Geometrická pravděpodobnost

Willy Svoboda

15. září 2019

1 Úvod

Již na středních školách se učíme nejjednodušší případy situací, ve kterých lze počítat pravděpodobnost pomocí klasické definice. Typické případy jsou hody kostek, výběr karet a nebo obecně výběr podmnožiny z množiny a k nim související jevy typu „Jaká je pravděpodobnost toho, že nám padnou dvě šestky při hodu 3 kostek?“ nebo „Pravděpodobnost vytáhnutí 4 karet stejné barvy, když máme 4 barvy v balíčku 32 karet?“.

V těchto případech není ale nijak obtížné vyjádřit velikost daných množin. Na střední škole lze pak slyšet heslo „počet příznivých výsledků lomeno celkový počet všech případů“. Pak ale jsou situace, kde velikost množiny všech případů nemůžeme jednoduše vypočítat, natož danou podmnožinu. Můžeme to vidět u následujícího příkladu.

Máme dvě reálná čísla x a y. Obě dvě nabývají libovolné hodnoty z intervalu [0,100]. Jaká je pravděpodobnost, že součet těchto čísel bude alespoň 50 a zároveň alespoň jedna z druhých mocnin čísel x, y nebude menší než 900?

Kdyby obě čísla by byla přirozená, tak by bylo možné to spočítat pomocí klasické definice pravděpodobnosti, jakmile by se došlo k spočtení příznivých jevů. Problém ale pro použití klasické definice pravděpodobnosti u reálných čísel je v určení počtu všech případů, neboť v našem intervalu leží nekonečně mnoho reálných čísel. Z tohoto důvodu se zavádí geometrická pravděpodobnost která doplňuje tu klasickou definici (neboť ta neumí počítat s nekonečně mnoha případy, zatímco ta geometrická už ano) a právě o ní bude tato práce, která bude psána tak, aby jí porozuměl i student střední školy (vyjma 4. části „Stanovení čísla π metodou Monte Carlo“).

2 Definice

Vzhledem k následujícím částem této práce nám stačí zjednodušená verze geometrické definice pravděpodobnosti zabývající se pouze případem, kdy pracujeme s úsečkou nebo rovinným obrazcem. Tato definice je ze zdroje [1]

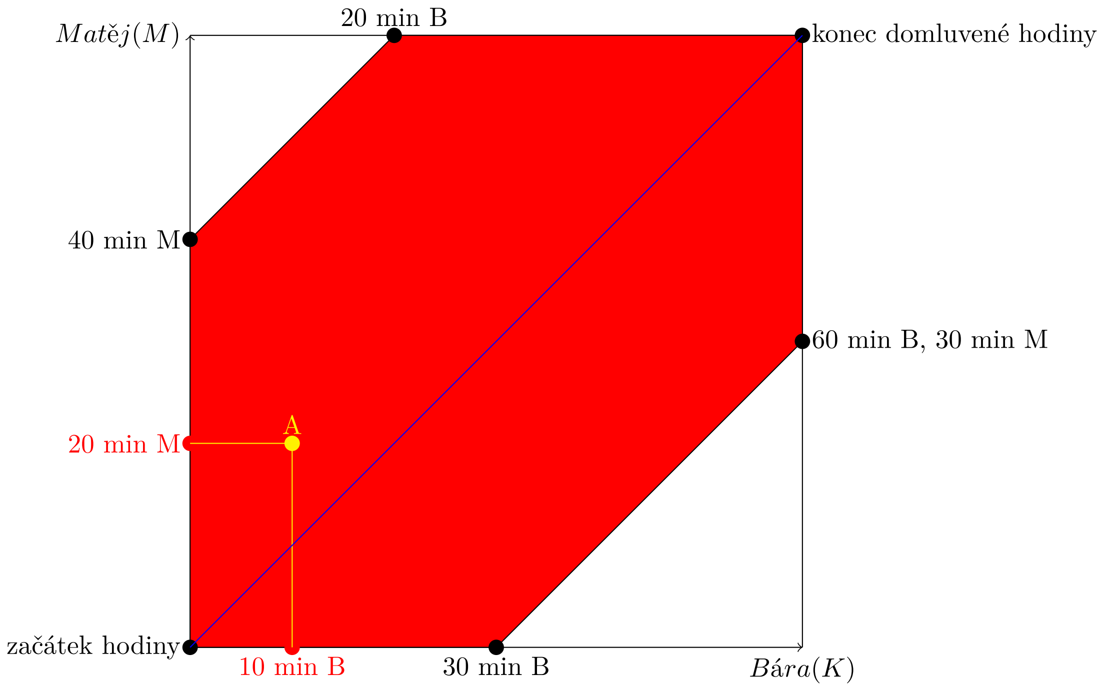
Geometrická definice pravděpodobnosti: „*Mějme úsečku (rovinný obrazec) s délkou l (obsahem S), která představuje celý pravděpodobnostní prostor. Pravděpodobnost, že nastane jev reprezentovaný částí úsečky (obrazce) s délkou d (obsahem T) pak určíme jako d/l (T/S).*“

