



# Linearizace, lineární algebra a diferenciální rovnice v modelování materiálů

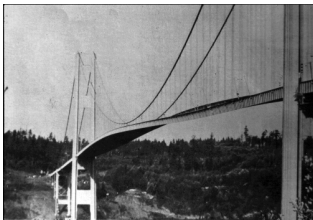
Josef Málek

Matematický ústav UK

3. dubna 2019

- Padající mosty a rezonance
- Rezonance v teorii lineárních obyčejných diferenciálních rovnic
- Jiné přístupy k oscilacím
- Padající domy a rezonance

# Padající mosty



⋮ \*

Tacoma Narrows Bridge  
(1940)



⋮ \*

Millennium Bridge v  
Londýně (2000)



# Visutý most v Tacoma, Washington

- 23.11.1938 – zahájení stavby
- 1.7.1940 – most otevřen pro dopravu
- 7.11.1940 – kolaps mostu

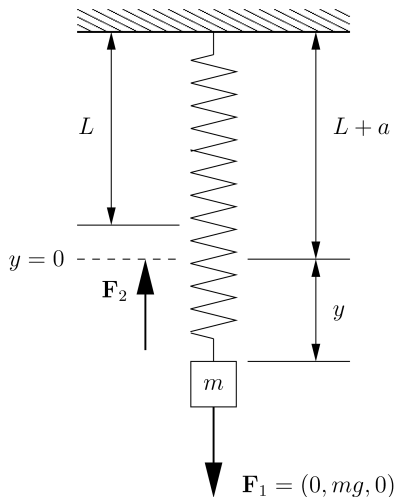
**Možné vysvětlení:** Vnější periodické oscilace ve frekvenci vlastních kmitočtů mostu

- Ihned po otevření způsoboval vítr proudící přes most velké vibrace v svislém směru vzhledem k vozovce → atrakce
- Evakuovaný most vykazoval velké vibrace a odklony až došlo k zlomu celé desky

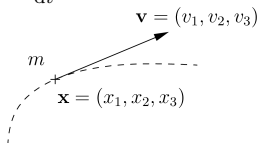
**von Kármán:** Vítr proudící přes most rozdělen do vírů pod a nad mostem a vyvolávající svislou sílu působící na most. Tato nová síla způsobuje oscilace.

**jiní:** Kmitání s **vlastní** frekvencí mostu.

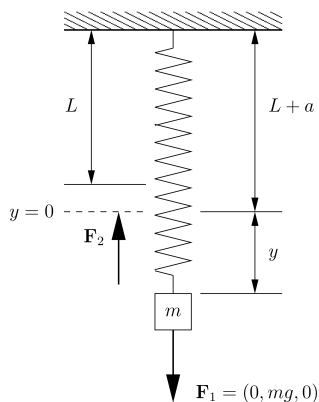
# System pružina-závaží/Popis a předpoklady



- Tělesa (závaží) modelovány jako hmotné body
- Tři Newtonovy postuláty:
  - $\mathbf{F} = \mathbf{0} \implies$  rovnoměrný přímočarý pohyb
  - $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$
- Akce vyvolá reakci  $-\mathbf{F}$
- Pohyb jen ve svislém směru
- Hmotnost pružiny zanedbána



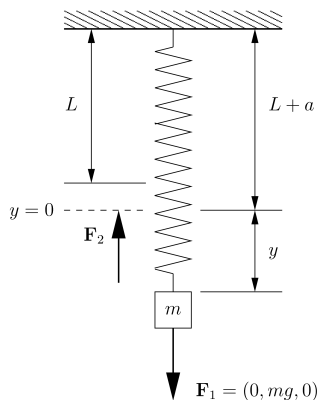
# Systém pružina-závaží/Předpoklady na materiály



- Lineární pružina:  
 $\mathbf{F}_2 = (0, -k(y + a), 0) \quad (k > 0)$
- Odpor prostředí zanedbatelný

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \quad \begin{array}{l} y(0) = y_0 \\ \frac{dy}{dt}(0) = y_1 \end{array}$$

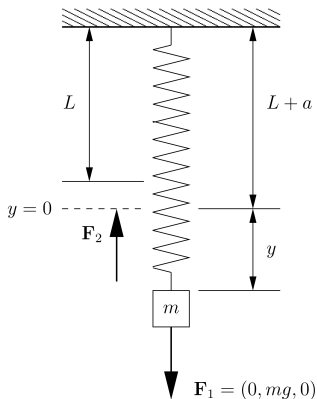
# Systém pružina-závaží/Předpoklady na materiály



