Vzorec pre riešenia rovnice tretieho stupňa vyjadruje reálne korene ako kombinácie komplexných veličín. Ale to nič nemení na skutočnosti, že reprezentácia polynómov pomocou kriviek umožňuje porozumieť javom, ktoré pri algebraickom prístupe pôsobia tajuplne.

8 – (s. 39) Tu sa musím čitateľovi ospravedlniť. Neodolal som pokušeniu a ako ilustráciu som zvolil príklad, ktorý je elegantný, ale práve kvôli tomu trocha zastiera pointu. Ide o to, že aj pri konštrukcii pravidelného päťuholníka sme použili trik – jeho nahradenie desaťuholníkom. Keby sme to neurobili, dostali by sme podobnú rovnicu, iba by to trvalo o niečo dlhšie. Podstatné tu však nie je, ako rýchle dostaneme rovnicu. Podstatná je skutočnosť, že následná konštrukcia je už triviálna. Všetku prácu sme presunuli na plecia algebry. Algebra úlohu vyriešila za nás; od rovníc nás priviedla ku koreňom. Nám ostáva už len zostrojiť príslušný koreň, a to je triviálne.

9 – (s. 50) O „*nespojitých*“ funkciách hovoril už Euler, avšak tento termín používal v inom význame. Za nespojitú funkciu považoval napríklad absolútnu hodnotu, teda funkciu $f(x) = |x|$, lebo na intervale $(-\infty, 0)$ je zadaná predpisom $f(x) = -x$, kým na intervale $(0, +\infty)$ predpisom $f(x) = x$. Podľa Eulera je funkcia nespojitá, ak na rôznych častiach svojho definičného oboru je zadaná pomocou rôznych analytických výrazov.

10 – (s. 62) Paschova argumentácia sa zakladá na výdobytkoch iteratívnej geometrie, predovšetkým na Dedekindovej práci *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Dedekind zásadnú odlišnosť medzi oborom všetkých reálnych čísel a oborom všetkých racionálnych čísel z hľadiska ich úplnosti. Pasch si uvedomil, že rovina, z ktorej by sme vynechali všetky body ktorých súradnice nie sú racionálne čísla by ešte stále bola modelom Euklidovej geometrie (dvoma bodmi s racionálnymi súradnicami by prechádzala práve jedna priamka s racionálnymi bodmi, etc.). V tomto modeli sa však uvedené kružnice nepretnú. Preto existencia priesečníka kružníc nevyplýva z Euklidových postulátov, keďže postuláty sú v modeli splnené, ale priesečník kružníc tam neexistuje.

11 – (s. 63) O to väčšou iróniou je, že keď Frege opustil systém *Begriffsschriftu* a prešiel k systému svojich *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege 1893), jeho nový systém sa ukázal byť sporný.

12 – (s. 69) Pri nahliadnutí do *Coursu* zistíme, že Cauchy zachoval termín nekonečne malej veličiny. Nerozumie ním však nekonečne malé číslo, ako jeho predchodcovia, ale premennú veličinu, ktorá konverguje k nule. Základným pojmom Cauchyho pojatia analýzy je teda pojem limity.

13 – (s. 70) V rámci logicistického prístupu k základom matematiky predložil Bertrand Russell riešenie logickým paradoxov v podobe teórie typov v práci *Mathematical logic as based on the theory of types* (Russell 1908).Teória typov sa však v matematike nepresadila.

14 – (s. 72) Skutočnosť, že Cantor sa do oboru transfinitnej aritmetiky dostáva postupným iterovaním určitej operácie je potvrdením skutočnosti, že teória množín nadväzuje na iteratívnu geometriu. Iteratívne procesy, pomocou ktorých matematici 19. storočia vytvárali svoje podivuhodné útvary, mali iba kroky zodpovedajúce prirodzeným číslam a nový geometrický objekt vznikal ako ich limita. Cantor prelomil túto hranicu a iteratívny proces predĺžil aj do transfinitnej oblasti. Keď sa pozrieme, čo mu umožnilo urobiť tento krok, vidíme, že to je operácia prieniku nekonečného systému množín, a jasné pochopenie, že prvok patrí do tohto prieniku, ak patrí ***do každej*** z prenikaných množín. Samozrejme, nechceme tvrdiť, že Cantor čítal Fregeho *Begriffsschrift*, ktorý vyšiel rok pred Cantorovou prácou. Chceme však tvrdiť, že precizácia logického aparátu, ktorá sa udiala v priebehu 19. storočia a ktorá vrcholí vo Fregeho diele, zohrala rozhodujúcu úlohu pri Cantorovom prelome do oblasti transfinitných iteratívnych procesov.

15 (s. 77) V čitateľovi mohlo vyvolať určité pochybnosti, keď som teóriu množín uviedol v pravom stĺpci tabuľky, v ktorom figurujú geometrické teórie. Môže sa zdať vhodnejším umiestniť teóriu množín do stredu, medzi oba stĺpce, lebo teória množín nie je tak jednoznačne spojená s geometrickým názorom, ako zvyšné tri ikonické jazyky. K zaradeniu teórie množín na príslušné miesto ma vedú viaceré dôvody. Jednak, medzi teóriou množín a iteratívnou geometriou existuje analogický vzťah, aký existuje napríklad medzi algebrou a matematickou analýzou. Podobne ako možno nekonečný rad (jeden zo spôsobov zadávania transcendentných funkcií – vedľa integrálov a diferenciálnych rovníc) chápať ako predĺženie polynómu „do nekonečna“, tak Cantor dospel k množinám keď prišiel na to, že iteratívny proces, pomocou ktorého zadáva objekty iteratívna geometria, možno transfinitne predĺžiť. Teda napojenie teórie množín na predchádzajúci ikonický jazyk je typický pre dynamiku reprezentácií a spočíva v použití ***nekonečného počtu operácií predošlého jazyka***. Rovnako obrázok analytickej geometrie, v ktorom vynášame krivku bod po bode obsahuje vlastne nekonečný počet euklidovských konštrukcií (po jednej pre každý bod krivky). Podobne prechod k limite v iteratívnom procese, ktorým iteratívna geometria konštruuje svoje objekty obsahuje nekonečný počet karteziánskych konštrukcií, po jednej za každý krok iterácie. Okrem toho Zermelova idea zadávania množín pomocou axiómy vydelenia v tvare $\{x \in A\ ;\ \varphi(x)\}$, kde $\varphi(x)$ je formula určitého formálneho jazyka (t.j. fragmentu predikátového počtu) je analogické tomu ako Descartes definoval krivku ako množinu bodov, ktorá spĺňa určitú polynomiálnu formu $p(x)$. V oboch prípadoch sa symbolický jazyk (formula $\varphi(x)$, polynóm $p(x)$) používa pri definícií objektov analogickým spôsobom. Teda aj napojenie teórie množín na predchádzajúci symbolický jazyk je štandardné. Navyše myslieť si, že sme schopní vidieť nejaký fraktál a problém nastáva až s množinami je naivné.