3 Příklady

3.1 Rande

Dříve než se dostaneme k příkladu zmíněném v úvodu, ilustrujeme geometrickou pravděpodobnost na jednodušším příkladě, jednom z nejznámějších pro tuto oblast matematiky. Představme si dvě osoby, které si domluví rande a mají se sejít během určité hodiny. Jen zapomenou určit, kdy přesně mají přijít. Předpokládejme, že každý okamžik z dané hodiny může být příchodem jednoho z nich stejně pravděpodobně jako jakýkoliv jiný okamžik v této hodině. Dále příchod jednoho je nezávislý na příchodu toho druhého.

Nyní domluvme konkrétní údaje. Jedna osoba se jmenuje Bára, druhá je Matěj. Bára je ochotná počkat na Matěje 40 minut, Matěj není tak trpělivý jako Bára a počká jen třicet minut. Ani jeden z nich neupřednostňuje konkrétní čas příchodu. Situaci vystihuje následující obrázek. Čas příchodu Báry je vyznačen na vodorovné ose, na levém okraji je začátek domluvené hodiny, na pravém nejzazší okamžik možného příchodu (není to přesně 60 minut od počátku dané hodiny, ale limitně se k tomuto číslu přibližujeme a geometricky je jedna úsečka v tomto dvojrozměrném útvaru zanedbatelná, můžeme jí vnímat jako ohraničení množiny všech případů). Obdobně příchod Matěje je vyznačen na svislé ose. Začátek hodiny je na dolním okraji, na horním konec domluvené hodiny.

