

Počítání na soudobých počítačových architekturách -
matice, grafy, sítě -
diskrétní matematika ve vědecko-technických výpočtech

Miroslav Tůma

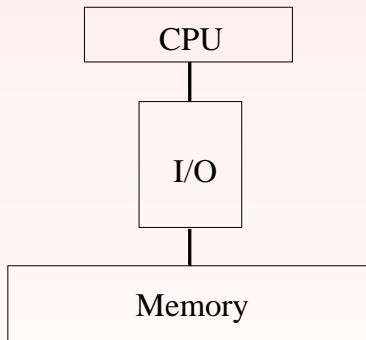
Katedra numerické matematiky, MFF UK

`mirektuma@karlin.mff.cuni.cz`

MFF UK, 30.3.2017

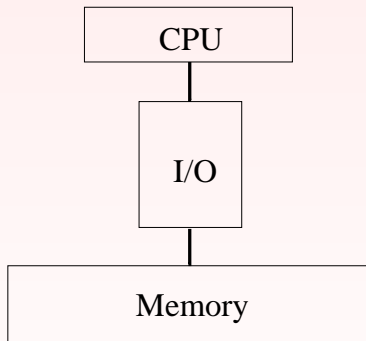
- 1 Úvod do problému
- 2 Přemítání o problému
- 3 Dělení grafů na části
- 4 Rozděl a spojuj
- 5 Závěr

Tradiční pohled na počítače



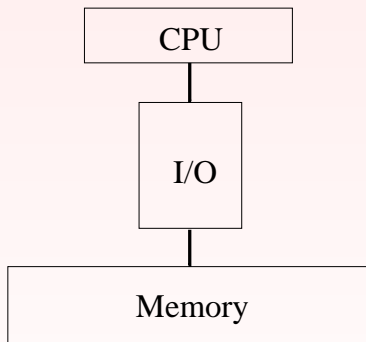
- Takové počítače podle tohoto (von Neumannovského) modelu už samozřejmě neexistují.

Tradiční pohled na počítače



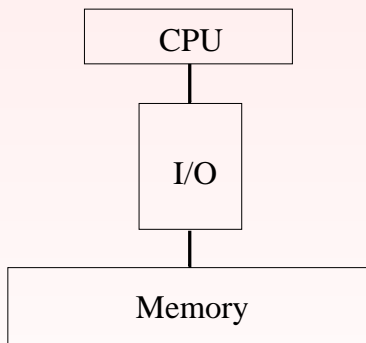
- Takové počítače podle tohoto (von Neumannovského) modelu už samozřejmě neexistují.
- Z praktického pohledu:

Tradiční pohled na počítače



- I v takto jednoduchém modelu **kterákoli z těchto tří částí** může činit problémy při **počítání**.

Tradiční pohled na počítače



- I v takto jednoduchém modelu **kterákoli z těchto tří částí** může činit problémy při **počítání**.
- Vývoj počítačových architektur výkon klasického modelu **průběžně vylepšuje**, ale činí jej také **vnitřně složitějším**
- → **soudobé** (paralelní) **počítačové architektury**

Paralelismus v počítačových architekturách

- Nedají se počítače zrychlit bez zvyšování jejich vnitřní složitosti?
 - ▶ 😊: Počítače jsou pořád rychlejší (Moore's law - počet tranzistorů na čipu se zvětšuje ročně přibližně na dvojnásobek - 2.3k (4004, 1971) → 5G (AMD Xbox, 2013)): **Ale již více než deset let jsou komoditní procesory vícejádrové.**
 - ▶ 😞: **Velikost paměti už tak rychle neroste.**
 - ▶ 😞: Fyzikální limity (**rychlost světla, tepelná disipace**, absolutní kvantová omezení (**Bremmermanova mez** - maximální výpočetní rychlost závislá na Einsteinově ekvivalenci a Heisenbergově principu, **Landauerova mez** na minimální spotřebu energie - omezení závislé na Boltzmannově konstantě a absolutní teplotě, atd.)
- Potřebujeme vůbec stále vyšší výkon? Co vlastně potřebujeme počítat?