16 – (s. 84) Je zaujímavé, že v jazyku neexistuje výraz vyjadrujúci opak beztvarého, výraz označujúci predmety majúce tvar. Jazyk vníma tvar ako niečo, čo konštituuje samotný objekt, ako niečo, čo nemožno útvaru ubrať. Tvar ako keby ani nebol vlastnosťou, ale esenciou, a preto nepotrebujeme slovo pre označenie toho, že objekt má tvar. Úplne stačí, že máme termín pre to, že objekt existuje, lebo existovať a mať tvar, je to isté.

17 – (s. 84) Uvedomujem si, že Euklides žil neskôr než Aristoteles, takže ak medzi nimi bol nejaký vplyv, bol opačným smerom. Euklidove *Základy* sú však vyvrcholením a kodifikáciou určitej tradície. Keď hovorím o Euklidovom „vplyve“ na Aristotela, mám na mysli vplyv tejto tradície (reprezentovanej Eudoxom, Theaitetom a ďalšími matematikmi, ktorých objavy sú obsiahnuté v *Základoch*). Euklida chápem ako matematika, ktorý túto tradíciu završuje a symbolizuje.

18 – (s. 88) Ak je paralela medzi diferenciálnym a integrálnym počtom a chemickou technológiou opodstatnená, otvára nový pohľad na jeden zarážajúci aspekt Newtonovho diela – na Newtonove alchymistické práce. Newtonove alchymistické práce boli spočiatku historikmi ignorované. Považovalo sa za poľutovaniahodnú okolnosť, že jeden z najväčších matematikov všetkých čias, človek s prenikavým racionálnym myslením, venoval mnoho času tak iracionálnej záľube ako alchýmia. Univerzita v Cambridge dokonca odmietla kúpiť Newtonove alchymistické rukopisy od Lorda Portsmoutha s odôvodnením, že nemajú vedeckú cenu, a zachránila ich len veľkorysosť Johna Maynarda Keynesa, ktorý ich kúpil za vlastné prostriedky. Od Keynesa pochádza aj prvý pokus porozumieť tejto časti Newtonovho diela (Keynes 1947). Postupne, ako sa po druhej svetovej vojne rozvíjali Newtonovské štúdiá, historici začali skúmať aj Newtonove alchymistické práce. Tie postupne prestali byť považované za epizódu, o ktorej by bolo lepšie mlčať, a začali sa vnímať ako určitá zvláštnosť, ktorá dokresľuje komplexnosť osobnosti génia. Ak je správny výklad chemickej technológie ako oblasti, ktorej charakter manipulatívnych činností je paralelný s povahou kalkulatívnych operácií v diferenciálnom a integrálnom počte, dostáva sa Newtonova záľuba v alchýmii do nového svetla. Je možné, že medzi chemickou technológiou a oblasťou diferenciálneho a integrálneho počtu existuje podobnosť, ktorá Newtona fascinovala. Analógia medzi odkrytosťou manipulácií v jazyku diferenciálneho a integrálneho počtu a v chemickej technológii robí plauzibilným predpoklad, že Newtonova záľuba v alchýmii nebola výstrednosťou génia, ale prirodzenou snahou, motivovanou epistemologickou príbuznosťou oboch oblastí.

19 – (s. 93) Keďže Wittgenstein vo svojom traktátovskom období bol presvedčený, že existuje jediná forma zobrazenia, nemusel tento pojem ďalej špecifikovať. V texte ktorý nasleduje zastávame stanovisko, podľa ktorého existuje viacero foriem zobrazenia, teda viacero spôsobov, ako môže jazyk zobraziť svet. Pritom zásadné zmeny vo vývine určitej matematickej disciplíny spočívajú práve v prechode od jednej formy zobrazenia k inej. Keďže sme opustili tézu o existencii jedinej formy zobrazenia, sme nútení viazať formu zobrazenia na konkrétny jazyk (a štádium jeho vývinu). Aby sme nespôsobili zmätok, na označenie tejto (*Traktátom* inšpirovanej) formy nebudeme používať termín *forma zobrazenia*, ale radšej zavedieme nový termín ***forma jazyka***.

20 – (s. 94) Možnosť explicitne vyjadriť formu jazyka J_1 v jazyku J_2 otvára možnosť pre vznik postupnosti navzájom prepojených jazykov, v ktorej štádium J_n obsahuje explicitne vyjadrenú formu jazyka predošlého štádia J_{n-1}, a jeho vlastná forma sa stane explicitne vyjadrenou v nasledujúcom štádiu J_{n+1}.

21 – (s. 100) Ubiehanie rovnobežiek do hĺbky priestoru a vlastne celá hĺbka obrazu patrí k forme. Obraz nedokáže hĺbku vyjadriť, ona sa na obraze iba ukazuje. Preto vidieť perspektivistickú hĺbku obrazov sa treba učiť. Obraz je rovinný objekt, je to súbor rovinných čiar a oblastí. Čo je na obraze explicitne vyjadrené a čo na ňom preto vidí každý je, že sa určité čiary zbiehajú. Napriek rovinnosti obrazu sa však na niektorých obrazoch ukazuje hĺbka priestoru a na niektorých zbiehajúcich sa čiarach sa ukazuje ubiehanie do hĺbky.

22 – (s. 106) Horizont sa stáva čiarou (t.j. výrazom jazyka, teda niečím, čo jazyk dokáže vyjadriť a nielen ukázať) už u Dürera. Keď si predstavíme, že maliar zobrazený na Dürerovej rytine maľuje namiesto vázy krajinu, tak na jeho obraze postupne vznikne horizont. Pre maliara sa horizont na obraze iba ukazuje, patrí teda k jeho forme. Keďže však Dürerova rytina predstavuje reprezentáciu reprezentácie a celá situácia maľovania krajiny je na nej zobrazená z vonkajšieho pohľadu, tak pre toto vonkajšie hľadisko už obraz maľovaný maliarom nie je len obrazom ale je súčasne aj predmetom, ktorý sa na rytine zobrazuje. A keďže obraz je predmetom ktorý rytina zobrazuje, jeho forma je spredmetnená a horizont sa tak mení na čiaru. Spredmetnenie horizontu sa zosilní u Desargua, ktorý nahradí skutočnosť obrazom. U Desargua samotný maliar maľuje obraz obrazu, a teda už aj pre neho, a nie len pre vonkajšieho diváka, je horizont zvecnený. Na určenie, či je horizont zvecnený alebo nie si stačí uvedomiť, že skutočný horizont sa v krajine posúva keď sa pohybujeme, kým horizont zobrazený na obraze ktorý zastupuje krajinu pri maľovaní obrazu obrazu, sa už hýbať nedokáže. Tvorí ho fixná čiara a je teda spredmetnený.

23 – (s. 108) Výklad Lobačevského geometrie možno nájsť v knihe (Širokov 1955).

