1. prednáška: Úvod do dejín matematiky

A. Možné pohľady na dejiny geometrie

Geometria zasiahla do vývinu matematiky na troch odlišných úrovniach. Jednak je geometria súčasťou ***všeobecných dejín exaktných vied***, t.j. článkom, ktorý spája Egyptské a Babylonské počty s novovekou fyzikou. Z tohto hľadiska je geometria miestom zrodu deduktívnej metódy, oblasťou, kde sa zrodila idea dôkazu. Druhý možný pohľad je pohľad na geometriu ako na disciplínu, v rámci ktorej sa vytvára ***jazyk na opis fenoménu tvaru***. Z tohto hľadiska sú dejiny geometrie, spojené s prechodom od syntetickej geometrie cez analytickú, algebraickú a diferenciálnu geometriu až po geometriu fraktálnu, procesom v rámci ktorého pre stále širšiu paletu prírodných útvarov dokážeme exaktne opísať ich tvar. Tretí prístup k dejinám geometrie sleduje postupné prenikanie ku stále hlbším ***štruktúram, ktoré určujú vlastnosti priestoru***. Z tohto hľadiska sú dejiny geometrie procesom, ktorý začína od konkrétnych geometrických útvarov, ktoré sú nám viac-menej bezprostredne dané; cez objav priestoru ako formy, podmieňujúcej vlastnosti týchto útvarov, až po odkrývanie hlbších štruktúr, ktoré sú s priestorom spojené, ako je metrická, projektívna štruktúra a topologická štruktúra. Dnes si tieto tri prístupy k dejinám geometrie stručne opíšeme, a povieme si niečo viac o prvom z nich.

A. 1 Geometria a zrod idey dôkazu

Geometria je tou oblasťou matematiky, v ktorej sa zrodil dôkaz. Preto možno geometriu považovať vlastne za ***miesto zrodu matematiky ako takej***. V striktnom zmysle hovoríme o matematike až vtedy, keď existuje dôkaz. Z tohto hľadiska je dôležité si uvedomiť, že staré civilizácie Číny, Indie, Egypta, Babylonu, Mayov či Inkov myšlienku dôkazu nepoznali. Pre nich bola matematika empirickou vedou, podobne ako je ňou pre nás biológia. V starovekom Egypte napríklad objavili, že trojuholník so stranami 3, 4 a 5 je pravouhlý, a tento objav používali pri konštrukcii pravého uhla v zememeračstve a staviteľstve. Mohli si tiež všimnúť, že pre čísla 3, 4 a 5 platí vzťah $a^2 + b^2 = c^2$. Netušili však, že táto vlastnosť platí všeobecne, pre všetky pravouhlé trojuholníky, a že pre ne platí nevyhnutne, teda že ju možno dokázať. ***Idea dôkazu sa zrodila jediný raz, a to v 6. storočí pnl. v Gréckych kolóniách v Malej Ázii***. Nikde na svete sa tento objav nezopakoval. Objav dôkazu je jedinečná udalosť. Žiadna z civilizácií, ktoré vytvorili písmo, postavili pozoruhodné chrámy a paláce a zanechali nám pozoruhodné literárne diela neprišli na myšlienku dôkazu.

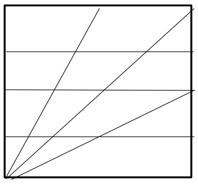
A. 2 Geometria ako jazyk na opis fenoménu tvaru

Druhou úrovňou, na ktorej geometria zasahuje do dejín matematiky, je ***opis fenoménu tvaru***. V tejto rovine ide o vývinovú líniu vedúcu od syntetickej geometrie staroveku, cez analytickú geometriu, ktorá sa zrodila v 17. storočí, až po fraktálnu geometriu 20. storočia. V tejto línii je základnou otázkou ***čo to znamená, že niečo má tvar***, a dejiny geometrie možno chápať ako tvorbu jazyka, pomocou ktorého dokážeme tvar exaktne opísať.

Antickí Gréci vo svojej syntetickej geometrii uchopovali tvar pomocou kružítka a pravítka. Možno preto povedať, že pre nich tvar splýval s možnosťou ***<u>konštrukcie útvaru pomocou úsečiek a oblúkov kružníc</u>***. V priebehu vyše štyroch storočí objavili aj zopár kriviek, ktoré sa tomuto kánonu vymykajú, ako napríklad ***kvadratrix*** Hippiasa Elidského (5. stor. pnl.), Menaichmove ***kuželosečky*** (4. stor. pnl.), Archimedova ***špirála*** (3. stror. pnl.), Nikomédova ***konchoida*** (okolo 250 pnl.), Dioklova ***kisoidu*** (okolo 200 pnl.). Každá z týchto kriviek je vytvorená pomocou špeciálneho triku, preto je vlastne nemožné vybudovať nejakú jednotnú teóriu týchto kriviek.