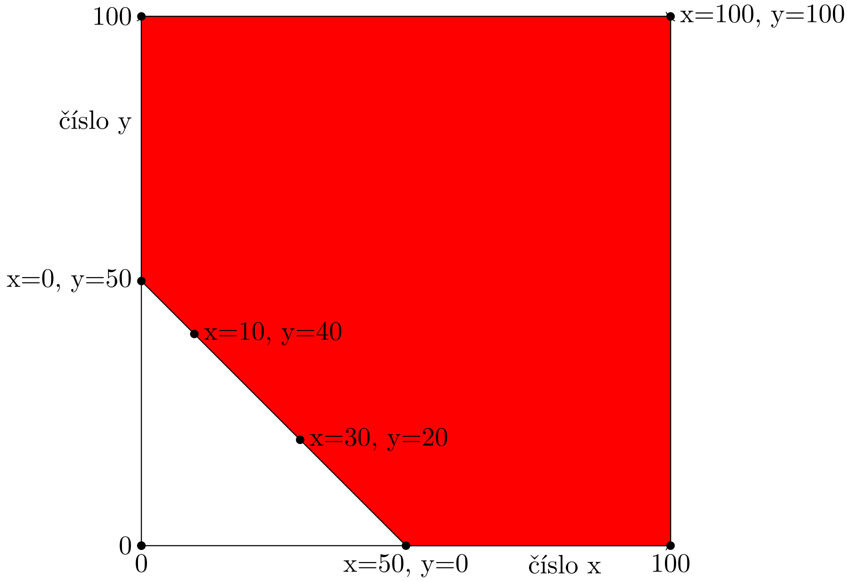


Každý bod části roviny vymezené začátkem a koncem domluvené hodiny na obou osách představuje jednu konkrétní situaci. X-ová souřadnice představuje příchod Báry, y-ová příchod Matěje. Například bod A představuje situaci, kdy Bára přijde 10 minut po začátku hodiny, Matěj po 20 minutách. Modrá úsečka představuje diagonálu znázorňující situaci, kdy oba dva přijdou přesně ve stejný okamžik. Pokud se jeden z nich zpozdí, tak ten druhý má určitou časovou rezervu, než ten druhý odejde. Po příchodu Matěje má Bára 30 minut, než Matěj odejde (pokud dříve neskončí domluvená hodina). Na obrázku to vnímáme jako množinu bodů mající nejvýše vzdálenost představující 30 minut od diagonály v kladném směru osy x (vodorovná osa pojmenovaná jako příchod Báry), to znamená doprava. Obdobně jako když přijde Bára dříve, která ale jako ta trpělivější počká delší dobu. Všechny body splňující naše zadání tvoří množinu všech výsledků, která je vybarvená červeně na našem obrázku. Obsah tohoto útvaru ale už umíme snadno spočítat. Můžeme vybrat libovolné jednotky času, ale jak pro čitatele, tak pro jemnovatele musíme vybrat stejnou jednotku! My si vybereme minuty a hledaná pravděpodobnost je $P = \frac{60^2 - \frac{30^2}{2} - \frac{20^2}{2}}{60^2} = \frac{2950}{3600} = 0,81944$ (pro středoškolské studenty: výsledek lze převést na procenta vynásobením 100, tedy tato pravděpodobnost je zhruba 82%).

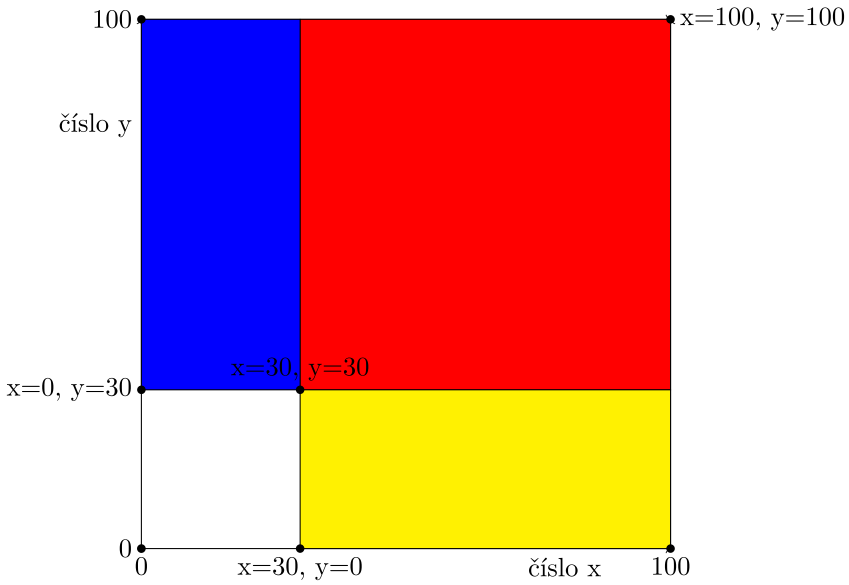
3.2 Příklad z úvodu

Vraťme se k příkladu z úvodu. Zadání bylo: Máme dvě reálná čísla x a y. Obě dvě nabývají libovolné hodnoty z intervalu [0,100]. Jaká je pravděpodobnost, že součet těchto čísel bude alespoň 50 a zároveň alespoň jedna z druhých mocnin čísel x, y nebude menší než 900?

Nejdříve si ukážeme, jak by situace vypadala pro první jev, tedy součet je alespoň 50.

