Teorie her
v Radě EU

Kateřina Vaňková

MFF UK
Ukázky aplikací matematiky

3. září 2017

Obsah

1 Úvod

Cílem práce je porovnat hlasovací síly jednotlivých členských zemí EU při hlasováních v Radě EU. V roce 2014 došlo ke změně pravidel, od pravidel Smlouvy z Nice (princip trojí většiny) se přešlo k pravidlům Lisabonské smlouvy (princip dvojí většiny a blokační menšina). Čtenáře seznámím stručně s Radou EU a pravidly pro hlasování (Smlouva z Nice a Lisabonská smlouva). Nastíním charakteristiku teorie her, férové rozdělení výhry a dále se zaměřím na dva nejznámější indexy pro výpočet hlasovací síly, a to Shapley-Shubikův a Penrose-Banzhafův index síly. Na konci budou porovnány hlasovací síly jednotlivých členských zemí EU.

2 Rada EU a schvalovací proces

V této kapitole se zaměřím na stručný popis Rady EU, její úkoly a popíšu schvalovací proces v Radě. Vysvětlím pravidla, která se uplatňovala, když byla platná Smlouva z Nice, a která se uplatňují nyní, když je platná Lisabonská smlouva.

Evropská unie je politickým a ekonomickým sdružením. Tvoří ji 28 států s více než 500 miliony obyvatel. Rada EU je orgánem Evropské unie a zastupuje zájmy členských států EU. Společně s Evropským parlamentem (EP) a Evropskou komisí (EK) se podílí na rozhodování. Evropská komise navrhuje právní normy a Rada EU s Evropským parlamentem je schvalují. V Radě zasedají ministři jednotlivých členských zemí.

Hlavní úkoly Rady EU jsou: přijímání rozpočtu EU a legislativních aktů společně s EP, koordinace politiky členských států, vytváření společné zahraniční a bezpečnostní politiky EU a uzavírání dohod mezi EU a jedním či více státy nebo mezinárodními organizacemi.

Schvalování právních aktů může probíhat následujícími způsoby[1]:

- hlasování prostou většinou — ke schválení dojde, pokud hlasoval nadpoloviční počet států pro
- hlasování kvalifikovanou většinou
- jednomyslné hlasování — uplatnění systému veta

Daný typ, který se užije při daném hlasování, záleží na oblasti, o které se hlasuje.

[1] MOUDRÝ, Ing. Marek. *Evropská unie v kostce*. Praha: Jalna, 2017. ISBN 978-80-86396-88-0.

V této práci se dále budu zabývat jen hlasováním kvalifikovanou většinou.

Hlasování kvalifikovanou většinou podle[2]:

- Smlouvy z Nice (platné do roku 2014)
  - při hlasování je potřeba naplnit princip trojí většiny:
    1. nadpoloviční většina států (tedy alespoň 15 z 28)
    2. součet počtu obyvatel (alespoň 62 % celkové populace EU)
    3. součet hlasů (každá země má určitý počet hlasů, který je odvozen od její velikosti, menší státy jsou zvýhodněny[3], ke schálení je potřeba 260 hlasů z 352)[4]
- Lisabonské smlouvy
  - při hlasování je potřeba naplnit princip dvojí většiny:
    1. součet členských států (alespoň 15 států z 28)
    2. součet obyvatel (alespoň 65 % obyvatelstva EU)
  - blokační menšina
    - je tvořena alespoň 4 členskými státy, které tvoří alespoň 35 % obyvatel EU

Podmínka splnění počtu obyvatel se kontroluje na vyžádání. Blokační menšina může vzniknout, pokud není jedna podmínka z principu dvojí většiny splněna. Princip dvojí většiny (z Lisabonské smlouvy) se uplatní právě tehdy, když je návrh podán Komisí, nebo vysokým představitelem Unie pro zahraniční věci a bezpečnostní politiku.

3 Teorie her

V této kapitole se zaměřím na stručnou historii a charakteristiku teorie her. Dále nastíním, kdy se užívá teorie her v politologii a férové rozdělení výhry.

Teorie her se snaží najít nejlepší strategii v dané situaci pro hráče. Daná situace může být jak z oblasti politiky, biologie, hazardních her a dalších. Teorie her se začala rozvíjet v USA ve 20. století a do konce druhé světové války byla převážně matematickou teorií. Od té doby došlo k rozšíření jejích aplikací do nejrůznějších oborů.

---

[2] MOUDRÝ, Ing. Marek. *Evropská unie v kostce*. Praha: Jalna, 2017. ISBN 978-80-86396-88-0.