Paralelismus v počítačových architekturách

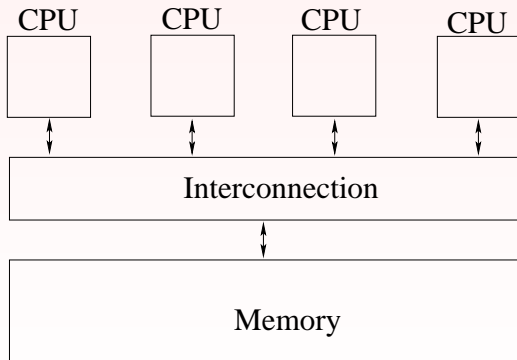
- Nedají se počítače zrychlit bez zvyšování jejich vnitřní složitosti?
 - ▶ 😊: Počítače jsou pořád rychlejší (Moore's law - počet tranzistorů na čipu se zvětšuje ročně přibližně na dvojnásobek - 2.3k (4004, 1971) → 5G (AMD Xbox, 2013))
 - ▶ 😞: **Velikost paměti už tak rychle neroste.**
 - ▶ 😞: Fyzikální limity (**rychlost světla**, **tepelná disipace**, absolutní kvantová omezení (**Bremmermanova mez** - maximální výpočetní rychlost závislá na Einsteinově ekvivalenci a Heisenbergově principu, **Landauerova mez** na minimální spotřebu energie - omezení závislé na Boltzmannově konstantě a absolutní teplotě, atd.)
- Potřebujeme vůbec stále vyšší výkon? Co vlastně potřebujeme počítat?
 - ▶ Modelování klimatu (přesnější a globálnější modely), Skládání proteinů (léčení Alzheimerovy a Parkinsonovy nemoci)
 - ▶ Energetický výzkum (spalování, solární články, baterie, větrná energie)
 - ▶ Deformace konstrukcí a dopravních prostředků, Turbulentní proudění, Zobrazovací metody v medicíně a mnoho dalších.

Úvod do problému

- Paralelní (a tedy i stále složitější) počítače jsou **přirozenou** odpovědí na nutnost počítání.
- Navíc, jsou obecně (energeticky, prostorově - Groschův zákon (1965)) **výhodnější**. Byť nám přinášejí nové problémy.

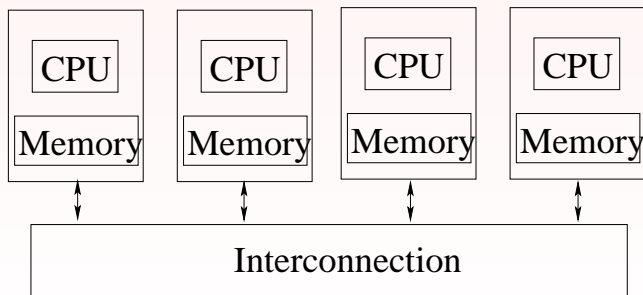
Úvod do problému

- Paralelní (a tedy i stále složitější) počítače jsou **přirozenou** odpovědí na nutnost počítání.
- Navíc, jsou obecně (energeticky, prostorově - Groschův zákon (1965)) **výhodnější**. Byť nám přinášejí nové problémy.



Úvod do problému

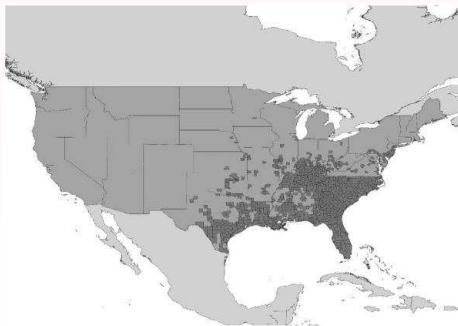
- Paralelní (a tedy i stále složitější) počítače jsou **přirozenou** odpovědí na nutnost počítání.
- Navíc, jsou obecně (energeticky, prostorově - Groschův zákon (1965)) **výhodnější**. Byť nám přinášejí nové problémy.



