22a) Jak výpočet upravit

- Gauss jasně chápal, že problém předchozího pokusu o odhad vzdálenosti ρ_2 spočívá v aproximaci plochy trojúhelníku n_{13} plochou výseče A_{13}
- ukážeme si proč
- v rovnici $$a\rho_2 = -b + \frac{cn_{23} + dn_{12}}{n_{13}} = -b + \frac{cn_{23} + dn_{12}}{n_{12} + n_{23}} \cdot \frac{n_{12} + n_{23}}{n_{13}}$$

nahrazujeme $$a\overline{\rho_2} = -b + \frac{cA_{23} + dA_{12}}{A_{13}} = -b + \frac{cA_{23} + dA_{12}}{A_{12} + A_{23}} \cdot \frac{A_{12} + A_{23}}{A_{13}}$$

rozdíl $$\frac{cA_{23} + dA_{12}}{A_{12} + A_{23}} - \frac{cn_{23} + dn_{12}}{n_{12} + n_{23}} = \dots$$

22b)

$$= \cdots\cdots = \frac{(d-c)\,A_{12}A_{23}\left(\frac{n_{23}}{A_{23}} - \frac{n_{12}}{A_{12}}\right)}{(A_{12}+A_{23})\left(\frac{n_{12}}{A_{12}}\cdot A_{12} + \frac{n_{23}}{A_{23}}\cdot A_{23}\right)} =$$

$$= \frac{(d-c)\,A_{12}A_{23}\left(\frac{1}{\eta_{23}} - \frac{1}{\eta_{12}}\right)}{(A_{12}+A_{23})\left(\frac{1}{\eta_{12}}A_{12} + \frac{1}{\eta_{23}}A_{23}\right)} =$$

$$= \frac{\overset{2}{(d-c)}\,\overset{1}{A_{12}}\,\overset{1}{A_{23}}\,\overbrace{(\eta_{12}-\eta_{23})}^{2(3)}}{\underbrace{(A_{12}+A_{23})}_{1}\underbrace{(\eta_{23}A_{12}+\eta_{12}A_{23})}_{1}}$$ má řád 4 nebo 5

Jmenovatel má řád 2 (součin řádů 1), součin $(d-c)A_{12}A_{23}$ má řád 4 a rozdíl $\eta_{12}-\eta_{23}$ má řád 2, v případě $\varepsilon=1$ (t_2 ve středu intervalu mezi t_1 a t_3) má řád 3

22c) rozdíl v odhadu

$$a\left(\bar{\rho}_2(k) - \rho_2\right) = \frac{cA_{23} + dA_{12}}{A_{12} + A_{23}} \cdot \frac{A_{12} + A_{23}}{A_{13}} - \frac{cn_{23} + dn_{12}}{n_{12} + n_{23}} \cdot \frac{n_{12} + n_{13}}{n_{13}}$$

upravíme do tvaru

$$\left(\frac{dA_{12} + cA_{23}}{A_{12} + A_{23}} - \frac{dn_{12} + cn_{23}}{n_{12} + n_{13}}\right) \frac{n_{12} + n_{23}}{n_{13}} +$$

$$\frac{dA_{12} + cA_{23}}{A_{12} + A_{23}} \left(\underbrace{\frac{A_{12} + A_{23}}{A_{13}}}_{1} - \frac{n_{12} + n_{13}}{n_{13}}\right)$$

V prvním součinu je závorka řádu 4(5), člen $\frac{n_{12} + n_{23}}{n_{13}}$ známe přesně. V druhém členu je zlomek řádu 1 a řád závorky najdeme z vyjádření se str. 16e

22 d) $$n_{12} - n_{13} + n_{23} = \frac{2k(t_2-t_1)\cdot k(t_3-t_2)\, n_{13}}{\eta_{12}\cdot\eta_{23}\cdot r_1 r_2 r_3 \cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}},$$

vydělíme n_{13} a upravíme

$$\frac{n_{12}+n_{23}}{n_{13}} = 1 + \frac{2k\overbrace{(t_2-t_1)}^{h}\cdot k\overbrace{(t_3-t_2)}^{\varepsilon h}}{\eta_{12}\,\eta_{23}\, r_1 r_2 r_3 \cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}$$

Zlomek je řádu 2, neboť jmenovatel má pro $h \to 0$ limitu r_2^3.

Druhý člen ve výrazu pro $a(\overline{\rho}_2(h) - \rho_2)$ na str. 22 d) má tedy řád 3 a po vydělení determinantem $a(h)$ řádu 3 dostaneme řád 0, čili konstantní nemalou chybu v odhadu

22e) Výpočet na str. 22c) ale také okamžitě ukazuje nápravu. Druhého členu se zbavíme tím, že ve vzorci

$$a\rho_2 = -b + \frac{cn_{23} + dn_{12}}{n_{12} + n_{23}} \cdot \frac{n_{12} + n_{23}}{n_{13}}$$

nebudeme druhý zlomek nahrazovat nepřesnou aproximací $\frac{A_{12} + A_{23}}{A_{13}} = 1$, ale ponechme jeho vypočítanou hodnotu ze str. 22d). Čili aproximaci $\overline{\rho}_2(h)$ budeme počítat z rovnice $a\overline{\rho}_2(h) = -b + \frac{cA_{23} + dA_{12}}{A_{12} + A_{23}} \cdot \frac{n_{12} + n_{23}}{n_{13}}$

- Výpočet odhadu ρ_2 pak bude s chybou

$$a\left(\overline{\rho}_2(h) - \rho_2\right) = \left(\frac{dA_{12} + cA_{23}}{A_{12} + A_{23}} - \frac{dn_{12} + cn_{23}}{n_{12} + n_{13}}\right) \frac{n_{12} + n_{13}}{n_{13}}$$

řádu

4(5)