[3] V příloze č.2 je tabulka, která ukazuje, jaké by bylo spravedlivé rozdělení hlasů.

[4] Tabulka s počtem hlasů podle Smlouvy z Nice je v příloze č.1

Významnými osobnostmi[5] teorie her jsou Charles Waldegrave (autor Waldegrave problem), autoři první systematické práce: J. von Neumann a O. Morgenstern, John Nash (NC za ekonomii 1994[6]), autoři Vězňova dilema: Merrill M. Flood a Melvin Dresher, a mnoho dalších.

Zřejmou situací, kde lze využít teorii her v politice, je hlasování. Hlasování se účastní politici, kteří se mohou seskupovat v koalicích (koalice není nic jiného než podmnožina množiny všech hráčů). Politici se snaží, aby jejich postoj (schválení, zamítnutí, nebo pozměnění) k danému právnímu předpisu byl ten vítězný, a tak se shlukují v koalicích. Tady začíná strategie. Pokud se politik přidá k jedné koalici, může to vyvolat přemístění jiných politiků. Také, pokud by byl politik pro schválení zákona, ale po zjištění postojů ostatních politiků by zjistil, že by byl v menšině a výhodnější by bylo se přidat do koalice, která je pro pozměnění, pak by sice nedosáhl schválení, ale třeba dané pozměnění, které daná koalice navrhla, by nebylo až tak zásadní pro danou zemi, kterou politik zastupuje. Politici se sdružují v koalicích z různých důvodů (historická příbuznost, hlasovací síla, náboženství, …).

V každé hře se hráči snaží o co největší maximalizaci své výhry. Matematici se zabývali tím, jak by se dalo vypočítat nejférovější rozdělení výhry mezi hráči. Nejznámější je Shapleyho hodnota.

3.1 Shapleyho hodnota

Mějme hru s n hráči v množině $N = \{1,2,\ldots,n\}$ a funkci $v : 2^N \to R$. Tato funkce přiřazuje každé podmnožině $S \subseteq N$ (dále budu reálné číslo $v(S)$ a předpokládáme, že $v(\emptyset) = 0$. V teorii her se funkce v obvykle nazývá hra. Pro podmnožinu $S \subseteq N$ nám $v(S)$ udává velikost výhry $S \subseteq N$, zatímco to, jak se má výhra rozdělit mezi jednotlivé hráče v dané podmnožině, už neurčuje. Nechť množina všech her na N je označena Γ.

Definice:

- Součet dvou her $v, w \in \Gamma$: $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$, pro každou podmnožinu $S \subseteq N$.
- Násobek hry $v \in \Gamma$ a skaláru α: $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$, pro každou podmnožinu $S \subseteq N$.

Tedy Γ je vektorovým prostorem.

Shapleyho hodnota je funkce $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}^N$, kde $\mathbb{R}^N$ určuje aritmetický prostor dimenze $|N|$ (indexovaný hráči z N). Rozdělení výhry napíšeme jako vektor Shapleyho hodnot $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, kde φ_i určuje hodnotu výhry (=Shapleyho hodnotu) hráče i. Shapleyho

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Game_theory

[6] https://cs.wikipedia.org/wiki/John_Forbes_Nash

hodnota vyjadřuje průměrný přínos hráče do všech podmnožin $S \subseteq N$, kterých může být členem (všechny podmnožiny o stejném počtu hráčů mají stejnou pravděpodobnost vzniku).[7]

Vzorec Shapleyho hodnoty má tvar: $\varphi_i = \frac{1}{n!} \times \sum_{S:i \in S} \big(|S|-1\big)!\big(n-|S|\big)![v(S)-v(S-i)]$.

Tedy Shaplyeho hodnota je funkcí lineární.

Shapleyho hodnota férového rozdělení výhry mezi hráče vychází ze třech axiomů[8]:

1. Rozdělení výhry Φ by mělo záviset pouze na v a mělo by brát ohled na symetrie ve v. To znamená, že pokud hráči i a j plní symetrickou roli ve v (tedy, pokud pro $\forall S : S \subseteq N$ platí $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$), pak $\varphi_i = \varphi_j$.
2. Pokud $v(S) = v(S-i)$ pro $\forall S : S \subseteq N$, to znamená, že pokud hráč i je nulový hráč (tj. který nepřidává žádnou hodnotu žádné podmnožině $S \subseteq N$), pak $\varphi_i = 0$. Tudíž, přidání nulového hráče do hry nemění hodnotu φ_j ostatním hráčům j této hry. Dále pak platí $\sum_{i \in N} \varphi_i[v] = v(N)$.
3. $\varphi[v+w] = \varphi[v] + \varphi[w]$. Jedná se o součet dvou her (se stejnými hráči) s funkcemi v a w. Definujme $(v+w)(S) = v(S) + w(S)$ pro $\forall S : S \subseteq N$. Myšlenka třetího axiomu je taková, že pokud hráč i získá $\varphi_i[v]$ ve v a $\varphi_i[w]$ v w, pak je férové získat $\varphi_i[v+w]$ ve $v+w$.