- Lineární pružina:  
 $\mathbf{F}_2 = (0, -k(y + a), 0) \quad (k > 0)$
- Odpor prostředí lineární:  
 $\mathbf{F}_3 = \left(0, -b \frac{dy}{dt}, 0\right) \quad (b > 0)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0 \quad \begin{array}{l} y(0) = y_0 \\ \frac{dy}{dt}(0) = y_1 \end{array}$$

# System pružina-závaží/Předpoklady na materiály



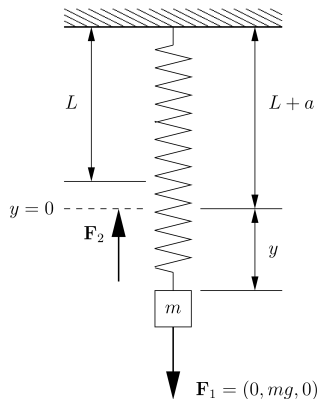
- Lineární pružina:  
 $\mathbf{F}_2 = (0, -k(y + a), 0) \quad (k > 0)$
- Odpor prostředí nelineární:  
 $\mathbf{F}_3 = \left(0, h \left(\frac{dy}{dt}\right), 0\right)$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + h \left(\frac{dy}{dt}\right) + ky = 0 \quad \begin{array}{l} y(0) = y_0 \\ \frac{dy}{dt}(0) = y_1 \end{array}$$



# Systém pružina-závaží/Předpoklady na materiály

- Nelineární pružina:  $\mathbf{F}_2 = (0, g(y + a), 0)$
- Odpor prostředí zanedbán, lineární či nelineární



$$\frac{d^2y}{dt^2} + h\left(\frac{dy}{dt}\right) + g(y) = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(y, \frac{dy}{dt}\right)$$

- Volný pád:  $\mathbf{F}_2 = (0, 0, 0)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0 \iff \frac{dv}{dt} + h(v) = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = f(v) \quad v(0) = v_0$$

# System pružina-závaží/Matematická konsistence modelů

- Zjednodušující předpoklady  $\implies$  velice hrubá aproximace skutečnosti
- Nezávisle na přesnosti aproximace požadujeme **matematickou konsistenci modelů**: řešení
  - **existence** pro libovolná data a pro libovolný časový interval
  - **jednoznačnost**
  - **spojitá závislost řešení na datech**
  - **omezenost rychlosti**
  - **asymptotické vlastnosti řešení**.
- Matematická konsistence modelů mechaniky nestlačitelných tekutin
- Mechanika tekutin vychází z klasické mechaniky

- Model pro volný pád: pro rychlost rovnice 1. řádu
- Matematická konsistence pro obecný systém  $\frac{dv}{dt} = f(v)$ ,  
 $v(0) = v_0$ .

Protipříklady:

- existence/omezenost pro libovolný časový interval –  $f(v) = v^2$
- jednoznačnost –  $f(v) = v^{2/3}$
- $m \frac{dv}{dt} + bv = f \implies \frac{m}{2} \frac{d}{dt} |v|^2 + \frac{b}{m} |v|^2 = f v \implies$

$$|v(t)|^2 \leq |v_0|^2 e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{f^2}{b^2} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \quad \text{pro } t > 0$$

- Odvozené modely mají omezenou roli, kdy jsou užitečné

- $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin 2t$ ,  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = 0 \implies$

$$x(t) = \frac{2}{3} \sin t + x_0 \cos t - \frac{1}{3} \sin 2t$$

- $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin t \implies x(t) = ???$

- $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin(1 + \varepsilon)t$ ,  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = 0 \implies$

$$x_\varepsilon(t) = x_0 \cos t + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon(2 + \varepsilon)} \sin t - \frac{1}{\varepsilon(2 + \varepsilon)} \sin(1 + \varepsilon)t$$

- 

$$x_0(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = x_0 \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$$

# K Tacomskému mostu

Rezonance je **lineární** jev, musí dojít k synchronizaci kmitů **vnějších** a **vlastních** (mostu). Navíc, není žádné významné tlumení. Možná není **důvodem** kolapsu.

## Lazer & McKenna (1990)

Uvažujme vertikální lano, na kterém most visí

$$y'' + f(y) = g(t) + c, \quad f(y) = \begin{cases} ky, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

$c$  interakce mezi mostem a působící silou

Pro  $k \gg 1$  existují vícenásobná řešení. Velké amplitudy existují i při tlumení.

Výzkum není uzavřen, není tedy úplně jasné, jaký je správný úplný model pro visuté mosty, role rezonance v tomto jevu však bude malá.