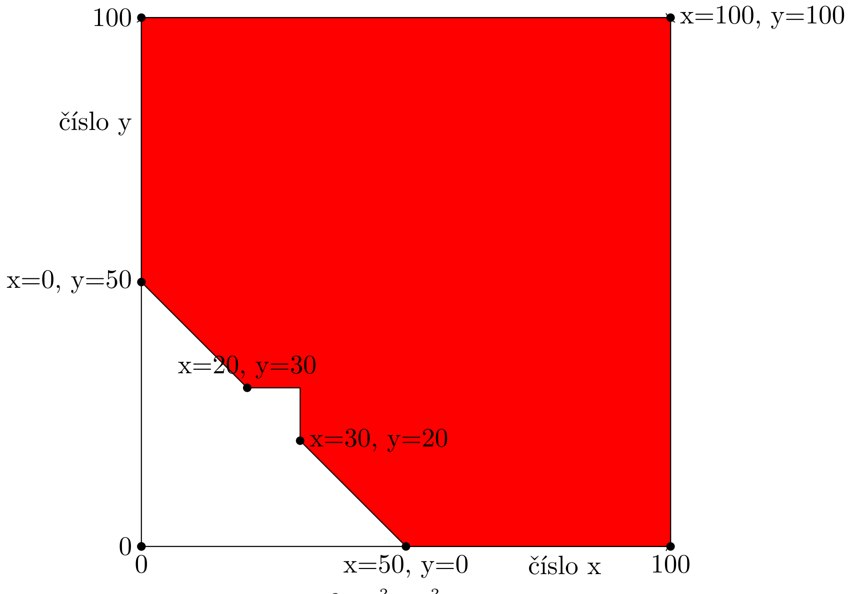


Nyní si ukážeme, jak by to vypadalo pro druhý jev, to znamená alespoň jedna z druhých mocnin čísel x, y je větší nebo rovna 900.



Modrá oblast je pro případy, kdy je jen druhá mocnina y větší nebo rovna 900, žlutá oblast jsou naopak jenom případy, kdy jenom druhá mocnina x je větší rovna 900 a konečně červená oblast zaznamenává případ, kdy obě mocniny jsou větší nebo rovny 900.

Už můžeme oba dva jevy dát dohromady a ukázat si výslednou množinu všech výsledků.

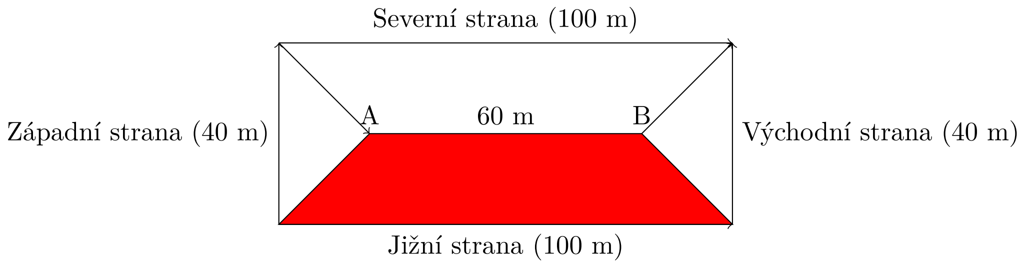


Pravděpodonost je $P = \frac{100^2 - \frac{50^2}{2} - \frac{10^2}{2}}{100^2} = \frac{8700}{10000} = 0,87$. Další příklady už nebudeme tak podrobně rozebírat jako předchozí dva, kde na prvním příkladě jsme si ukazovali, jak vlastně s geometrickou pravděpodobností pracovat a na druhém jsme demonstrovali případ více jevů najednou a jejich výsledné složení jako průnik.

3.3 Farma u Hrbáče

Tento i následující příklad jsou ze zdroje [2]

Farma „U Hrbáče“ každou neděli hostí několik přátel farmáře. Protože mají zalíbení v hazardních hrách, každou neděli se sázejí ke které straně ohrady bude v určitou hodinu nejblíže farmářův kůň. Ohrada má postavený plot přesně podle světových stran a je obdelníkového tvaru, východní a západní strana ohrady měří 40 metrů, severní a jižní 100 metrů. Sázení probíhá s dostatečným časovým předstihem, aby se nevyužívala informace o aktuální poloze farmářova koně a kůň tak měl dostatek času změnit polohu. Předpokládáme tedy, že žádné místo není preferované a na každém se může nacházet se stejnou pravděpodobností jako na každém jiném. Sázející se sází, zda se v daném čase bude nacházet nejblíže právě k jižní straně ohrady. (pzn. předpokládáme, že se kůň umí postavit přímo až k okraji ohrady, tedy namísto těžiště jeho těla si určíme nahrazující bod za tělo, např. bod v předním kopytě).