Tyto tři axiomy jsou základem pro větu, kterou Shapley vyslovil v roce 1953:

VĚTA [Shapley, 1953]. Existuje pouze jedna metoda rozdělení výhry Φ ve hře (N, v), která splňuje Axiomy 1, 2 a 3.[9]

Shapleyho rozdělení výhry zajišťuje, že hráči, kteří se sdružili v podmnožinách množiny N, dostanou minimálně takovou výhru, jakou by získali, kdyby hráli individuálně.[10] Shapleyho spravedlivé rozdělení nemusí nikdy nastat, ale jedná se o rozdělení, které by vnější rozhodčí navrhl, když by vzal v úvahu relativní síly různých podmnožin $S \subseteq N$, které mohou vzniknout.

---

[7] https://cs.wikipedia.org/wiki/Kooperativn%C3%AD_hra#Shapleyova_hodnota

[8] STRAFFIN, Philip D. Game theory and strategy. Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 244 s. ISBN 08-838-5637-9.

[9] Důkaz je nastíněn v publikaci: STRAFFIN, Philip D. Game theory and strategy. Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 244 s. ISBN 08-838-5637-9.

[10] http://www.investopedia.com/terms/s/shapley-value.asp

4 Indexy sil

V této kapitole vysvětlím pojmy jako jsou Shapley-Shubikův a Penrose-Banzhafův index síly. Na konci bude uveden rozdíl mezi těmito dvěma indexy i s příkladem.

4.1 Shapley-Shubikův index síly

Při hlasováních hráči utváří podmnožiny množiny všech zúčastněných hráčů (tj. koalice). Dostatečně velké podmnožiny hráčů, které mohou prosadit svá rozhodnutí, se nazývají *vítězné* a ty, které nejsou dostatečně velké, jsou *prohrávající podmnožiny.* Vytvořme model hlasování s charakteristickou funkcí, která přiřadí hodnotu 1 vítězným podmnožinám hráčů a hodnotu 0 prohrávajícím podmnožinám hráčů. Výsledná hra se nazývá *prostá hra*.

DEFINICE[11]. Prostá hra (nebo volební hra) je dvojice (N, W), kde N je soubor hráčů (voličů) a W je soubor vítězných podmnožin hráčů takových, že

1. $\varnothing \notin W$ (prázdná množina je prohrávající podmnožina hráčů),
2. $N \in W$ (množina všech hráčů je vítězná),
3. $S \in W$ a $S \subseteq T$ implikuje $T \in W$ (pokud S je vítěznou podmnožinou hráčů, pak jakákoli podmnožina hráčů, která obsahuje S, je také vítěznou).

Shapley-Shubikův index síly (ϕ_i) je speciálním případem Shapleyho hodnoty.[12] Shapleyho hodnota pro funkci v je v tomto případě definována takto:

$v(S) = 1$, pokud se jedná o vyhrávající podmnožinu S,

$v(S) = 0$, pokud se jedná o prohrávající podmnožinu S.

Tedy funkce v je charakteristickou funkcí množiny všech vyhrávajících podmnožin $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Hráči nemusí mít vždy stejný počet hlasů. Pak se tedy jedná o váženou hlasovací hru, zapisujeme takto: $[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$, kde n je počet hráčů a w_i určuje počet hlasů i-tého hráče a q je minimální nutný počet hlasů pro schválení návrhu zákona.

Daná podmnožina hráčů $S \subseteq N$ je vyhrávající, pokud $\sum_{i \in S} w_i \geq q$.

---

[11] STRAFFIN, Philip D. Game theory and strategy. Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 244 s. ISBN 08-838-5637-9.

[12] STRAFFIN, Philip D. Game theory and strategy. Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 244 s. ISBN 08-838-5637-9.

Pro Shapley-Shubikův index síly platí, že $\phi_i \geq 0$ pro $\forall i : i \in N$ a $\sum_{i \in N} \phi_i = 1$.