Úvod do problému

- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost **rozdělení** úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například **load balancing**)

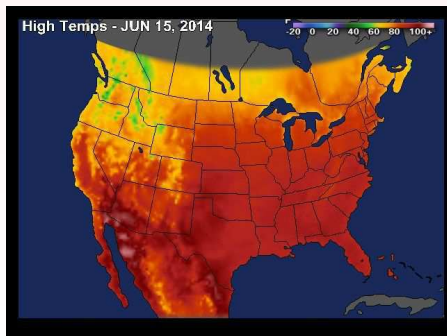
Častá reprezentace úlohy: oblast
(rozšíření komára *Aedes Albopictus* - tiger mosquito)



Úvod do problému

- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost **rozdělení** úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například **load balancing**)

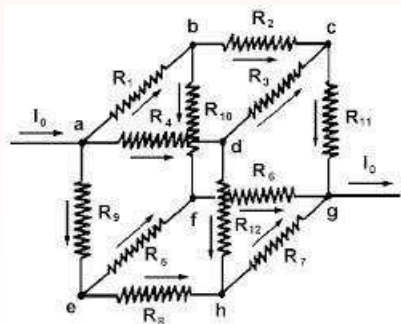
Častá reprezentace úlohy: oblast
(geografické rozložení teplotních maxim v konkrétní čase)



Úvod do problému

- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost **rozdělení** úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například **load balancing**)

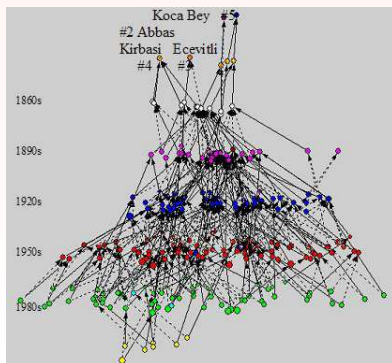
Častá reprezentace úlohy: oblast
(propojení v elektrické síti)



Úvod do problému

- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost **rozdělení** úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například **load balancing**)

Častá reprezentace úlohy: oblast
(sít může být složitější - genealogická informace)

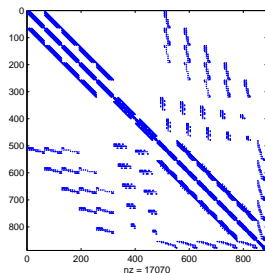


Úvod do problému

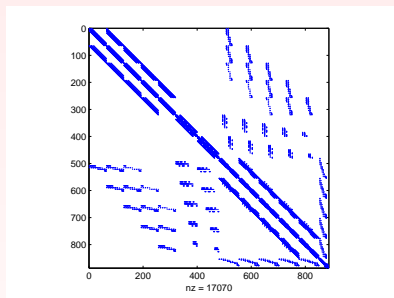
- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost **rozdělení** úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například **load balancing**)

Schématické zachycení situace: graf

- Graf nám reprezentuje matici (strukturu nulových a nenulových prvků, ale i hodnoty) a **tvoří nadstrukturu nad výpočty**



Úvod do problému



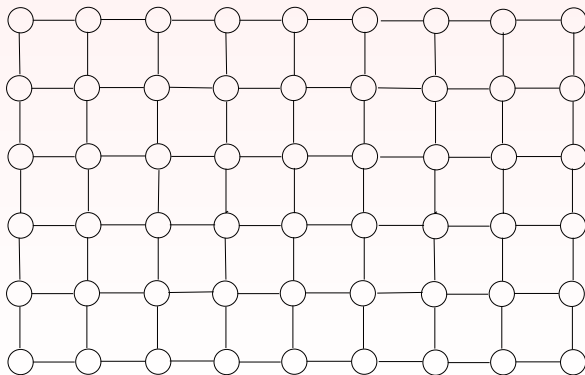
- Říkáme, že matice je **řídka**
- Dimenze klidně až milióny, miliardy
- Její prvky mohou být vytvořeny přibližnými **integrály** na malých oblastech, jak jsme je viděli výše.

Souhrnně, “matematika, jak ji zatím známe”, je **uvnitř**, nad ní je **“struktura”** a nad ní zase matematika, jak ji známe. Ale všechno to je matematika!