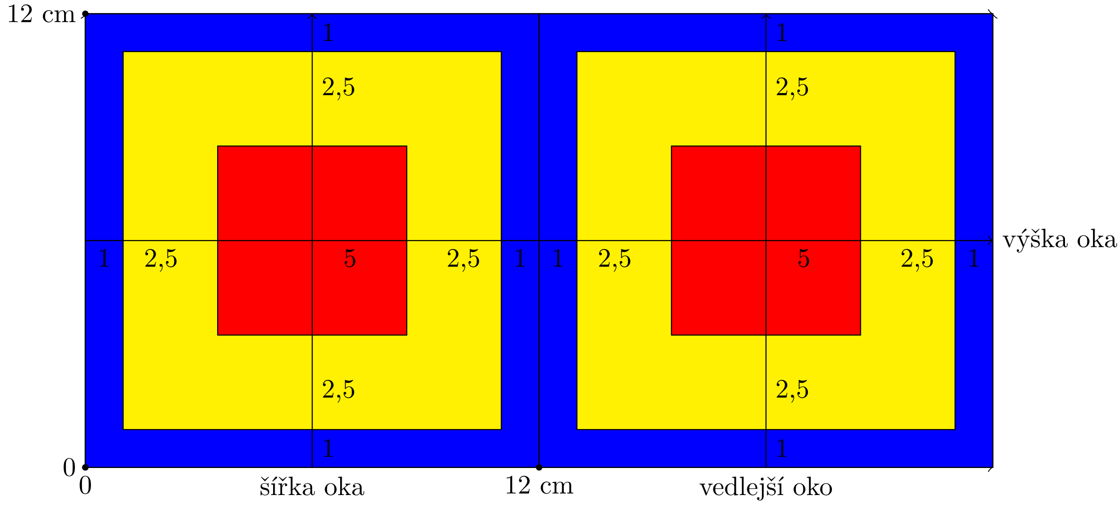


Pravděpodobnost, že se kůň bude opravdu nacházet nejblíže k jižní straně ohrady je $P = \frac{(\frac{100-60}{2}+60)\cdot\frac{40}{2}}{100\cdot 40} = \frac{1600}{4000} = 0,4$.

3.4 Problém golfistky Alžběty

Tato úloha je též převzatá z již zmíněného zdroje, jen je pro zajímavost trochu upravená (nebudeme zanedbávat tloušťku provázků).

Alžběta si šla zahrát golf na speciálním hřišti, na kterém je natažená síť se čtvercovými oky. Provázky sítě jsou silné 2 centimetry a rozestup mezi středy vláken je 12 centimetrů. Síť je perfektně napjatá. Cílem Alžbětky je dostat míček s průměrem 5 cm nejdříve skrz tuto síť a později teprve do jamky. Nás ovšem zajímá jaká je pravděpodobnost, že míček proletí sítí, aniž by zavadil o libovolný provázek této sítě za následujících podmínek. Ač Alžběta stojí od sítě daleko, tak nejen že je natolik šikovná, aby míček neletěl úplně mimo síť, ale dokonce natolik, aby míček letěl kolmo na síť. Tedy míček můžeme vyjádřit v úloze jen pomocí polohy těžiště. Předpokládáme navíc, že míček může narazit do jistého místa sítě či jím proletět stejně možně dobře, jako u jakéhokoliv jiného místa sítě (jen ne mimo síť).



Jak vidíme na obrázku, v každém oku by se nám opakovala stejná situace, tedy stačí si vzít jen jedno oko jehož hrany vedou středy provázků sítě a vyřešit tuto úlohu jen pro jedno oko, neboť se to bude shodovat s tím, kdybychom to počítali pro celou síť. V tomto případě navíc ani nepotřebujeme znát celkové rozměry sítě, respektive počet všech ok.

Modrá oblast představuje provázky, ve žluté oblasti by míček stále zavadil o provázek (poloměr míčku je 2.5 cm) a jenom v červené oblasti by proletěl hladce. Pravděpodobnost je $P = \frac{(12-2-5)^2}{12^2} = \frac{25}{144} = 0,173611$.

Tedy geometrická pravděpodobnost nám dovoluje pracovat i s případy, kdy nejen množství případů co mohou nastat je nespočetně mnoho, ale navíc můžeme v úlohách ve kterých se určitá vlastnost opakuje (jako v našem případě oka v síti), vypočítat pravděpodobnost daného jevu, aniž bychom věděli rozměry celého útvaru - tedy sítě či počet ok. Stačí nám vlastně pracovat na zmenšeném pracovním prostoru a tím dostat výsledek pro všechny případy.

Tím je využití i užitečnost geometrické pravděpodobnosti je o něco vyšší. Lze ji tedy používat pro tyto „nekonečné prostory/roviny“ aniž by nás vlastně trápilo, jak veliký je samotný celek.