Shapley-Shubikův index síly je speciálním případem Shapleyho hodnoty, a tedy vychází z axiomů Shapleyho hodnoty. Z prvního a druhého axiomu plyne, že $\phi_i = \phi_j$, pokud i a j hrají symetrické role ve hře; $\phi_i = 0$, pokud i je *nulový hráč*[13]; $\phi_i = 1$, pokud i je *diktátorem*[14] (má právo veto). Hráč je *klíčový* právě tehdy, když po přistoupení k podmnožině hráčů (záleží na pořadí) změní podmnožinu prohrávající v podmnožinu vyhrávající. Shapley-Shubikův index síly se pak vypočítá jako podíl počtu podmnožin $S \subseteq N$ (záleží na pořadí), ve kterých je hráč klíčový, vůči všem možným podmnožinám $S \subseteq N$ (záleží na pořadí).

Vzorec pro Shapley-Shubikův index síly:

$\phi_i = \frac{1}{n!} \times \sum (|S|-1)!(n-|S|)!$, sčítáme přes všechny podmnožiny hráčů S takové, že $i \in S$, $S \in W$ a $(S - \{i\}) \notin W$ (a tedy $v(S) - v(S - \{i\}) = 1 - 0 = 1$, pokud je hráč klíčovým, jinak je výraz roven 0[15]). Suma se týká všech podmnožin hráčů, kde S je vítěznou podmnožinou, ale stala by se prohrávající, pokub by ztratila hráče i.

4.2 Penrose-Banzhafův index síly

Banzhafův postoj k hlasovací síle byl jiný, zakládal se na tom, že hlasovací síla by měla být úměrná počtu vítězných podmnožin hráčů, ve kterých je daný hráč klíčovým hráčem. Výsledný index se nazývá Penrose-Banzhafův index síly.

Výpočet Penrose-Banzhafova indexu proběhne takto: Vypíšeme si všechny vítězné podmnožiny hráčů, v nich podtrhneme klíčové hráče a pro každého hráče spočítáme počet podmnožin, kde byl hráč klíčovým. Daný počet vydělíme počtem všech možných výherních podmnožin hráčů. Dostaneme tak Penrose-Banzhafův index síly.[16]

Pro malé hry jsou rozdíly mezi Penrose-Banzhafovým a Shapley-Shubikovým indexem síly malé, u větších her rozdíl může být významný.

Jak určit, který index použít v dané konkrétní situaci? Jednou z možností je si sepsat axiomy, které platí u Shapley-Shubikova indexu, a axiomy, které platí u Penrose-Banzhafova

[13] Ve hře [4;2,2,2,1] je poslední hráč nulovým hráčem. Kvóta je naplněna pokud alespoň 2 z prvních 3 hráčů hlasují pro, a kvóta je nenaplněna pokud alespoň 2 z prvních 3 hráčů hlasují proti. To, jak hlasuje poslední hráč, nemá na výsledek žádný vliv.

[14] Ve hře [3;3,1,1] je první hráč diktátorem a poslední dva hráči jsou nulovými hráči. Kvóta je naplněna právě tehdy, když první hráč hlasuje pro.

[15] Vzoreček nezahrnuje případy, kdy neplatí, že S je vyhrávající a zároveň S - $\{i\}$ je prohrávající, neboť buď v(S) - v(S-{i}) = 1-1 = 0, nebo v(S) - v(S-{i}) = 0-0 = 0.

[16] STRAFFIN, Philip D. Game theory and strategy. Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 244 s. ISBN 08-838-5637-9.

indexu. Dále dané axiomy navzájem porovnáme (Shapley-Shubikovy s Penrose-Banzhafovými) a rozhodneme, který set axiomů je v dané situaci pravděpodobnější.

4.3 Shrnutí

Pro shrnutí, Shapley-Shubikův index síly daného hráče záleží na počtu pořadí, ve kterých je daný hráč klíčový, zatímco Penrose-Banzhafův index síly záleží na počtu způsobů, ve kterých každý hráč může způsobit změnu. Výpočet indexů se liší v předpokladech.[17] Předpoklad, že voliči volí nezávisle na ostatních, vede k Penrose-Banzhafově indexu síly. Předpoklad, že voliči volí v závislosti na volbě ostatních, tedy že existuje soubor norem, podle něhož voliči volí, vede k Shapley-Shubikově indexu síly.

Vzhledem k tomu, že v Radě EU existuje soubor norem, přikláněla bych se tedy k hodnotám Shapley-Shubikova indexu síly.