24 – (s. 108) Vzťah (8) sa neviaže k obrázku, ale je to všeobecná formulácia kosínusovej vety v bežne používanom označení. Premenné *a, b* a *c* uvedené na obrázku nespĺňajú vzťah (8), lebo ten je vzťahom euklidovskej geometrie, kým úsečky *a, b* a *c* uvedené na obrázku predstavujú strany neeuklidovského trojuholníka. Formulu (8) treba držať oddelene od nasledovného odvodenia.

25 – (s. 109) Rady pre hyperbolické funkcie majú nasledovný tvar:

$$\cosh\left(\frac{b}{k}\right) = 1 + \frac{b^2}{2k^2} + \frac{b^4}{24k^4} + \ldots, \qquad \sinh\left(\frac{b}{k}\right) = \frac{b}{k} + \frac{b^3}{6k^3} + \ldots$$

Ich odvodenie možno nájsť napríklad v Courant 1927.

26 – (s. 118) Termínom epistemický subjekt chceme pomenovať určitú všeobecnú štruktúru, ktorá v prípade perspektívistického maliarstva a projektívnej geometrie mala podobu hľadiska. U Lobačevského či Cayleyho už nemožno hovoriť o hľadisku, lebo ide o neeuklidovské systémy, na ktoré už nemožno bezprostredne nazerať. Ale aj pri týchto abstraktnejších systémoch je stále v hre určitý subjektívny pól, ku ktorému je ich jazyk vztiahnutý. Tento pól nemá povahu bodu, z ktorého sa musíme na reprezentáciu pozerať, ak chceme zahliadnuť to, čo znázorňuje. Týka sa skôr interpretačného postoja či odstupu, ktorý je predpokladom porozumenia jazyka. Preto sa zdá vhodnejšie označiť subjektívny pól jazyka termínom *epistemický subjekt*.

27 – (s. 134) Druhá vetva topológie – všeobecná topológia – má rovnaký typ epistemického subjektu ako topológia kombinatorická. Topologický priestor – základný pojem všeobecnej topológie – je určitá množina, na ktorej je zadaná topológia. Topológia môže byť zadaná rôznymi spôsobmi – pomocou otvorených množín, pomocou uzavretých množín, pomocou bázy alebo pomocou filtra. To podstatné, o čo ide pri zadaní topológie je, že ***štruktúra blízkosti*** (t.j. určenie toho, ktoré body sú k sebe blízko) ***sa stáva explicitne vyjadrenou v jazyku.*** Pred vznikom všeobecnej topológie bola blízkosť vlastnosťou priestoru. Dva body boli považované za blízke či vzdialené podľa toho, ako boli v priestore umiestnené. Vo všeobecnej topológii sa ***blízkosť oslobodzuje od priestoru***. Podobne ako v kombinatorickej topológii, aj tu priestor prestáva byť konštitutívnou bázou jazyka. Blízkosť prestáva byť vlastnosťou konštituovanou priestorom, ktorý ju bodom „prepožičiaval". Konštitutívnu úlohu, ktorú hral priestor, preberá jazyk. Preto pojem topologického priestoru je z epistemologického hľadiska príbuzný s pojmom simplexu kombinatorickej topológie.

28 – (s. 138) Premena kontinua na množinu bodov je opísaná v knihe (Medvedev 1965).

29 – (s. 140) Nasledujúce analýzy sa zakladajú na konfrontácii úlohy zrakovej a motorickej skúsenosti pri rozvoji kultúry. Keď tvrdíme, že pre antickú grécku civilizáciu bola dominantná zraková skúsenosť, nemáme tým na mysli zrak vo *fyziologickom* zmysle, lebo samozrejme, ten je rovnaký u všetkých civilizácií. Je to biologická danosť spoločná všetkým ľuďom, zrakovo sa orientovať vo svojom bezprostrednom okolí. V tom asi niet rozdielu medzi antickým Grékom či stredovekým Arabom. Zvláštnosťou človeka je však, že sa orientuje aj v tom, čo ho bezprostredne neobklopuje, vo svete kultúrnych entít, ako sú bohovia, hrdinovia, minulosť, budúcnosť, hodnoty a podobne. Medzi tieto kultúrne entity patria aj matematické objekty, ako sú čísla, trojuholníky či algebraické rovnice. Jednou z úloh kultúry je práve transcendencia skutočnosti. A tu sa znova stretáme so zrakom, ale tento raz v *kultúrnom* zmysle, ako základnou metaforou pre cestu k transcendentnu. Domnievame sa, že jeden z rozdielov medzi gréckou a arabskou kultúrou spočíval v tom, že kým antický Grék chápal transcendentno ako určitý paralelný svet, do ktorého možno preniknúť zrakom (spomeňme Platónovu metaforu jaskyne a schopnosti ***nazerať ideu dobra***), pre Araba sa transcendentno nezakladalo na zrakovej metafore. V arabskej kultúre sa transcendentno otvára sluchu, ako výzva alebo ako zákaz ***konať***. Transcendentno nie je paralelný svet, ale skôr alternatívny spôsob konania.

30 – (s. 141) Substitúciou sa v algebre rozumie dosadenie, pri ktorom za jednu neznámu, napríklad x, dosadíme výraz obsahujúci inú neznámu, napríklad $(y - 1)$. Rovnica, ktorá v premennej x mala tvar $x^2 + 2x - 8 = 0$, nadobudne v premennej y podobu $y^2 - 9 = 0$. Z riešenia $y = 3$ tejto zjednodušenej rovnice možno nájsť riešenie pôvodnej rovnice $x = 2$, keďže $x = y - 1$.

31 – (s. 141) Koreňom rovnice sa v algebre nazýva číslo, ktoré vyhovuje danej rovnici. Napríklad rovnica $x^2 + 2x - 8 = 0$ má dva korene, $x = 2$ a $x = -4$. Termín koreň sa zaviedol preto, lebo, ako ukazuje aj náš príklad, rovnici môže vyhovovať viac čísel. V ranných štádiách algebry bola tendencia rezervovať termín *riešenie rovnice* pre číslo, ktoré vyhovuje reálnej situácii opísanej rovnicou, kým ostatné čísla, ktoré rovnici tiež vyhovujú, boli nazývané falošnými riešeniami alebo jednoducho koreňmi.

32 – (s. 141) V tejto metafore jazyk nepovažujem za pevnú štruktúru, ale za pohybujúci sa organizmus. Metafora sa zakladá na skutočnosti, že jazyk má aj performatívnu stránku, ktorú možno prirovnať k pohybom tela. Písaný prejav prináša zvecnenie performácie, jej vytrhnutie z času. Písmo pripomína stopy v piesku a algebraickú symboliku možno prirovnať ku zvlečenej koži hada, ktorá nesie na sebe stopy jeho pohybov. Prvotná je performácia, pohyb, tok reči či sled algebraických úkonov. Stopa, znak či symbol sa rodia z tohto pohybu, sú jeho zvecnením.