4 Stanovení čísla π metodou Monte Carlo

Následující část je převzata z [3].

4.1 Výpočet metodou Monte Carlo

Využití geometrické pravděpodobnosti najdeme i ve výpočtu při stanovení čísla π metodou Monte Carlo, proto se budeme nyní věnovat této metodě. Jasně si zde ukážeme, že geometrickou pravděpodobnost nemusíme potřebovat jen při výpočtu v příkladech typu jako výše, ale může být i součástí při různých výpočtech jako je stanovení konstanty s přesností na pár míst. Bude nás zajímat následující situace: Máme čtverec o straně délky „a“, do kterého je vepsán kruh. Jaká je pravděpodobnost (jev A), že náhodně zvolený bod leží uvnitř vepsaného kruhu?

Předpokládejme, že každý bod může být vybrán se stejnou pravděpodobností. Velikost množiny příznivých výsledků je charakterizovaná obsahem vepsaného kruhu a velikost množiny všech výsledků bude charakterizována obsahem čtverce. Potom užitím geometrické definice pravděpodobnosti dostáváme

$$P(\mathsf{A}) = \frac{m(\mathsf{A})}{m(\Omega)} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Budeme-li náhodný pokus opakovat n-krát, kdy se vždy vybere náhodný bod v tomto čtverci a budeme zaznamenávat, kolikrát se bod nacházel uvnitř kruhu n(A), lze vyjádřit relativní četnost výskytu jevu A, vyjádřeného pomocí poměru n(A)/n. Dostatečně velkým opakováním můžeme zjišťovat i hodnotu π, neboť platí $\pi \sim 4\frac{n(\mathsf{A})}{n}$, protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(\mathsf{A})}{n} = P(\mathsf{A})$$

.

Popsaná metoda se nazývá Monte Carlo právě proto, že se využívá náhodných procesů ke hledání řešení konkrétních problémů. Touto metodou lze v praxi rychle určovat například obsahy složitých geometrických obrazců (výpočty integrálů, apod.).

4.2 Přesnost výpočtu

Tato část vyžaduje u čtenáře orientaci v teorii pravděpodobnosti, některé části nejsou probírané ani v prvním ročníku na vysoké škole, tak zde budu více doslovně citovat z již uvedeného zdroje [3], tedy na to hromadně upozorním už zde a nebudu již uvádět uvozovky. Nejdříve před odhadnutím chyby získáné při této metodě si zaveďme několik veličin.

M označíme veličinu vyjadčující kolik testovacích bodů z daného počtu pokusů n padne do kruhu o průměru d=1. Náhodná veličina M tak může nabývat všech hodnot od 0 do n. Označme jako p pravděpodobnost, při které náhodně zvolený bod padne do daného obrazce, tedy kruhu. Pravděpodobnost, že v kruhu nebude ležet, je pak 1-p. Náhodná veličina M má potom binomické rozdělení pravděpodobnosti M∼Bi(n,p), neboť pravděpodobnost jevu, že do obrazce padne právě k náhodně vybraných bodů je dána předpisem

$$P[M = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Střední hodnota binomického rozdělení M je EM=np a jeho rozptyl D je DM=np(1-p).

Namísto náhodné veličiny M budeme pracovat s náhodnou veličinou M/n, která vyjadřuje relativní četnost úspěchu jevu, při kterém se náhodně vybraný bod nachází uvnitř obrazce. Pro veličinu M/n platí $\lim_{n\to\infty} \frac{M}{n} = p$. Využitím obecných vlastností střední hodnoty a rozptylu dostáváme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left(\frac{M}{n}\right) &= \frac{1}{n}\mathsf{E}M = \frac{1}{n}\cdot np = p, \\ \mathsf{D}\left(\frac{M}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}\mathsf{D}M = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}. \end{aligned}$$

Pro libovolnou náhodnou veličinu X se střední hodnotou EX a rozptylem DX je pravděpodobnost, že absolutní hodnota |X-EX| bude menší než libovolné ϵ>0 omezené tzv. Čebyševovou nerovností II. typu, kterou lze psát ve tvaru

$$P\left[|X - \mathsf{E}X| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}.$$