Pro lepší představu uvedu konkrétní příklad, kde se výsledky obou indexů liší. Máme hru [3;2,1,1], tedy kvóta je 3, první hráč (A) má 2 hlasy a druhý (B) se třetím (C) mají po jednom hlasu. Prvně vypočítáme Shapley-Shubikův index síly. Vypíšeme 3! uspořádání hráčů A, B, C a tučně zvýrazníme toho hráče, který je klíčovým (záleží na pořadí):

A **B** C A **C** B B **A** C B C **A** C **A** B C B **A**

Tedy Shapley-Shubikovy indexy sil jsou: $\phi_A = \frac{2}{3}, \phi_B = \frac{1}{6}, \phi_C = \frac{1}{6}$.

V případě Penrose-Banzhafova indexu síly vypíšeme vyhrávající podmnožiny $S \subseteq N$ a tučně zvýrazníme všechny hráče v dané podmnožině $S \subseteq N$, takové, že kdyby opustili danou podmnožinu $S \subseteq N$, tak by se podmnožina $S \subseteq N$ stala prohrávající (nezáleží na pořadí):

A B **A C** **A** B C

Penrose-Banzhafovy indexy sil jsou v poměru $A : B : C = 3 : 1 : 1$, po znormalizování dostaneme: $\beta_A = \frac{3}{5}, \beta_B = \frac{1}{5}, \beta_C = \frac{1}{5}$.

5 Výsledky

V této kapitole se dostaneme k samotnému výpočtu indexů sil (=hlasovací síly) jednotlivých členských zemí EU, podle pravidel Smlouvy z Nice a podle pravidel Lisabonské smlouvy. Porovnáme, která země získala či ztratila část své hlasovací síly.

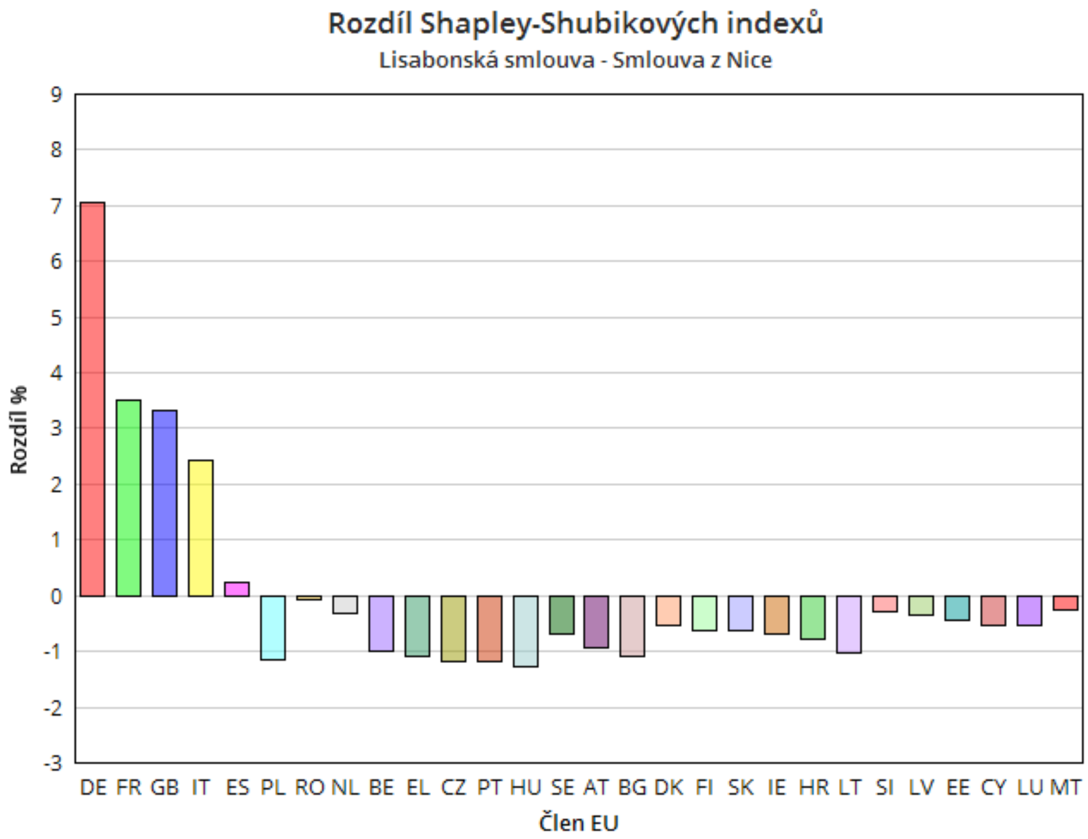
[17] STRAFFIN, Philip D. Game theory and strategy. Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 244 s. ISBN 08-838-5637-9.