33 – (s. 143) Napríklad rovnicu $2x^2 - 4x + 8 = 0$ upravil na tvar $x^2 + 4 = 2x$.

34 – (s. 144) Tri diela, ktorými sa novoveká veda rozchádza s antickým dedičstvom, vyšli takmer súčasne. Roku 1543 vyšlo Kopernikove dielo *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, ktoré prinieslo prevrat v chápaní vesmíru a Vesaliovo dielo *De Fabrica Humani Corporis*, ktoré prináša zásadný obrat v anatómii. O dva roky neskôr, roku 1545, vydáva Cardano svoje dielo *Ars Magna Sive de Regulis Algebracis*, ktoré prináša zlom v algebre.

35 – (s. 144) Cardano nazýva *binomiom* $\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}$ a *apotome* $-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}$. Tieto termíny možno nájsť u Euklida v jeho teórii iracionalít. Cardano formuly nikdy nenapísal. To, čo sme uviedli, je prepis jeho verbálneho opisu do modernej algebraickej symboliky.

36 - (s. 145) Regiomontánovu symboliku používal aj Cardano, ako je zrejmé z citátu v texte. Jediný rozdiel je, že pri tretej odmocnine Cardano nevypisuje celé slovo *cubica* ale iba skratku *cub* a Regiomontánovo slovko *de*, naznačujúce genitív, Cardano nahrádza dvojbotkou.

37 – (s. 146) Zvyšné dva typy rovníc $x^3 = bx + c$ (*cubus je rovný veci a číslu*) a $x^3 + c =$

bx, (*cubus a číslo je rovné veci*) sa dajú riešiť analogicky. Rovnice tvaru $x^3 + bx + c = 0$ Cardano neuvažoval, lebo čísla vystupujúce v rovniciach považoval za kladné a preto ich súčet nemôže byť nula.

38 – (s. 148) Zásadné zmeny, ktoré sa odohrali vo vede na prelome 15. a 16. storočia, v mnohom súvisia. Kopernikov objav, že Zem sa hýbe, sa zakladá na schopnosti vedľa toho, ako sa nám javí svet tu na Zemi, pozrieť sa na svet akoby zvonka, z hľadiska umiestneného niekde mimo slnečnej sústavy. Z tohto vonkajšieho hľadiska vidíme, že to, čo sa nám z vnútorného hľadiska javí ako otáčanie oblohy, je v skutočnosti (teda z vonkajšieho hľadiska) spôsobené rotáciou Zeme. Na podobnom zdvojení hľadiska je založený aj objav riešenia rovnice tretieho stupňa, lebo substitúcia vlastne znamená prechod k vonkajšiemu hľadisku. A prizeranie sa procesu maľovania zvonka je aj námetom Dürerovej rytiny.

39 – (s. 151) Kvôli úplnosti uvedieme, že riešenie rovnice tvaru $x^3 = bx + c$, o ktorý tu pôjde, má tvar $\sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}}$. Zdanlivo ide o malé zmeny, niekoľko znamienok sa zmenilo na opačné. Ale tieto nepatrné zmeny majú ďalekosiahle následky, lebo pod druhú odmocninu sa namiesto sčítania dostalo odčítanie.

40 – (s. 151) Komplexnými číslami sa v matematike nazývajú čísla tvaru $3 + 7\sqrt{-1}$. Nazývajú sa tak preto, lebo sú zložené z dvoch častí, z reálneho čísla 3 a z imaginárneho čísla $7\sqrt{-1}$. Veličina $\sqrt{-1}$ sa nazýva imaginárnou jednotkou a zvykne sa označovať písmenom i.

41 – (s. 152) Termín ***forma*** sa tu vyskytuje v dvoch významoch. Dúfam, že pre čitateľa nebude problémom ich odlíšiť. Používam ho jednak v zmysle „*forma jazyka algebry*“, teda v spojeniach ako „*perspektivistická forma, projektívna forma*“, ako termín patriaci do epistemológie; a jednak ho používam v zmysle „*polynomiálna forma, kvadratická forma*“, ako termín patriaci do algebry.

42 – (s. 159) Z tohto Descartovho názvu vzniklo označenie *i* pre výraz $\sqrt{-1}$, a tak miesto $2 + 3\sqrt{-1}$ dnes píšeme 2 + 3i.

43 – (s. 161) Napríklad číslu 7 + 2i priradil bod roviny, ktorého *x*-ová súradnica je 7 a *y*-ová súradnica je 2. Sčítaniu komplexných čísel potom zodpovedá posunutie roviny.

44 – (s. 164) Ako sme uviedli, jazyk algebry vzniká zvecnením motorických aktov. Epistemickým subjektom jazyka algebry je nositeľ týchto aktov. Keď ho nazývam slepcom, nemám na mysli skutočnú slepotu. Ide len o odmyslenie si zraku ako spôsobu orientácie vo svete. Svet algebry nie je odkrytý zraku. Je to svet odkrývaný pomocou motorických schém.

Keď sa nevidiaci učí orientovať sa v určitej budove, napríklad v škole, musí si pohyb v budove zafixovať. Orientuje sa nie pomocou zraku, ako to robíme my, ale pomocou schém premiestňovania sa po budove. Budova nie je dobrým príkladom, lebo ešte stále je to objekt, ktorý existuje aj v našom zrakovo konštituovanom svete. Budova má určitý tvar, určité priestorové vzťahy. Nevidiaci používajú motorické schémy iba na kompenzáciu svojho handicapu, ale svet, v ktorom sa pohybujú, je geometricky konštituovaný svet. Predstavu o svete algebry si môžeme utvoriť vtedy, keď si úplne odmyslíme akúkoľvek geometrickú reprezentáciu skutočnosti a predstavíme si, že máme svet konštituovaný výlučne pomocou schém transformácií.

45 – (s. 166) Zvecnenie, ktorého výsledkom je pojem *permutácie* je analogické zvecneniu pri ktorom vznikla algebraická symbolika. Ide o *nahradenie činnosti jej výsledkom*. Podobne ako odmocnina zastupuje v jazyku algebry proces odmocňovania pomocou výsledku tohto procesu, aj permutácia zadaním výsledného poradia predmetov zastupuje proces premiestňovania. Z epistemologického hľadiska je pojem grupy náročný v tom, že okrem permutácií obsahuje aj substitúcie a že substitúcie aplikuje na permutácie. Substitúcie predstavujú iný druh zvecnenia ako permutácie. V texte sme ich kvôli jednoduchosti opísali ako symetrie v nezvecnenej podobe. To nie je celkom presné, lebo všetko čo nachádza vyjadrenie v jazyku, je zvecnené. Nezvecnené symetrie sú tie, ktoré sa v jazyku iba ukazujú.

46 – (s. 179) Je možné, že Möbiov barycentrický kalkul je založený na koordinatívnej forme jazyka, a teda rekonštrukcia dejín analytickej geometrie si vyžiada aj použitie koordinatívnej formy. Rovnako nie je vylúčené, že pri detailnejšej analýze sa ukáže, že Saccheriho práce sú založené na kompozitívnej forme, a teda bude možné nájsť ilustrácie všetkých foriem aj v dejinách syntetickej geometrie. Čo však chcem zdôrazniť je, že to pre našu teóriu nie je nevyhnutné.