# K tančícímu Volgogradskému mostu

- 1999 – potřeba vybudovat most
- 20.5.2010 – oscilace ve svislých směrech ( $\pm 40$  cm)

**Maurer AG:** utlumení mostu (tlumiče, senzory)

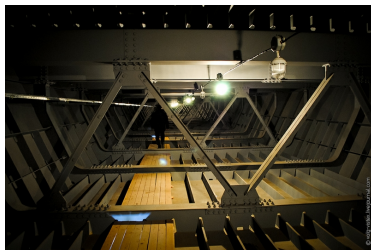
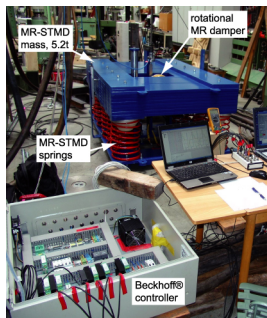
12 adaptivních tlumičů rozděleno po 4 na 3 pole

- zklidnit most obecně při normálních podmínkách
- snížit periodu oscilací
- snížit mostní výchylku z  $\pm 40$  cm na 40-80 mm

Real-time **adaptivita:**

- tlumiče postaveny na vibrace mostu, ty se však mění v závislosti na teplotě, únavě materiálu (0.41-0.68 Hz)
- reakce 50-100 msec.
- magnetoreologická tekutina

# K tančícímu Volgogradskému mostu



- Elektroeologické tekutiny (tlumiče, ochranné vesty, ...)
- Feromagnetické tekutiny





**Figure: \***

Zemětřesení v prefektuře Niigata (1964)

- Simulace chování konstrukce při zemětřesení

# Model vícepatrové budovy při zemětřesení

$m_n$	$k_{n-1}$
$m_{n-1}$	$k_{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$
$m_2$	$k_1$
$m_1$	$k_0$
země	

Síla působící mezi sousedními patry:

$$F = k_i (x_{i+1} - x_i)$$

Pohybové rovnice:

$$m_1 x_1'' = -k_0 x_1 + k_1 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 x_2'' = -k_1 (x_2 - x_1) + k_2 (x_3 - x_2)$$

$$\vdots$$

$$m_n x_n'' = -k_{n-1} (x_n - x_{n-1})$$

$$\begin{array}{c}
 \vdots * \\
 \text{Patra budovy} \\
 k_i (x_{i+1} - x_i) \begin{array}{c} m_{i+1} \\ m_i \\ m_{i-1} \end{array} k_i (x_{i+1} - x_i) \\
 \vdots *
 \end{array}$$

Síly na  $i$ -tém patře

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -(k_0 + k_1) & k_1 & 0 & \dots \\ k_1 & -(k_1 + k_2) & k_2 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{X}'' = \mathbf{K}\mathbf{X} \iff \mathbf{X}'' = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{X}$$

# Příklad 10ti patrové budovy

- $m_i = 10\,000\text{ kg}$ ,  $k_i = 5\,000\text{ kg/s}^2$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

vlastní čísla  $\lambda_i$

frekvence  $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$

periody  $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$

$\lambda_i$	-1.96	-1.83	-1.62	-1.36	-1.07	-0.78	-0.50	-0.27	-0.10	-0.01
$\omega_i$	1.39	1.35	1.27	1.17	1.04	0.88	0.71	0.52	0.31	0.11
$T_i$	4.49	4.65	4.93	5.38	6.06	7.13	8.89	12.2	19.9	59.5

# Jednoduché řešení v prostředí Matlab

```
>> n=10;
>> A = -diag(ones(n,1)) + 0.5*diag(ones(n-1,1),1) + 0.5*diag(ones(n-1,1),-1); A(n,n)=-0.5
A =
-1.0000    0.5000         0         0         0         0         0         0         0         0
 0.5000   -1.0000    0.5000         0         0         0         0         0         0         0
         0    0.5000   -1.0000    0.5000         0         0         0         0         0         0
         0         0    0.5000   -1.0000    0.5000         0         0         0         0         0
         0         0         0    0.5000   -1.0000    0.5000         0         0         0         0
         0         0         0         0    0.5000   -1.0000    0.5000         0         0         0
         0         0         0         0         0    0.5000   -1.0000    0.5000         0         0
         0         0         0         0         0         0    0.5000   -1.0000    0.5000         0
         0         0         0         0         0         0         0    0.5000   -1.0000    0.5000
         0         0         0         0         0         0         0         0    0.5000   -0.5000

>> eig(A)
ans =
-1.9556   -1.8262   -1.6235   -1.3653   -1.0747   -0.7775   -0.5000   -0.2669   -0.0990   -0.0112

>> sqrt(-eig(A))
ans =
 1.3984   1.3514   1.2742   1.1685   1.0367   0.8817   0.7071   0.5167   0.3147   0.1057

>> 2*pi./sqrt(-eig(A))
ans =
 4.4931   4.6494   4.9312   5.3772   6.0608   7.1258   8.8858   12.1609   19.9661   59.4524
```