K výpočtu Penrose-Banzhafova indexu síly jsem použila program *ipnice*[18] a pro Shapley-Shubikův index síly jsem použila program *Indices of Power (IOP) 2.0*[19]. Pro zjednodušení jsem nezahrnula do výpočtu blokační menšinu. Výsledky jsou zaokrouhlené na dvě desetinná místa. Počet obyvatel zemí EU je aktuální k datu 1. ledna 2014.

V příloze č.3 nalezneme tabulku s vypočítanými indexy sil jednotlivých členských zemí podle pravidel Smlouvy z Nice a v příloze č. 4 podle pravidel Lisabonské smlouvy. Případné rozdíly můžeme nahlédnout v následujících grafech.

5.1 Shapley-Shubikův index síly

Změnou pravidel získalo na síle 5 států a 23 států svou hlasovací sílu ztratilo. Mezi 23 státy je i Česká republika, jejíž síla z 3,31 % klesla na 2,14 % (ztratila tedy přibližně 35,34 % své hlasovací síly). Je zajímavé, že státy, které na síle získaly, patří mezi největší (co do počtu obyvatel) v EU: Německo, Francie, Velká Británie, Itálie a Španělsko.



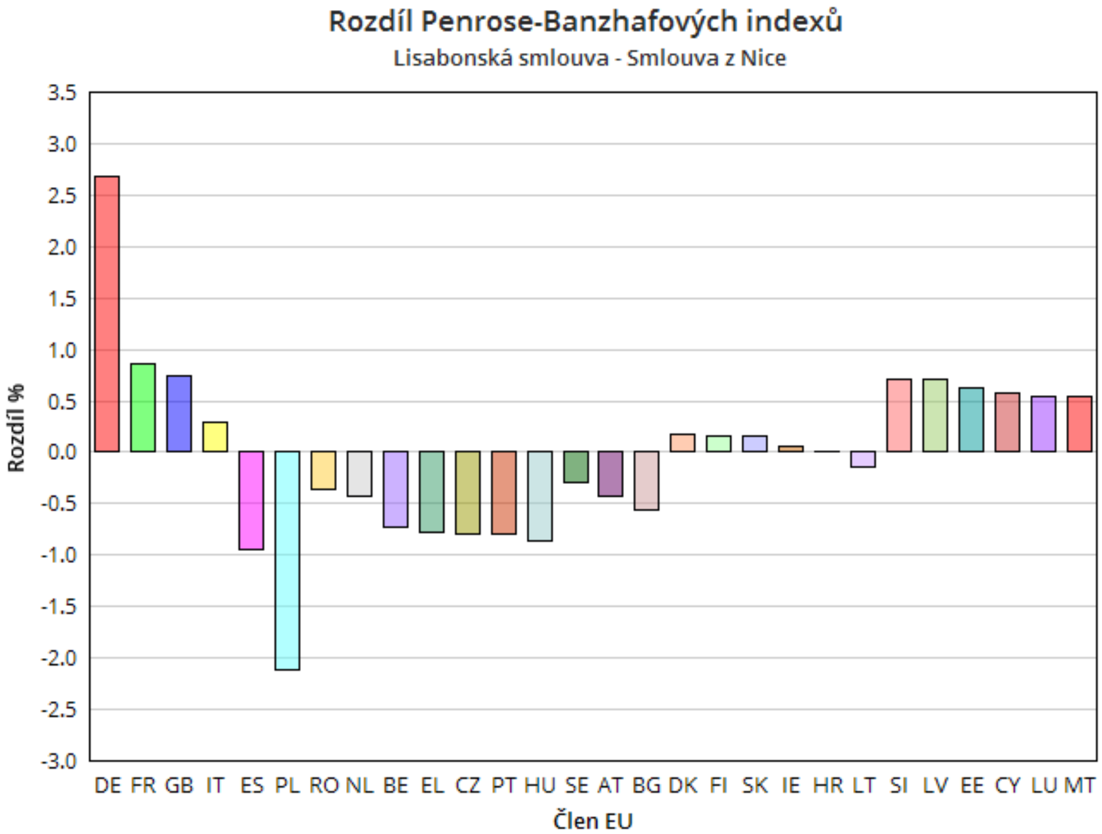
Graf 1: Rozdíl Shapley-Shubikových indexů sil

[18] Na adrese: http://homepages.warwick.ac.uk/~ecaae/index.html

[19] Ke stažení na adrese: http://www.tbraeuninger.de/download/

5.2 Penrose-Banzhafův index síly

Tentokrát na síle získala polovina států a to nejen ty největší (co do počtu obyvatel) státy (Německo, Francie, Velká Británie a Itálie), ale i ty nejmenší (Dánsko, Finsko, Slovensko, Irsko, Slovinsko, Lotyšsko, Estonsko, Kypr, Lucembursko a Malta). Část své hlasovací síly ztratily tedy státy, které jsou středně velké a mezi nimi je i Česká republika. Její hlasovací síla klesla z 3,61 % na 2,82 %, tedy ztratila 21,88 % své původní síly.