A.2. 1 Hippiasova kvadratrix

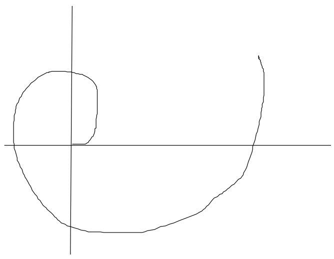
Hippiasova kvadratrix je množina priesečníkov rovnomerne sa otáčajúcej bočnej strany štvorca s rovnomerne sa posúvajúcou vrchnou stranou štvorca.



Pomocou tejto krivky možno zostrojiť trisekciu uhla a kvadratúru kruhu. Odtiaľ je odvodený jej názov.

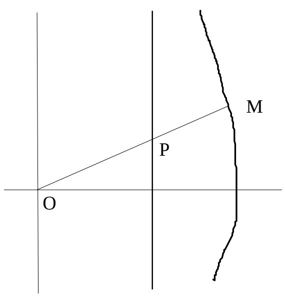
A.2. 2 Archimedova špirála

Je to čiara vytvorená bodom, ktorý sa rovnomerne pohybuje po polpriamke, zatiaľ čo táto poolpriamka sa rovnomerne otáča okolo svojho koncového bodu.



A.2. 3 Nikomédova konchoida

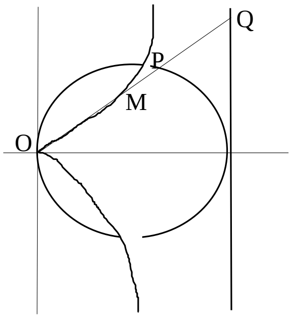
Je to opäť krivka, vytvorená za účelom riešenia úlohy trisekcie uhla. Názov ***konchoida*** znamená ***podobný škebli***. Nikomédova konchoida je množina bodov, pre ktoré ***<u>OM = OP + b</u>***



Neskôr bol pojem konchoidy zovšeobecnený a konchiodou sa nazývajú krivky, ktoré vzniknú zväčšením alebo zmenšením sprievodiča každého bodu danej krivky (nielen priamky) o danú úsečku.

D. 4 Dioklova kissoida

Jej názov znamená, ***podobná brečtanu***. Je krivka, pre ktorú platí OM = PQ.



Neskôr sa kissoidy konštruovali nielen pre kružnice, ale aj pre inéí krivky.

Keď Descartes a Fermat v 17. storočí objavili spôsob generovania geometrických útvarov založený na ***súradnej sústave a algebraickej formule***, s novými krivkami sa roztrhlo vrece. V priebehu niekoľkých desaťročí boli definované krivky ako ***kardióda***, **Pascalova ulita**, ***Descartov ovál***, ***Bernoulliho lemniskáta***, ***astroida***, ***logaritmická špirála***. Neskôr, keď algebraický jazyk používaný na definíciu kriviek bol nahradený diferenciálnym a integrálnym počtom, príliv nových kriviek ešte zintenzívnel. Matematika získala prístup k celému radu nových útvarov, o ktorých matematici antiky nemali potuchy, a ktorý pod názvom špeciálne funkcie tvorí obsah hrubých príručiek.

Ďalšia zmena v chápaní toho, čo to je tvar nastala koncom 19. storočia, kedy bol vytvorený nový spôsob generovania útvarov: ***iteratívny proces***. Na určitý geometrický útvar sa stále znova a znova aplikuje tá istá procedúra, až nakoniec v limite dostávame útvary, ktoré majú prekvapivé tvary, a ktoré sa označujú spoločným názvom fraktály. Či už ide o ***Cantorovo diskontínuum***, ***Kochovej krivku***, ***Peanovu krivku***, alebo o iný útvar, ktorého obrázok možno nájsť v knižkách o fraktálnej geometrii, je zrejmé, že sa podaril prielom do úplne nového univerza tvarov.

Keď sa spätne pozrieme na útvary syntetickej, analytickej a fraktálnej geometrie, vidíme určité prehlbovanie chápania toho, kadiaľ vedie hranica medzi tým, čo má tvar, a beztvarým.

A. 3 Geometria ako štúdium štrukturálnych vlastností priestoru

Tretia úroveň, na ktorej možno sledovať vývin geometrie vedie od ***euklidovskej geometrie***, cez rôzne ***neeuklidovské geometrie***, až po zrod ***algebraickej topológie*** a následný vznik axiomatickej metódy prezentovaný Hilbertovými *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899. Túto líniu možno charakterizovať ako ***nárast abstraktnosti predmetu*** geometrie, keď u Hilberta je geometria vlastne abstraktná axiomatická teória.