47 – (s. 186) Podľa Kanta je geometria apriórnou formou nazerania priestoru. Úlohou tejto formy je vniesť usporiadanie do zmyslových vnemov. Kantovská forma nazerania je teda princípom *koordinácie zmyslovosti*, a Kantova filozofia opisuje základy koordinatívnej formy jazyka. To, prečo Kantovu filozofiu vykladáme ako artikuláciu ***kompozitívnej formy jazyka*** vidno na skutočnosti, že nazeranie je len jednou z komponent procesu poznania, a zmyslom Kantovej filozofie je práve vyložiť jednotlivé *komponenty* (zmyslovosť, nazeranie, um a rozum) a určiť ich hranice. Kant opisuje kompozíciu ľudského poznania, ukazuje jeho jednotlivé zložky, ich súhru a hranice. Keď však formu nazerania prehlásil za apriórnu, zriekol sa interpretatívneho odstupu, a tým aj možnosti inej ako euklidovskej geometrie. Teda v oblasti geometrie Kant nevyužil hlavný prínos svoje filozofie, ktorým je objav aktívnej úlohy mysle pri poznávaní. Na poli geometrie rozum podľa Kanta nemá inú možnosť než poslúchať schémy predpísané Euklidom.

48 – (s. 191) Možno sa pokúsiť preniesť metódu rekonštrukcie z geometrie aj do maliarstva. Tu sa paralela zakladá na podobnostiach v tvorbe reprezentácie skutočnosti. Napríklad reprezentácia objektov pomocou simpliciálnych komplexov v kombinatorickej topológii pripomína kubistický rozklad objektu na elementárne formy (Kvasz 2003). Paralela tu už nie je tak pevná ako medzi algebrou a geometriou, kde často ten istý matematik tvorivo pracoval v oboch disciplínach.

49 - (s. 206) Táto a nasledujúce klasické práce týkajúce sa axiomatizácie teórie množín sú citované z antológie *From Frege to Gödel* (van Heijenoort 1967).

50 – (s. 213) Odlíšenie re-prezentácií a objektácií, ktoré sme zaviedli pri rekonštrukcii dejín matematiky, je možné zaviesť aj vo vede (pozri Kvasz 2001, Kvasz 2004b a Kvasz 2005c). Napríklad vznik teórie poľa či kvantovej mechaniky predstavujú re-prezentácie, kým vznik Lagrangeovej a Hamiltonovej mechaniky sú dve objektácie v rámci klasickej mechaniky.

Literatúra

Achtner, W. (2005): Infinity in Science and Religion. *Neue Zeitschrift für Systthematische Theologie* **47**, 392-411.

Agoston, M. (1976): *Algebraic Topology, a First Course*. Marcel Dekker, New York.

Aigner, M., Ziegler, G. M. and Hofmann, K. H. (2003): *Proofs from THE BOOK*. Springer, Berlin.

Alberti, L. B. (1435): *Della Pittura*, preklad F. Topinku pod názvom *O malbě*, V. Žikeš, Praha 1947.

Albeviero, S., Fenstad, J. E., Hoegh-Krohn, R. a Lindstrom, T. (1986): *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.* Academic Press, London.

Al-Chwárizmí, M. I. M. (850?): *Matematíčeskije traktaty*. FAN, Taškent 1983.

Alten, H.-W., Djafari Naini, A, Folkerts, M., Schlosser, H., Scholte, K.-H., and Wussing, H. (2003): *4000 Jahre Algebra, Geschichte, Kulturen, Menschen*. Springer, Berlin 2005.

Archimedes: *The Works of Archimedes*. In: Great Books of the Western World, vol. 11, Encyclopedia Britannica, Chicago 1952, s. 403 - 592.

Arkeryd, L. O., Cutland, N. J., and henson, C. W. (1997): *Nonstandard Analysis, Theory and Applications*. Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht.

Barrow-Green, J. (1997): *Poincaré and the Three Body Problem*. American Mathematical Society.

Barwise, J. (Ed. 1977): *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland Publishing Company, New York.

Beltrami, E. (1868): Saggio di interpetrazione della geometria Non-Euclidea. Ruský preklad in: Norden (1956), s. 180-212.

Berkeley, G. (1734): *The Analyst; or, a Discourse adressed to an Infidel Mathematician...*, In: A. A. Luce, T. E. Jessup (eds.), *The Works of George Berkeley, Bishop of Cloyne*, **4**, London 1951.

Bernays, P. (1926): Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der „Principia mathematica“. *Mathematische Zeitschrift* **25**, s. 305-320.

Boi, L. (1995): *Le Probléme mathématique de l’espace*. Springer, Berlin.

Boi, L., Flament, D. a Salanskis, J.-M. (Eds., 1992): *1830 - 1930 A Century of Geometry*. Springer, Berlin.

Bolyai, J. (1832): *Appendix*. GITTL, Moskva 1950.

Bolzano, B. (1817): Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Český preklad in: A. Kolman: *Bernard Bolzano*, SNPL, Praha 1958, s. 167-200.

Bonola, R. (1906): *Non-Euclidean Geometry.* Dover Publications, New York 1955.

Boole, G. (1847): *The Mathematical Analysis of Logic*. Cambridge.

Boolos, G. S. a Jeffrey, R. C. (1974): *Computability and Logic.* Cambridge University Press 1994.

Boyer, C. a Merzbach U. (1989): *A history of Mathematics*. New York, John Wiley.

Bronowski, J. (1973): *Vzestup člověka*. Odeon, Praha 1985.

Cantor, G. (1872): Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Mathematische Annalen* 5, 123-132.

Cantor, G. (1880): Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. N 2. *Math. Ann.* **17**, s. 355-358.

Cantor, G. (1883): *Grundlagen einer allgemeiner Mannigfaltigkeitslehre – Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Teubner, Leipzig.

Cantor, G. (1932): *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Ed. E. Zermelo, J. Springer, Berlin.

Cardano, G. (1545): *Ars Magna, or the Rules of Algebra*. MIT Press 1968.

Carnot, L. (1797): *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal.* Paris.

Cauchy, A. L. (1821): *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Premiere partie. Analyse algébrique*. Paris.

Cayley, A. (1859): A sixth memoir upon quantics. Ruský preklad in: Norden (1956), s. 222-252.

Church, A. (1969): Review of: The Completeness of Elementary Algebra and Geometry. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. **34**, p. 302.

Corfield, D. (1997): Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics, *Studies in the History and Philosophy of Science*, Vol. 28, No. 1, pp. 99-121.

Corry, L. (1996): *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhäuser, Basel 2004.

Courant, R. (1927): *Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenija I*. Nauka, Moskva 1967.

Courant, R. (1928): *Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenija II*. Nauka, Moskva 1970.