Graf 2: Rozdíl Penrose-Banzhafových indexů sil

6 Závěr

Z výpočtů indexů sil nám vyplynuly tyto závěry:

- *Shapley-Shubikův index síly:* Drtivá většina států ztratila na síle, kromě 5 největších. Česká republika ztratila přibližně třetinu své hlasovací síly.
- *Penrose-Banzhafův index síly:* Polovina států (4 největší a 10 nejmenších států) získala na hlasovací síle, zatímco druhá polovina ztratila část své hlasovací síly. Česká republika ztratila přibližně pětinu své hlasovací síly.

Největší státy byly rozdělením hlasů (podle Smlouvy z Nice) znevýhodněny, dostaly míň hlasů, než by měly. Tedy to, že získaly v obou výpočtech indexů sil na síle, není až tak překvapující. A vzhledem k tomu, že menší státy dostaly větší počet hlasů (podle Smlouvy z Nice), než by měly, tak intuitivně dává větší smysl, že část své síly ztratí s novými pravidly Lisabonské smlouvy. Tento výsledek vyšel pouze u Shapley-Shubikova indexu síly, k němuž jsem se přikláněla. Na výsledky mělo vliv nezahrnutí blokační menšiny a také zaokrouhlení, tedy výpočty jsou pouze přibližné.

7 Přílohy

Příloha č.1: Počet hlasů členských zemí EU podle Smlouvy z Nice[20]

Členská země	Počet hlasů
Německo	29
Francie	29
Itálie	29
Velká Británie	29
Španělsko	27
Polsko	27
Rumunsko	14
Nizozemí	13
Belgie	12
Česká republika	12
Řecko	12
Maďarsko	12
Portugalsko	12
Rakousko	10
Švédsko	10
Bulharsko	10
Dánsko	7
Irsko	7
Litva	7
Slovensko	7
Finsko	7
Chorvatsko	7
Kypr	4
Estonsko	4
Lotyšsko	4

Členská země	Počet hlasů
Lucembursko	4
Slovinsko	4
Malta	3

[20] Data převzata z publikace [1] v kapitole 8 Zdroje

Příloha č.2: Spravedlivá hodnota hlasů (Smlouva z Nice)

Stát	Počet hlasů	Procento počtu obyvatel z celkové populace EU	Spravedlivá hodnota hlasů
Německo	29	15,92 %	56
Francie	29	12,98 %	46
Velká Británie	29	12,67 %	45
Itálie	29	11,98 %	42
Španělsko	27	9,17 %	32
Polsko	27	7,59 %	27
Rumunsko	14	3,93 %	14
Nizozemí	13	3,32 %	12
Belgie	12	2,21 %	8
Řecko	12	2,17 %	8
Česká republika	12	2,07 %	7
Portugalsko	12	2,05 %	7
Maďarsko	12	1,95 %	7
Švédsko	10	1,90 %	7
Rakousko	10	1,68 %	6
Bulharsko	10	1,43 %	5
Dánsko	7	1,11 %	4
Finsko	7	1,07 %	4
Slovensko	7	1,06 %	4
Irsko	7	0,91 %	3
Chorvatsko	7	0,84 %	3
Litva	7	0,58 %	2
Slovinsko	4	0,41 %	1
Lotyšsko	4	0,39 %	1
Estonsko	4	0,26 %	1
Kypr	4	0,17 %	1
Lucembursko	4	0,11 %	0
Malta	3	0,08 %	0
EU	**352**	**100,01 %**	**353**