Táto tretia rovina, týkajúca sa nárastu abstraktnosti bude predmetom, ktorému sa budeme venovať počas tohto semestra. Druhú úroveň prenecháme pre budúcu prednášku. Dnes stručne povieme niečo o prvej úrovni, o vzniku geometrie ako deduktívnej disciplíny.

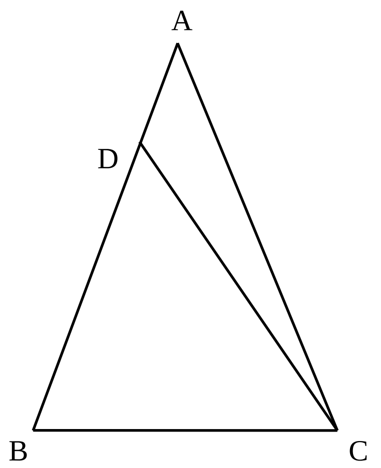
B. Geometria a vznik matematiky ako deduktívnej disciplíny

Aby sme jasne uvideli zlom, ktorý oddeľuje egyptskú matematiku od gréckej, zoberme ako ilustráciu príklad z ***Moskovského papyrusu*** z 18. storočia pnl. (Kolman 1961, s. 41):

> „Spôsob výpočtu pyramídy nemajúcej vrchol. Ak máš danú pyramídu bez vrcholu vysokú 6 (lakťov), s dolnou hranou 4 (lakte) a hornou 2, umocni 4 na druhú, dostaneš 16, zdvojnásob 4, dostaneš 8, umocni 2 na druhú, dostaneš 4,
>
> (1) pripočítaj týchto 16
> (2) k týmto 8 a 4
> (3) dostaneš 28, vypočítaj
> (4) 1/3 zo 6, obdržíš 2, počítaj
> (5) s 28 dvakrát, dostávaš 56,
> (6) hľa: je to skutočne 56. Našiel si správne.“

Tento výpočet sa ničím nelíši od dnešných kuchárskych kníh. Je to ***praktický*** návod na to, čo máme robiť, aby sme dostali výsledok; bez akéhokoľvek teoretického zdôvodnenia. Navyše je to ***konkrétny*** recept, bez náznaku všeobecnosti. Pritom nie je jasné, či tento postup dáva správny výsledok, a ak áno, tak prečo. Ako druhý text zoberieme ***Euklidove Základy*** z 3. storočia pnl. (Hejný, 1986, s. 74):

> ***„Ak sú v trojuholníku dva uhly rovnaké, tak aj strany rovnaké uhly spínajúce, rovnaké navzájom budú.***
>
> Nech má trojuholník ABC rovnaké uhly ABC a ACB. Tvrdím, že aj strana AB strane AC je rovnaká.
>
> Nuž nech nerovnaké sú AB, AC, teda jedna z nich je väčšia. Buď je väčšia AB a odoberiem od väčšej AB tej menšej AC rovnakú DB a spojím DC.
>
> Nakoľko teraz rovnaká je DB tej AC a spoločná BC, sú aj tie dve DB, BC tým dvom DC, CB rovnaké, každá každej a uhol DBC uhlu ACB je rovnaký. Teda aj základňa DC základni AB je rovnaká a trojuholník DBC trojuholníku ABC je rovnaký, menší väčšiemu, čo je nemožné. Preto nie nerovnaké sú tie AB, AC, takže sú rovnaké.
>
> Ak sú teda v trojuholníku dva uhly rovnaké, tak aj strany, rovnaké uhly spínajúce, rovnaké navzájom budú. ***Čo bolo treba dokázať***.“



Vidíme, že Euklidov text je zásadne iný. Na rozdiel od egyptského matematika Euklides nechce od nás, aby sme niečo konkrétneho urobili. Nevyžaduje žiadnu činnosť, prostredníctvom ktorej by sme niečo dosiahli. Obracia sa na nás bezprostredne a chce, aby sme niečo nahliadli, aby sme niečo pochopili. Chce nás presvedčiť, že veta je pravdivá. Dôkaz má charakter argumentácie, je to bezprostredný rozhovor s mysleným partnerom.

Cieľom dnešnej prednášky je porozumieť tomuto rozdielu. Rozdiel medzi egyptskou a gréckou matematikou možno vidieť v dvoch rovinách. Jednak ide o rozdiel ***teoretickej matematiky*** od matematiky praktickej. Okrem toho, teoretická matematika hovorí o ***idealizovaných objektoch***, na rozdiel od praktickej geometrie, ktorej predmetom záujmu sú predmety bežnej skúsenosti.

B. 1 Vznik teoretickej matematiky

Gréci vytvorili ***teoretickú*** matematiku (***etymológia slova teória***), matematiku bez praktického zamerania. Teoretická matematika sa zakladá na ***dôkaze*** namiesto praktických návodov. Aby sme pochopili, odkiaľ sa teoretická matematika a dôkaz nabrali sa pozrieme na Thalésa a Pythagora.