Courant, R. a Robbins, H. (1941): *What's mathematics?* Oxford University Press, New York 1978.

Crombie, A. C. (1953): *Augustine to Galileo: the History of Science A.D. 400-1650*. Harvard Univ. Press.

Crowe, M. (1975): Ten 'laws' concerning patterns of change in the history of mathematics. *Historia Mathematica,* **2**, s. 161-166. Pretlačené in: Gillies (1992), s. 15-20.

Dauben, J. (1979): *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton University Press, Princeton.

Dauben, J. (1984): Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge. In: *Transformation and Tradition in the Science* ed. E. Mendelsohn, s. 81-103, Cambridge University Press. Pretlačené in: Gillies (1992), s. 49-71.

Davis, M. (1977): *Applied Nonstandard Analysis*. John Wiley, New York.

Dedekind, R. (1872): *Stetigkeit und Irrationale Zahlen.* Friedrich Vieweg, Braunschweig 1965.

Dedekind, R. (1888): *Was sind und was sollen die Zahlen?* Friedrich Vieweg, Braunschweig 1965.

Descartes, R. (1637): *Geometrija*. In: *Rassuždenie o metode*. Izdateľstvo Akademii Nauk CCCP, 1953, s. 299 - 408.

Diacu F. a Holmes, P. (1996): *Celestial Encounters. The Origins of Chaos and Stability*. Princeton University Press, Princeton.

Dörrie, H. (1958): *Triumph der Mathematik.* Physica Verlag, Würzburg.

Dummett, M. (1994): *Origins of Analytic Philosophy*. Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Dunmore, C. (1989): *Evolution and revolution in the development of mathematics.* Ph.D. thesis, University of London.

Dunmore, C. (1992): Meta-level revolutions in mathematics. In: Gillies (1992), s. 209-225.

Edwards, C. H. (1979): *The Historical Development of the Calculus*. Springer, New York.

Euclid: *The Thirteen Books of the Elements*. Translated by Sir Thomas L. Heath, Dover, New York 1956.

Euler, L. (1748): *Introductio in analysin infinitorum*. Bousquet, Lausannae.

Euler, L. (1770): *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Reclam, Leipzig 1911.

Fauvel, J. (ed. 1993): *Newtons Werk. Die Begründung der modernen Naturwissenschaft*. Birkhäuser, Basel.

Fauvel, J. and Gray, J. (1987): *The History of Mathematics: A Reader,* Macmillan, London

Ferreirós, J. (1999): *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Birkhäuser, Basel.

Fiala, J. (1977): Henri Poincaré a psychologie matematiky. *Pokroky matematiky, fyziky a informatiky*, vol. XXII, s. 205-217.

Fourier, J. (1822): *Théorie Analytique de la Chaleur*. Paris.

Fraenkel, A. (1922): Der Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlsaxioms. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften,* s. 253-257. Anglický preklad vo van Heijenoort 1967, s. 284-289.

Fraenkel, A. (1928): *Einleitung in die Mengenlehre*. Springer, Berlin.

Fraenkel, A. a Bar-Hillel, Y. (1958): *Foundations of Set Theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Frege, G. (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Georg Olms, Hildesheim 1993. Anglický preklad vo van Heijenoort 1967, s. 1-82.

Frege, G. (1884): *Základy aritmetiky. Logicko-matematické skúmanie pojmu čísla.* Preložil P. Balko, Veda, Bratislava 2001.

Frege, G. (1891): Funktion und Begriff. In: Frege, G.: *Funktion, Begriff, Bedeutung*. Vandenhoec & Ruprecht, Göttingen 1989, s. 17-39.

Frege, G. (1893): *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet.* Vol. 1, Olms, Hildesheim 1962.

Friedman, M. (1985): Kant's theory of geometry. *The Philosophical Review*, Vol. **94**, s. 456-506.

Friedman, M. (1992): *Kant and the Exact Sciences*. Harvard University Press, Cambridge.

Geľfond, A. D. (1952): *Transcendentnyje i algebraičeskije čisla.* GITTL, Moskva.

Gillies, D. (1982): *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic*. Van Gorcum, Assen.

Gillies, D. ed. (1992): *Revolutions in Mathematics*. Clarendon Press, Oxford.

Gillies, D. (1992b): The Fregean revolution in Logic. In: Gillies (1992), s. 265-306.

Giorello, G. (1992): The „fine structure" of mathematical revolutions: metaphysics, legitimacy, and rigour. The case of the calculus from Newton to Berkeley and Maclaurin. In: Gillies 1992, s. 134-168.

Gleick, J. (1987): *Chaos, vznik nové vědy.* Ando Publishing, Brno.

Gödel, K. (1930): Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **37**, s. 349-360. Anglický preklad vo van Heijenoort 1967, s. 582-591.

Gödel, K. (1931): *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik* **38**, s. 173-198. Anglický preklad vo van Heijenoort 1967, s. 596-616.

Grattan-Guiness, I. ed. (1992): *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Routledge, London.

Gray, J. (1979): *Ideas of Space Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic.* Clarendon Press, Oxford.

Graves, M. T. (1997): *The Philosophical Status of Diagrams*. PhD Thesis. Stanford University.

Grosholz, E. (1992): Was Leibniz a mathematical revolutionary? in: Gillies 1992a

Grosholz, E. a Bregger, H. (eds. 2000): *The Growth of Mathematical Knowledge*. Kluwer.

Hadamard, J. (1945): *An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press.

Hardy, G. H. a Rogosinski, W. W. (1944): *Fourierovy řady*. SNTL, Praha 1971.

Hausdorff, F. (1914): *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig.

Heath, T. (1921): *A History of Greek Mathematics*. Dover, New York 1981.

Hejný, M. (1986): Prológ. In: Znám, Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. Alfa, Bratislava.

Hilbert, D. (1899): *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig 1930.

Hintikka, J. (1965): Kant's new method of thought and his theory of mathematics. *Ajatus*, Vol. **27**, s. 37-43. Reprinted in: *Knowledge and the Known, Modern Essays*, Reidel, s. 126-134.

Hintikka, J. (1966a): Kant Vindicated. In: P. Weingartner, Ed., *Deskription, Analytizität, und Existenz*, Salzburg, Pustet, S. 234-253.

Hintikka, J. (1966b): Kant and the Tradition of Analysis. In: P. Weingartner, Ed., *Deskription, Analytizität, und Existenz*, Salzburg, Pustet, S. 254-272.

Hintikka, J. (1967): Kant on the Mathematical Method, *The Monist*, Vol. **51**, s. 352-375. Reprinted in: C. J. Posy (Ed., 1992), s. 21-42.

Ifrah, G. (1981): *Universalgeschichte der Zahlen*. Campus, Frankfurt 1986.

Jahnke, H. N. (Ed. 1999): *Geschichte der Analysis*. Spektrum, Heidelberg.

Kadeřávek, F. (1922): *Perspektiva. Příručka pro architekty, malíře a přátele umění*. Jan Štenc, Praha.