Hodnotu parametru můžeme interpretovat jako velikost chyby, se kterou se liší vypočtená (změřená) střední hodnota od skutečné. Aplikací Čebyševovy nerovnosti na náhodnou veličinu M/n dostáváme

$$P\left[\left|\frac{M}{n} - p\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Na pravé straně máme p, které obecně neznáme, využijeme tedy následující odhad. Funkce f(p)=p(1-p) je kvadratická funkce, která je omezená shora (1/4) a můžeme tedy provést horní odhad ve tvaru p(1-p) menší rovno 1/4. Celkem po dosazení platí

$$P\left[\left|\frac{M}{n} - p\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Pro odhad pravděpodobnosti na levé straně zavedeme parametr α, který představuje hladinu významnosti. Za hladinu významnosti volíme nejčastěji hodnotu α=0,05, tedy 5%. Požadujeme, aby pravděpodobnost, že se od sebe naměřená a skutečná velikost střední hodnoty liší o méně než ϵ byla

$$P\left[\left|\frac{M}{n} - p\right| < \varepsilon\right] = 1 - \alpha.$$

Úpravami dostaneme

$$1 - \alpha \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$
$$\alpha \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$
$$\varepsilon^2 \leq \frac{1}{4n\alpha}$$

a po odmocnění dostaneme odhad chyby

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}.$$

Jiný odhad můžeme nalézt za použití tzv. Moivre-Laplaceovy centrální limitní věty. Ten ale tady nebudeme dělat, pro zájemce doporučuji přečíst si přímo zdroj [3] a kde celkově se můžete dočíst ještě pár informací k této metodě. Uvedu zde shrnutí z této stránky: „Shrnutím závěrů z obou postupů můžeme konstatovat, že velikost chyby ϵ při metodě Monte Carlo se řádově řídí předpisem $\varepsilon \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. V praxi tento závěr můžeme interpretovat tak, že k dosažení přesnosti 5 desetinných míst (ϵ=0,00001), by mělo postačovat 10^{10} bodů, což je 10 miliard bodů. To je hodnota, kerá je na běžném počítači s běžným systémovým vybavením nedosažitelná. Z tohoto důvodu nemůžeme metodu Monte Carlo považovat za způsob, jakým dosahovat vysoké přesnosti hodnoty čísla π. V praxi však její uplatnění nalézáme tam, kde je vyžadována spíše relativně veliká rychlost nalezení řešení, než jeho vysoká přesnost.“

5 Vlastní hodnocení

Geometrickou pravděpodobnost vnímám jako velice přínosné a zajímavé doplnění ke klasické definici pravděpodobnosti, která neumí pracovat s případy, kdy je nekonečně mnoho výsledků. Navíc v některých případech dokáže počítat i pravděpodobnost pro porstory či roviny, u kterých neznáme jejich velikost, ale známe jejich povahu stejně jako to bylo v případě Problému golfistky Alžběty.

Na druhou stranu má své úskalí, své paradoxy. Jedním z nejznámějších je takzvaný Bertrandův paradox, kde je úkolem zjistit pravděpodobnost toho, jestli je náhodně zvolená tětivá kružnice delší, než je délka strany rovnostranného trojůhelníku vepsaného do této kružnice. Lze dojít ke třem různým výsledkům a ani jeden z nich nelze přímo označit jako ten špatný či správný. Je to kvůli přístupu k úloze, s jakým pravděpodobnostním prostorem budeme pracovat - zda budeme vnímat generování tětivy jako jednoznačně určeného podle polohy průsečíků tětivy a kružnice, nebo zda tětivu zavedeme jiným způsobem.

Přesto vnímám geometrickou definici pravděpodobnosti jako důležitou a dle mého názoru by se mohly dva nebo tři příklady pro zajímavost uvádět na středních školách, kde se probírá i ta klasická definice pravděpodobnosti.

6 Zdroje

[1]MARCINČÍN, Martin. Počátky teorie pravděpodobnosti. Praha, 2015. Diplomová práce. Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.

[2]Geometrická pravděpodobnost. George11: Matematika [online]. [cit. 2019-09-14]. Dostupné z: http://www.george11.eu/matematika/pst/D2index.htm

[3]ŘEPÍK, Michal. STANOVENÍ HODNOTY ČÍSLA METODOU MONTE CARLO. Michalrepik [online]. 2015 [cit. 2019-09-14]. Dostupné z:

http://www.michalrepik.cz/matematika/monte-carlo.html

Obrázky - vlastní tvorba