B. 1. a Thalés z Milétu (625-547 pnl.)

S Thalétovým menom sa spája celý rad anekdot, ktoré však nemajú väčšiu historickú cenu. Tak Aristoteles opisuje anekdotu, podľa ktorej Thalés údajne z pozorovania hviezd vyčítal, že bude dobrá úroda olív, prenajal všetky lisy na olivy, a keď sa veľká úroda olív skutočne dostavila, zbohatol. Platón zas uvádza anekdotu, podľa ktorej Thalés hľadiac na hviezdy, spadol do studne a za to utŕžil výsmech peknej tráckej slúžky, ktorá mu povedala, že pozorujúc hviezdy si nevidí pod nohy. Je zrejmé, že tieto anekdoty sú účelové, a majú ilustrovať dve protichodné tradície - podľa jednej (aristotelovskej) je filozofia nanajvýš praktická, kým druhá (platónska) chápe filozofa ako snílka.

Thales nadobudol slávu tým, že ***predpovedal zatmenie Slnka***. Toto zatmenie muselo byť zatmenie 28. mája 585 pnl. Nie je však jasné, či to skutočne urobil, alebo mu bola príslušná predpoveď jednoducho dodatočne pripísaná. V antike bolo totiž zvykom pripisovať mudrcom (sofos) schopnosť predpovedať rôzne prírodné úkazy. Podľa ***Eudéma***, autora dejín matematiky napísanej pre *Lykeon,* Thalés po návšteve Egypta priniesol geometriu do Grécka a obohatil ju o rad vlastných objavov. Najprv uvedieme zoznam matematických tvrdení, ktoré tradícia pripisuje Thalétovi. Prvé štyri uvádza Proklos v *Komentári k prvej knihe Euklidových základov*, zvyšné sú od Diogena Laertského z jeho *Životopisov významných filozofov*:

T1: Priemer delí kruh na dve rovnaké časti.

T2: Oproti zhodným stranám ležia v trojuholníku zhodné uhly.

T3: Vrcholové uhly sú zhodné.

T4: Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom, sú zhodné.

T5: Určenie výšky pyramídy zmeraním dĺžky jej tieňa vtedy, keď má predmet rovnakú dĺžku ako jeho tieň

T6: Každý uhol nad priemerom je pravý.

Keď sa však pozrieme na úroveň Egyptskej matematiky, nenájdeme žiadne porovnateľné tvrdenia. Preto je nepravdepodobné, že by Grécka matematika vyrástla z Egyptských zdrojov. Ono to bol opäť ***antický zvyk zvyšovať vážnosť určitého učenia tým, že sa pripíše Egypťanom či Babylóňanom***.

B. 1. b Pythagoras zo Samu (571-497)

Tradícia pripisuje Pythagorovi objav ***Pythagorovej vety***, a ***hudobnej harmónie***. Čo tieto objavy spája je skutočnosť, že dve sféry javov, tvar a zvuk, ktoré na prvý pohľad nemajú nič spoločného s číslami, sú podriadené číslam. Pythagorejci pod vplyvom príkladov z astronómie, geometrie a teórie hudby verili, že pomery celých čísel odrážajú nemenné a všeobecné vlastnosti javov a považovali čísla za zdroj formy a poriadku hmotného univerza. Základným učením Pythagorejcov bolo preto učenie o číslach, pričom verili, že ***svet je harmóniou protikladov, vyjadrených pomocou čísiel***. Matematická realita sa tak prelínala s hmotným svetom a spolu vytvárali harmonickú jednotu. Podľa tradície

> „*Pythagoras prvý nazval súhrn všetkého* **kozmos** *podľa poriadku v ňom*."
> „***Filozofiu*** *prvý pomenoval Pythagoras a seba nazval filozofom, lebo vraj nijaký človek nie je múdry, len boh*."
> „*A všetko, čo sa dá poznať, má číslo, lebo bez neho nie je možné niečo myslieť, alebo poznať*."