Kagan, V. F. (1949): *Osnovanija geometrii*. GITTL, Leningrad.

Kalish, D. a Montague, R. (1964): *Logic, Techniques of Formal Reasoning*. Harcourt, New York.

Kant, I. (1781): *Kritika čistého rozumu.* Pravda, Bratislava 1979.

Keynes, J. M. (1947): Newton, the man. In: *The Royal Society Newton Tencentenary Celebrations*, Cambridge University Press 1947, s. 27-34.

Klein, F. (1928): *Vorlesungen über nicht-euklidische geometrie*. Springer, Berlin.

Klein, F. (1872): *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (*Das Erlanger Program*). Ruský preklad in: Norden (1956), s. 399-434.

Klein, J. (1934): *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. MIT Press 1968.

Kline, M. (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York.

Kneale, W a Kneale, M. (1962): *The Development of Logic*. Oxford University Press.

Knorr, W. (1986): *The Ancient Tradition of Mathematical Problems*. Birkhäuser, Boston.

Koetsier, T. (1991): *Lakatos' Philosophy of Mathematics, A Historical Approach*, North-Holland Amsterdam.

Kolman, A. (1961): *Dějiny matematiky ve starověku*. Academie, Praha 1968.

Kuhn, T. S. (1962): *Štruktúra vedeckých revolúcií*. Pravda, Bratislava 1982.

Kuhn, T. S. (1974): Second Thoughts on Paradigms. In: *The Essential Tension. Selected studies in* *scientific tradition and change*. The University of Chicago Press 1977, s. 293-319.

Kuzánsky, M. (1440): *O učenej nevedomosti.* Pravda, Bratislava 1979.

Kvasz, L. (1998): History of Geometry and the Development of the Form of its Language. *Synthese*, **Vol**. 116, s. 141-186.

Kvasz, L. (1999): On classification of scientific revolutions. *Journal for General Philosophy of Science*, Vol. **30**, 201-232.

Kvasz, L. (2000): Changes of Language in the Development of Mathematics. *Philosophia mathematica*, **Vol**. 8, s. 47-83.

Kvasz, L. (2001): Epistemologické aspekty dejín klasickej mechaniky. *Filozofia* 2001/10, s. 679-702.

Kvasz, L. (2002): Lakatos' Methodology Between Logic and Dialectic. In: *Appraising Lakatos. Mathematics, Methodology and the Man*, eds. G. Kampis, L. Kvasz a M. Stöltzner, Kluwer, s. 211-241.

Kvasz, L. (2003): Epistemological aspects of the history of painting. In: *Proceedings of the 7th Central European Seminar on Computer Graphics*, Budmerice, Slovakia. Eds: I. Viola, Th. Theussl, and L. Szirmay-Kalos, pp. 7-24.

Kvasz, L. (2004a): The Invisible Dialog Between Mathematics and Theology. In: *Perspectives on Science and Christian Faith*, Vol. **56**, s. 111-116.

Kvasz, L. (2004b): Epistemologické otázky fyziky: od antinómií čistého rozumu k expresívnym medziam jazyka. *Organon F* 2004/4, s. 362-381.

Kvasz, L. (2005a): Similarities and differences between the development of geometry and of algebra. In: *Mathematical Reasoning and Heuristics*, (C. Cellucci a D. Gillies Eds.), King's College Publications, London 2005, s. 25-47.

Kvasz, L. (2005b): Hintikka a Friedman o Kantovej filozofii geometrie. In: P. Sousedík (ed.): *Jazyk – logika – věda*. Filosofia, Praha, s. 233-251.

Kvasz, L. (2005c): Epistemologické otázky modernej fyziky. *Organon F* 2005/1, s. 40-61.

Lagrange, J. L. (1788): *Mécanique Analytique*. Paris.

Lagrange, J. L. (1797): *Théorie des fonctions analytiques.* Paris.

Lakatos, I. (1963-64): Proofs and Refutations. *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. **14**, pp. 1-25, 120-139, 221-243, 296, 342.

Lakatos, I. (1970): Falsification and the methodology of scientific research programmes. In: *The methodology of scientific research programmes. Philosophical Papers of Imre Lakatos Volume I*. Cambridge University Press, Cambridge 1978, s. 8-101.

Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lakatos, I. (1978): Cauchy and the Continuum: the Significance of Non-standard Analysis for the History of Mathematics. In: *Mathematics, Science, and Epistemology. Philosophical Papers of Imre Lakatos Volume II*. Cambridge University Press, Cambridge 1978, s. 43-60.

Laugwitz, D. (1996): *Bernhard Riemann*. Birkhäuser, Basel.

Leibniz, G. W. (1686): Metafyzické pojednanie. Český preklad Jindřicha Husáka in: *Monadologie a jiné práce*, Svoboda, Praha 1982.

Lobačevskij, N. I. (1829): O načalach geometrii. In: *Polnoje sobranije sočinenij*, tom 1, GITTL, Leningrad 1946.

Mancosu, P. (1992): Descartes's Géometrie and revolutions in mathematics. In: Gillies 1992, s. 83-116.

Mandelbrot, B. (1967): How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* **155**, 636-638.

Mandelbrot, B. (1977): *Die fraktale Geometrie der Natur*. Birkhäuser, Basel 1991.

Manheim, J. H. (1964): *The Genesis of Point Set Topology*. Pergamon Press, Oxford.

Martin, G. (1951): *Immanuel Kant, Ontologie und Wissenschaftstheorie.* Walter de Gruyter, Berlin 1969.

Martin, G. E. (1975): *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer, New York.

Medvedev, F. A. (1965): *Razvitije teorii množestv v XIX veke*. Nauka, Moskva.

Mehrtens, H. (1976): T. S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the 'new historiography' of mathematics. *Historia Mathematica*, **3**, 297-320. Pretlačené in: Gillies (1992), s. 21-41.

Mehrtens, H. (1990): *Moderne -- Sprache -- Mathematik: Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*. Suhrkamp, Frankfurt am Main.

Monna, A. F. (1975): *Dirichlet's principle a mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis*. Oosthoek, Scheltema and Holkema, Utrecht.

Moore, G. H. (1982): *Zermelo's Axiom of Choice, it's Origins, Development, and Influence*. Springer, New York.

Natanson, I. P. (1949): *Teorija funkcij veščestvennoj peremennoj.* Nauka, Moskva 1974.

Newton, I. (1687): *Matematičeskije načala naturaľnoj filosofii*. Nauka, Moskva 1989.

Nikoforovskij, V. A. (1979): *Iz istorii algebry XVI-XVII vv*. Nauka, Moskva.

Norden, A. P. (ed.) (1956): *Ob osnovanijach geometrii. Sbornik klassičeskich rabot po geometrii.* GITTL, Moskva.

Olby, R. C. (ed.) (1989): *Companion to the History of Modern Science*. Routledge, London.