Příloha č.3: Indexy sil členských zemí EU podle pravidel Smlouvy z Nice

Stát	Počet hlasů	Shapley-Shubikův index síly	Penrose-Banzhafův index síly
Německo	29	8,61 %	7,59 %
Francie	29	8,56 %	7,59 %
Velká Británie	29	8,55 %	7,59 %
Itálie	29	8,54 %	7,59 %
Španělsko	27	7,91 %	7,25 %
Polsko	27	7,84 %	7,25 %
Rumunsko	14	3,9 %	4,17 %
Nizozemí	13	3,6 %	3,9 %
Belgie	12	3,31 %	3,61 %
Řecko	12	3,31 %	3,61 %
Česká republika	12	3,31 %	3,61 %
Portugalsko	12	3,31 %	3,61 %
Maďarsko	12	3,31 %	3,61 %
Švédsko	10	2,73 %	3,03 %
Rakousko	10	2,73 %	3,03 %
Bulharsko	10	2,73 %	3,03 %
Dánsko	7	1,9 %	2,14 %
Finsko	7	1,9 %	2,14 %
Slovensko	7	1,9 %	2,14 %
Irsko	7	1,9 %	2,14 %
Chorvatsko	7	1,9 %	2,14 %
Litva	7	1,9 %	2,14 %
Slovinsko	4	1,08 %	1,22 %
Lotyšsko	4	1,08 %	1,22 %
Estonsko	4	1,08 %	1,22 %
Kypr	4	1,08 %	1,22 %
Lucembursko	4	1,08 %	1,22 %
Malta	3	0,79 %	0,92 %
EU	**352**	**100 %**	**99,93 %**

Příloha č.4: Indexy sil členských zemí EU podle pravidel Lisabonské smlouvy

Stát	Počet obyvatel	SSI	PBI
Německo	80 780 000	15,68 %	10,27 %
Francie	65 856 600	12,08 %	8,45 %
Velká Británie	64 308 300	11,86 %	8,34 %
Itálie	60 782 700	10,98 %	7,89 %
Španělsko	46 507 800	8,16 %	6,30 %
Polsko	38 495 700	6,69 %	5,14 %
Rumunsko	19 942 600	3,83 %	3,81 %
Nizozemí	16 829 300	3,28 %	3,48 %
Belgie	11 204 000	2,31 %	2,89 %
Řecko	10 992 600	2,22 %	2,84 %
Česká republika	10 512 400	2,14 %	2,82 %
Portugalsko	10 427 300	2,14 %	2,81 %
Maďarsko	9 879 000	2,05 %	2,75 %
Švédsko	9 644 900	2,05 %	2,73 %
Rakousko	8 507 800	1,80 %	2,61 %
Bulharsko	7 245 700	1,63 %	2,47 %
Dánsko	5 627 200	1,37 %	2,31 %
Finsko	5 451 300	1,29 %	2,29 %
Slovensko	5 415 900	1,29 %	2,29 %
Irsko	4 604 000	1,21 %	2,20 %
Chorvatsko	4 246 700	1,12 %	2,15 %
Litva	2 943 500	0,88 %	1,99 %
Slovinsko	2 061 100	0,80 %	1,93 %
Lotyšsko	2 001 500	0,72 %	1.93 %
Estonsko	1 315 800	0,63 %	1,85 %
Kypr	858 000	0,55 %	1,80 %
Lucembursko	549 700	0,54 %	1,77 %
Malta	425 400	0,53 %	1,76 %
EU	**507 416 800**	**99,83 %**	**97,94 %**

8 Zdroje

[1] MOUDRÝ, Ing. Marek. *Evropská unie v kostce.* Praha: Jalna, 2017. ISBN 978-80-86396-88-0.

[2] https://cs.wikipedia.org/wiki/John_Forbes_Nash

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Game_theory#History

[4] STRAFFIN, Philip D. Game theory and strategy. Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 244 s. ISBN 08-838-5637-9.

[5] BRÄUNINGER Thomas. Software: Indices of Power (IOP) 2.0. Dostupné z: http://www.tbraeuninger.de/download/

[6] Banzhaf Power Index and Shapley-Shubik Power Indices. Dostupné z: https://math.temple.edu/~conrad/Power/BPIandSSPI.html

[7] ChartGo — The simple graph maker. Dostupné z: http://www.chartgo.com/modify.do

[8] MCCARTY, Nolan a Adam MEIROWITZ. Political Game Theory. Dostupné z: http://www.princeton.edu/~nmccarty/Political_Game_Theory%20.pdf

[9] Population. In: Eurostat. Dostupné z: http://epp.eurostat.ec.europa.eu/cache/ITY_PUBLIC/3-10072014-BP/EN/3-10072014-BP-EN.PDF

[10] http://homepages.warwick.ac.uk/~ecaae/index.html

[11] http://www.consilium.europa.eu/cs/council-eu/

[12] TURNOVEC František, MERCIK Jacek W., MAZURKIEWICZ Mariusz: Power indices: Shapley-Shubik or Penrose-Banzhaf?, 2004.

[13] http://www.fit.vutbr.cz/~hrubym/THE/sk-5-koop.pdf

[14] http://www.investopedia.com/terms/s/shapley-value.asp

[15] https://cs.wikipedia.org/wiki/Kooperativn%C3%AD_hra#Shapleyova_hodnota

[16] http://www.library.fa.ru/files/Roth2.pdf