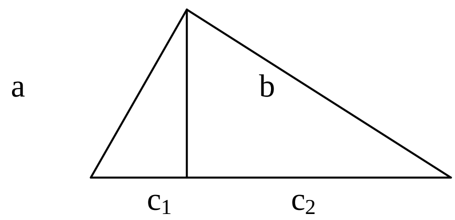
U Pythagorejcov bol geometrický jazyk spojený s predpokladom, že každá úsečka je zložená z určitého počtu jednotiek, a pomer dĺžok úsečiek sa rovná pomeru počtov príslušných jednotiek. Pythagorejci zobrazovali čísla pomocou bodiek, ktoré zoskupovali do geometrických útvarov. Takto vytvorili tzv. ***figurálne čísla***: trojuholníkové čísla (1, 3, 6,...), štvorcové čísla (1, 4, 9,...) a pod. Tento geometrický jazyk im umožňoval dokázať tvrdenia, ktoré dnes väčšinou zapisujeme algebraicky. Keď napríklad chceme ***dokázať, že súčet dvoch párnych čísel je číslo párne***, tak si párne číslo znázorníme ako obdĺžnik, ktorého výška sa rovná dvom (párne číslo), ale ktorého šírka ostane neurčitá. Dôkaz sa zakladá na nahliadnutí skutočnosti, že spojením dvoch obdĺžnikov s výškou dva vznikne opäť obdĺžnik s výškou rovnou dva, ktorá predstavuje párne číslo. Keďže sme v našej úvahe pracovali s obdĺžnikmi, ktorých šírka ostala počas celej úvahy neurčitá, dokázali sme naše tvrdenie pre ľubovoľné dva obdĺžniky, a teda vlastne pre dve ľubovoľné párne čísla. Pritom dokázať tu ešte neznamená logicky odvodiť z predpokladov, ako tomu bude neskôr, ale jednoducho ukázať.

Pythagorejská technika zobrazovania čísel pomocou bodiek sa nazývala ***psefofória*** (od *psefos* kamienok a *foréo* od *féro*, ktoré popri mnohých iných má aj význam ukladám). Psefofória nebola hrou s kamienkami, ale ***technikou vizualizácie počtu***. Táto vizualizácia umožnila nájsť číslo vlastností ako napríklad spravodlivosť. ***Štvorcové čísla sú podľa Pythagorejskej náuky spravodlivé***, lebo ich možno usporiadať do štvorca, t.j. útvaru, ktorého obe strany sú rovnako dlhé, čo je príkladom spravodlivého rozdelenia. Ak tento príklad znie trochu čudne, netreba zabúdať, že Pythagoras objavil číselné zákony hudobnej harmónie, ktoré boli neskôr plne potvrdené modernou akustikou. A keď to, čo znie uchu lahodne, závisí od čísel, tak prečo by čísla nemohli tvoriť podstatu aj iných harmónií, akými sú spravodlivosť, dobro alebo krása. Je možné, že aj podstatu spravodlivosti a dobra tvoria čísla, len sa nám zatiaľ nepodarilo k nim preniknúť.

Vizualizácia počtu pomocou psefofórie, prinesenie počtu pred zrak, sprístupnenie počtu evidencii, je z hľadiska matematiky fundamentálnym posunom, lebo evidencia tvorí základný prístup k javom v matematike. Je rozhodujúca pre prechod od egyptskej matematiky praktických návodov ku ***gréckemu chápaniu matematiky ako teórie***. Evidencia dáva jav bezprostredne, tak ako sa nám ukazuje. Preto ***pravda v matematike má povahu aletheie*** – toho, čo nie je skryté. Toto odkrývanie skrytého, toto ukazovanie skrytého má v matematike povahu dôkazu.

Zoberme tvrdenie, že súčet dvoch párnych čísel je opäť číslo párne. Egyptský učenec by mohol toto tvrdenie ***overiť na niekoľkých konkrétnych prípadoch*** a potom by mu začal ***veriť***. Nikdy by však nemohol nadobudnúť istotu o jeho pravdivosti. Čo ak existujú dve nesmierne veľké párne čísla, ktorých súčet je nepárny? ***Figurálne čísla umožňujú dokázať***, že takéto čísla nemôžu existovať. Keď pomocou psefofórie aritmetickej vlastnosti byť párny priradíme geometrickú formu dvojradu, vieme formálne nahliadnuť, že toto tvrdenie je nevyhnutne pravdivé. ***Formálne nahliadnutie pravdivosti je dôkaz***.

Pythagorovi sa tradične pripisuje důkaz Pythagorovej vety. Dôkaz, uvedený van der Waerdenom v jeho monografii o pytagorejcoch (van der Waerden 1979), ktorý je pravdepodobne blízky pôvodnému Pytagorovmu dôkazu, obsahuje jednu pomocnú čiaru, ktorá delí príslušný trojuholník na dva podobné. Pritom samotný dôkaz je tvorený reťazcom pozostávajúcim z ***evidencií a kalkulatívnych krokov***:



Z podobnosti malého trojuholníka s celým dostávame

$$a : c_1 = c : a \qquad \text{preto} \qquad a^2 = c.c_1$$

analogicky

$$b : c_2 = c : b \qquad \text{preto} \qquad b^2 = c.c_2$$

a teda sčítaním identít uvedených vpravo máme

$$a^2 + b^2 = c.c_1 + c.c_2 = c.(c_1 + c_2) = c^2$$

V tomto dôkaze máme do činenia aspoň so štyrmi krokmi: **1**. podobnosť trojuholníkov vyjadríme pomocou pomeru čísel zodpovedajúcich ich stranám; **2**. tieto pomery upravíme podľa pytagorejského princípu, že súčin vonkajších členov pomeru je rovný súčinu jeho vnútorných členov; **3**. takto vzniklé identity sčítame a **4**. výsledok upravíme na známy tvar.