Olivieri, G. (2005): Do We Really Need Axioms in Mathematics? In: *Mathematical Reasoning and Heuristics*, (C. Cellucci a D. Gillies Eds.), King's College Publications, London 2005, s. 119-135.

Pasch, M. (1882): *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig.

Peano, G. (1889): *Arithmetices principia nova methodo exposita.* Anglický preklad v H. C. Kennedy (ed.) Selected Works of Giuseppe Peano. Allen and Unwin 1973.

Peitgen, H. O., Richter, P. H. (1986): *The Beauty of Fractals*. Springer, Heidelberg.

Peitgen, H. O., Jürgens, H. a Saupe, J. (1992): *Chaos and Fractals*. Springer, New York.

Piaget, J. a Garcia, R. (1983): *Psychogenesis and the history of science*. Columbia University Press, New York 1989.

Poincaré, H. (1890): Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica* **13**, 1-270. Ruský preklad in: Poincaré (1974).

Poincaré, H. (1895): Analysis situs. *J. École Polytechniques,* Cahier 1, s. 1-121. Ruský preklad in: Poincaré (1974).

Poincaré, H. (1899): Complément á „l'Analysis situs". *Rendiconti Circolo mat. Palermo,* **13**, s. 285-343. Ruský preklad in: Poincaré (1974).

Poincaré, H. (1900): Second complément á „l'Analysis situs". *Proc. London Math. Soc,* **32**, s. 277-308. Ruský preklad in: Poincaré (1974).

Poincaré, H. (1902): Sur certaines surfaces algébriques, troisiéme complément á „l'Analysis situs“. *Bull. Sos. math. France,* **30**, s. 49-70. Ruský preklad in: Poincaré (1974).

Poincaré, H. (1902): *La Science et l'Hypothése*. Flammarion, Paris.

Poincaré, H. (1908): *Science et Méthode*. Flammarion, Paris.

Poincaré, H. (1974): *Izbrannyje trudy, tom II*. Nauka, Moskva.

Poincaré, H. (1983): *O nauke*. Nauka, Moskva.

Pólya, G. (1945): *How to solve it*. Princeton University Press, Princeton.

Pólya, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton University Press, Princeton.

Pólya, G. (1962): *Mathematical discovery*. John Wiley, New York.

Postnikov, M. M. (1963): *Teorija Galua*. GIFML, Moskva.

Posy C. J. (Ed., 1992): *Kant's Philosophy of Mathematics, Modern Essays*. Kluwer.

Rattansi, P. (1993): Newton und die Weisheit der Alten. In: Fauvel, ed. 1993, s. 237 - 256.

Riemann, B. (1851): *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Göttingen. Ruský preklad in: Riemann (1948).

Riemann B. (1948): *Sočinenija*. GITTL, Leningrad.

Robinson, A. (1961): Non-standard analysis. *Proc. Roy. Acad. Amsterdam*, **64**, s. 432-440.

Rozenfeľd, B. A. (1976): *Istorija neevklidovoj geometrii*. Nauka, Moskva.

Rusnock, P. (2000): *Bolzano's philosophy and the emergence of modern mathematics*. Rodopi, Amsterdam.

Russell, B. (1897): *An Essay on the Foundations of Geometry.* Cambridge University Press.

Russell, B. (1902): Letter to Frege. In: van Heijenoort 1967, s. 124-125.

Russell, B. (1908): Mathematical logic as based on the theory of types. *American journal of mathematics* **30**, s. 222-262. In van Heijenoort 1967, s. 150-182.

Sain, M. (1986): *Nincs királyi út*. Gondolat, Budapest.

Schirn, M. (ed. 1998): *The Philosophy of Mathematics Today*. Clarendon Press, Oxford.

Scholz, E. (ed., 1990): *Geschichte der Algebra*. Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Sebestik, J. (1992): *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*. VRIN Paris.

Skolem, T. (1922): Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *Matematikerkongressen i Helsingfors,* Akademiska Bokhandeln, Helsinki 1923. Anglický preklad vo van Heijenoort 1967, s. 290-301.

Sluga, H. (1996): Frege on Meaning. In: *Ratio* (New Series), Vol. IX, s. 209-226.

Stewart, I. (1989): *Galois theory*. Chapman and Hall, London.

Šafarevič, I. (1991): *Esť li u Rossii buduščee?* Sovetskij pisateľ, Moskva.

Ščerbakov, R. N. a Pičurin, L. F. (1979): *Ot proektivnoj geometrii k neevklidovoj*. Prosveščenije, Moskva.

Širokov, P. A. (1955): *Kratkij očerk geometrii Lobačevskogo*. Nauka, Moskva 1983.

Tarski, A. (1948): *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. University of California Pres, Berkeley 1951.

Tarski, A. (1959): What is elementary geometry? In: *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics*, L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, eds., North Holland, Amsterdam, s.

16-29

Torretti, R. (1978): *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. D. Reidel, Dordrecht.

Tóth, I. (1977): Geometria more ethico. Die Alternative: euklidische oder nichteuklidische Geometrie. In: *Naturwissenschaftliche Studien. Festschrift für Willi Hartner.* (Eds. Maeyama Y. a Saltzer, W. G.), Wiesbaden, s. 395-415.

Toti Rigatelli, L. (1996): *Evariste Galois*. Birkhäuser Basel.

Van der Waerden, B. L. (1950): *Erwachende Wissenschaft*. Basel, Stuttgart 1966.

Van der Waerden, B. L. (1980): *A History of Algebra, from al-Khwarizmí to Emmy Noether*, Springer Berlin.

van Heijenoort, J. (1967): *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Harvard UP, Cambridge, Ma.

von Neumann (1925): Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für reine und angewandte Mathematik* **154**, s. 219-240. Anglický preklad vo van Heijenoort 1967, s. 393-413.

Viéte, F. (1591): *Introduction to the Analytical Art*. In: Klein 1934, s. 313-353.

da Vinci, L. (1492): Die Linearperspektive. In: *Sämtliche Gemälde und die Schriften zur Malerei*. Ed. A. Chastel, Schirmer-Mosel, Mníchov 1990.

Vopěnka, P. (1979): *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Teubner, Leipzig.

Vopěnka, P. (1995): *Rozpravy s geometrií IV. Otevření neeukleidovských geometrických světů. Trýznivé tajemství.* Vesmír, Praha.

Vopěnka, P. (2000): *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií.* Práh, Praha.

Vopěnka, P. (2004): *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*. Práh, Praha.

Vuillemin, J. (1962): *La Philosophie de l'Algébre*. PUF, Paris.

Weber, H. (1895): *Lehrbuch der Algebra*. Braunschweig.

Wittgenstein, L. (1921): *Tractatus Logico-philosophicus*. Suhrkamp, Frankfurt am Main 1989.

Zermelo, E. (1908): Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Mathematische Annalen* **65**, s. 261-281. Anglický preklad vo van Heijenoort 1967, s. 199-215.

Zlatoš, P. (1995): *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou*. IRIS, Bratislava.

Obsah