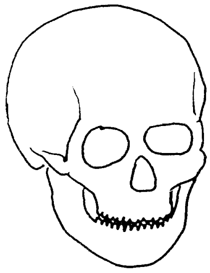
B. 2 Idealizácia tvaru

Zdá sa, že najzávažnejší rozdiel medzi egyptskou a gréckou matematikou spočíva v tom, ako chápali tvar.

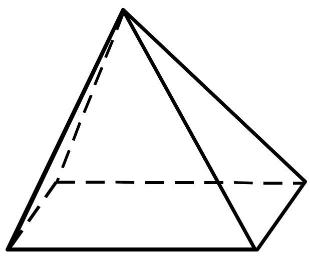
Egypťania vnímali tvar ako prirodzenú vlastnosť predmetov, kým pre Grékov bol tvar čímsi ideálnym. V čom je rozdiel? Tvar, tak ako sa s ním stretávame v prírode, je ***individuálny, neopakovateľný, jedinečný***. Každý človek má inú tvár, neexistujú dva úplne rovnaké kamene na pláži či dva rovnaké stromy v lese. Keď sa pozrieme podrobnejšie na dva obrázky, narysované na papieri, ich čiary sa líšia svojou hrúbkou. Body pri pohľade cez lupu odhalia rôzne obrysy. Tvary, ktoré sa skutočne vyskytujú v prírode vykazujú nesmierne bohatstvo a rozmanitosť. To je, ako tvaru rozumeli Egypťania. Vnímali ho ako fenomenálnu kvalitu, asi ako dnes vnímame chuť alebo vôňu.

Gréci priniesli úplne iný pohľad na tvar. Ono je síce pravda, že každý bod nakreslený na papieri je iný, ale to je iba dôsledok nerovnosti papiera, nehomogenity grafitu v ceruzke a nerovnomernosti sily, ktorou tlačíme ceruzku na papier. Ale to, čo chceme nakresliť, to, o čo nám pri kreslení ide, je ideálny bod, ktorý je len jeden. Ten nemá žiaden tvar, žiadnu veľkosť či obrysy. Individuálne rozdiely medzi jednotlivými kópiami toho istého geometrického útvaru sú preto len dôsledkom rušivého vplyvu látky (papiera, grafitu,...), ale všetky tieto obrázky znázorňujú ten istý geometrický tvar. Podobne ani dvaja maliari nedokážu namaľovať tú istú predlohu úplne rovnako, ale nikto kvôli odlišnostiam ich obrazov nespochybňuje existenciu jedinej predlohy, ktorú maľovali. Preto to, že rôzne geometrické obrázky znázorňujú ten istý objekt – napríklad bod – odlišne, nás nesmie viesť k záveru, že existujú rôzne body – okrúhle, elipsovité, štvorcové, obdĺžnikové,... Bod, nie obrázok bodu, ale skutočný geometrický bod, je len jeden. Teda Gréci považujú geometriu za náuku „o predlohách“ a nie za náuku „o obrázkoch“, čím bola pre Egypťanov. Geometriu pestujú ako vedu o ***ideálnych, dokonalých a univerzálnych predlohách prírodných tvarov***.

Čo to znamená ideálny tvar? Keď porovnáme grécku geometriu s egyptskou, tak jeden z rozdielov, ktoré si všimneme je, že niektoré postupy, pomocou ktorých Egypťania počítali objemy telies, sú nesprávne. Správne formuly našli až Gréci. Uvažujme však ľudskú lebku. Keby sme napísali vzorec pre jej objem, nikoho by neprekvapovalo, že táto formula je len približná. Nikto neočakáva, že by mohlo existovať čosi lepšie ako ***individuálna aproximatívna formula***. Ľudská lebka nemá ideálny tvar, je to prírodný útvar, preto niet dôvodu, aby pre jej objem existoval presný a všeobecný vzorec.



$\boldsymbol{V = ?}$



$\boldsymbol{V} = \frac{1}{3}Sh$

Je celkom možné, že z podobných dôvodov Egypťania nepredpokladali, že by mohlo existovať čosi lepšie pre výpočet objemu pyramíd, ako individuálne aproximatívne formuly. Až keď Gréci za reálnym tvarom pyramídy uvideli ideálnu formu ihlana, ku ktorej začali vzorec pre objem pyramídy vzťahovať, sa ukázalo, že postupy používané Egypťanmi boli zlé. Preto je možné, že postupy starých Egypťanov boli v poriadku. Nie v tom zmysle, že by boli správne, ale že správne byť ani nechceli, že kritérium správnosti, z hľadiska ktorého ich my dnes posudzujeme, menovite, že ich vzťahujeme na štvorboký ihlan, im bolo cudzie.

Idealizácia tvaru spočíva v schopnosti ***za reálnymi útvarmi vidieť ideálne geometrické objekty***, napríklad v pyramíde zahliadnuť ihlan. Tento posun výstižne opísal Petr Vopěnka:

> „Geometer má pred sebou list papiera pokreslený čiarami rozmanitých tvarov, rovnými aj krivými, navzájom poprepletanými a pretínajúcimi sa v rôznych bodoch. Jeho zrak spočinul na obrázku, jeho pohľad však prenikol cez obrázok, von z reálneho sveta do sveta geometrického. Tak napríklad za rovnou čiarou uvidel geometrickú úsečku, uvidel ju v jej úplnej čistote a spolu s ňou uvidel dokonalú priamosť. Od okamihu tohto prehliadnutia je pre neho navždy úsečka úsečkou geometrickou, a nie čiarou narysovanou podľa pravítka.“ (Vopěnka 2000, s. 23)

B. 3 Dejiny vied z hľadiska idealizácií

Každé historické obdobie má svoj ***rámec ideálnych objektov***, ktorému sa prisudzuje status pravej skutočnosti a ktorého metódy dostávajú punc vedeckosti. Tak pre kultúru starého Egypta to bol rámec kalkulatívnych idealít. Preto aj výpočet objemu pyramídy uskutočňovali na báze tohto rámca. Hľadali kalkulatívny postup dávajúci dostatočne presné výsledky. My, poučení Grékmi, najprv nahradíme reálnu pyramídu ideálnym štvorbokým ihlanom a počítame až objem tohto ideálneho telesa. Výpočet objemu pyramídy považujeme za problém *teoretickej geometrie* a nie za *počtársku úlohu*, akou bol pre Egypťanov. Pre nás existuje zásadný rozdiel medzi pravidlom pre výpočet druhej odmocniny z prirodzeného čísla a počítaním objemu pyramídy. Pre Egypťanov takýto rozdiel existovať nemusel.

Pre grécku kultúru bol paradigmatickým rámcom rámec teoretických idealít. Jeho ideality v podobe platónskych ideí alebo aristotelovských foriem sa stávajú tou pravou skutočnosťou. Preto Gréci tematizovali aj fyzikálne javy na základe tohto rámca. Aristotelovu fyziku možno považovať za fyziku robenú prostriedkami formálneho rámca matematiky, za pokus zmocniť sa pohybu pomocou teoretických idealít. Aristotelova teória pohybu je totiž čisto geometrická. Nehovorí o tom, ako pohyb prebieha, ale kam smeruje. Charakter pohybu je teda daný geometrickým usporiadaním univerza.

Galileovská ruptúra prináša rámec dynamických idealít, ktorý sa stáva paradigmatickým a vytláča matematiku do pozície jazyka vedy. Paradigmatickou vedou sa stáva fyzika a jej ideality ako tuhé telesá, sily,... sa stávajú tou „pravou skutočnosťou“. Preto aj biológia, psychológia či sociológia sa usilujú uchopiť svoj predmet pomocou dynamických idealít. Tak biológia hovorí o fyziologických *procesoch,* o imunitnej *reakcii* či o *zákonoch* evolúcie. Podobne psychológia hovorí o *procese* vnímania, o emocionálnej *reakcii* na podnet alebo o *zákonitostiach* vývinu osobnosti. Sociológia zas opisuje *procesy* socializácie,... Asi najkrikľavejšou ilustráciou toho sú IQ testy. Pomocou týchto testov sa niektorí psychológovia usilujú *merať* inteligenciu. To, že chýba porozumenie pre to, čo inteligencia vlastne je, im nevadí. Veď keď merajú, tak robia vedu. Tieto disciplíny sú tak analógiou gréckej fyziky alebo egyptskej geometrie, teda pokusmi vtesnať život, psychiku alebo spoločnosť do rámca fyziky. V tomto zmysle možno hovoriť o

predparadigmatickom štádiu príslušných disciplín.

	PRÍRODNÉ FENOMÉNY	**IDEÁLNE OBJEKTY**
PRÍRODNÉ NÁRODY	počet, tvar, pohyb, život, vedomie	
EGYPŤANIA	tvar, pohyb, život, vedomie	počet
GRÉCI	pohyb, život, vedomie	počet, tvar
MY	život, vedonie	počet, tvar, pohyb
?????	vedonie	počet, tvar, pohyb, život

Tabuľka ukazuje, že existujú štyri typy kultúr, líšiace sa v tom, kde v tej ktorej kultúre prebieha ***hranica medzi prirodzeným a ideálnym***. Samozrejme, keď sme napísali, že v Grécku sa tvar stal ideálnou formou, to neznamená, že sa ňou stali všetky tvary. Tvar lebky naďalej ostáva v oblasti prírodných tvarov, podobne ako ním naveky ostane počet zrniek piesku na Sahare alebo pohyb vody v zurčiacej horskej bystrine. Vždy budú existovať javy, ktoré pre svoju komplexnosť nie je možné formálne uchopiť. Idealizácia vyjadruje tendenciu kultúry, zachytáva základný spôsob, ako sa kultúra zmocňuje sveta, alebo verí, že sa ho zmocňuje (ako ukazujú postupy na výpočet objemu pyramídy v Egypte, Aristotelova teória pohybu v antickom Grécku alebo IQ-testy v súčasnosti).

Istým problémom egyptskej a babylonskej matematiky bola ***existencia nekompatibilných metód*** výpočtu tej istej úlohy, napríklad objemu zrezaného ihlana. Kalkulatívny prístup neumožňuje vybrať si medzi postupmi vedúcimi k navzájom odlišným výsledkom. ***Keďže neexistuje argument, nastupuje autorita***. Jedna (je jedno ktorá) metóda sa vyberie a prehlási sa za jedinú správnu. Z moci úradnej sa potom všetci prinútia, aby ju používali. Keď všetci používajú rovnakú (hoci aj nesprávnu) metódu, nedochádza k sporom a v komunite zavládne spokojnosť. Tento prístup dodnes prevláda v inžinierstve, v jazyku a v armáde.

Gréci našli spôsob, ako možno problém nekompatibilných metód vyriešiť (a nielen ho autoritatívne odstrániť). Objavili teoretickú vedu. Vytvorili deduktívnu teóriu, v ktorej ***definovali, čo to je objem, nezávisle od toho, ako sa počíta***. Potom mohli porovnávať výsledky rôznych výpočtov s týmto teoreticky definovaným objemom a takto rozhodnúť, ktorý je správny. Ukázalo sa, že niektoré postupy používané Egypťanmi boli korektné, iné nie. Základom teoretickej metódy je snaha explicitne deklarovať intuitívne rozhodnutia v podobe axióm, a potom deduktívne kontrolovať konzistentnosť teórie ako celku. Takto sa zamedzí výskytu nekompatibilných spôsobov počítania. Ako správne sa prijímajú iba také postupy, o ktorých sa podarí dokázať, že správne aj naozaj sú. Konsenzus sa takto dosahuje nie autoritou, ale argumentom.

Nech už je teoretická metóda akokoľvek príťažlivá, aj ona trpí problémom nekompatibility. Jediný rozdiel je v tom, že už nejde o nekompatibilitu izolovaných výsledkov, ako tomu bolo u Egypťanov, ale o akúsi globálnu nekompatibilitu teórií ako celkov. Totiž pre tú istú oblasť je možné navrhnúť niekoľko alternatívnych teoretických rekonštrukcií, ktoré si môžu navzájom odporovať. Prvýkrát sa takáto nekompatibilita vyskytla v astronómii medzi ***Ptolemaiovým a Kopernikovým systémom***. Teoretická metóda umožňuje rozhodnúť medzi alternatívnymi teóriami iba vtedy, keď je jedna z nich nekonzistentná. Ale kopernikovská astronómia sporná nebola, alebo aspoň sa nikomu nepodarilo spor nájsť. Podobne ako egyptská kalkulatívna veda neumožňovala rozhodnúť medzi ***rôznymi výsledkami***, ku ktorým ju priviedli alternatívne postupy počítania, tak grécka deduktívna metóda neumožňuje rozhodnúť medzi ***rôznymi axiomatizáciami*** toho istého predmetu. Niekedy sa stáva, že rôzne axiomatizácie sú rovnako presvedčivé.

Kríza teoretickej vedy vznikla v astronómii, keď bola ako alternatíva ku geocentrickej teórii postavená teória heliocentrická. Situácia tu pripomína bod, v ktorom sa zrodila antická veda. Je tu však jeden rozdiel. Kým prv stáli proti sebe postupy, ktoré z rovnakých predpokladov dospeli k rôznym výsledkom, teraz stoja proti sebe alternatívne teórie, ktoré sa líšia sa v predpokladoch. Galileiho riešenie spočíva v tom, že ***treba opustiť úlohu nezúčastneného diváka, ktorú zaujímal teoretik, a vstúpiť do priameho činného kontaktu so skutočnosťou. Treba začať experimentovať***.

Literatúra

Hejný, M. (1986): Prológ. In: Znám (ed. 1986), s. 11 - 83.

Kolman, A. (1968): *Dějiny matematiky v starověku*. Academia Praha.

Vopěnka, P. (2000): *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Práh, Praha.

Znám, Š. (ed. 1986): *Pohľad do dejín matematiky*. Alfa, Bratislava.