Schématické zachycení situace: graf

(zde pravidelný, ale viděli jsme; vrcholy, hrany simulují realitu)

Například: hrany odpovídají propojkám nebo tokům, vrcholy: rychlosti, tlaky

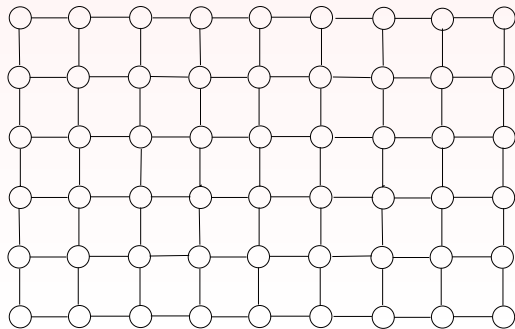


Formulace problému

- Oblast je třeba rozdělit, abychom ji mohli **přiřadit** jednotlivým procesorům (procesům)
- Jak?
 - **Rovnoměrně** (pokud procesory budou pracovat podobně efektivně)
 - **Styk** podoblastí (nazývaný **separátor**) by měl být malý.

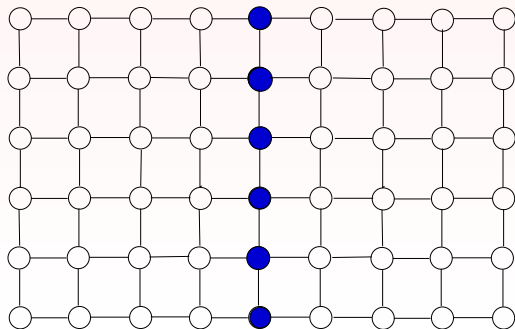
Formulace problému

- Oblast je třeba rozdělit, abychom ji mohli **přiřadit** jednotlivým procesorům (procesům)
- Jak?
 - **Rovnoměrně** (pokud procesory budou pracovat podobně efektivně)
 - **Styk** podoblastí (nazývaný **separátor**) by měl být malý.



Formulace problému

- Oblast je třeba rozdělit, abychom ji mohli **přičadit** jednotlivým procesorům (procesům)
- Jak?
 - **Rovnoměrně** (pokud procesory budou pracovat podobně efektivně)
 - **Styk** podoblastí (nazývaný **separátor** by měl být malý).



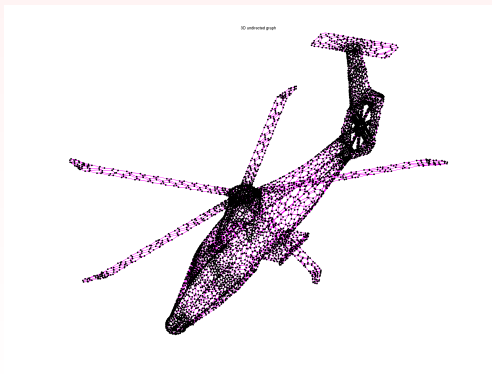
- 1 Úvod do problému
- 2 Přemítání o problému
- 3 Dělení grafů na části
- 4 Rozděl a spojuj
- 5 Závěr

- Když je ten **graf pravidelný**, asi se nám to povede nějakým způsobem stříhnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...

- Když je ten **graf pravidelný**, asi se nám to povede nějakým způsobem stříhnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...
 - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký **realistický**.

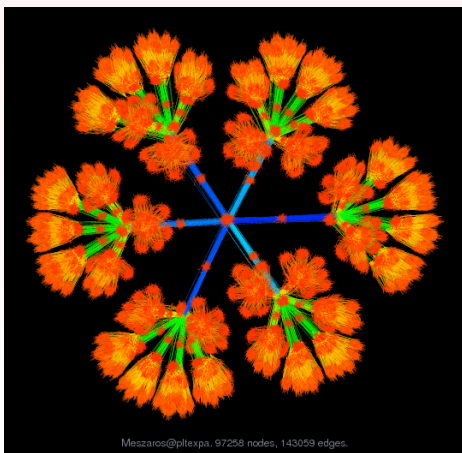
Přemítání o problému

- Když je ten **graf pravidelný**, asi se nám to povede nějakým způsobem stříhnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...
 - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký **realistický**.
 - **Například tenhle.**



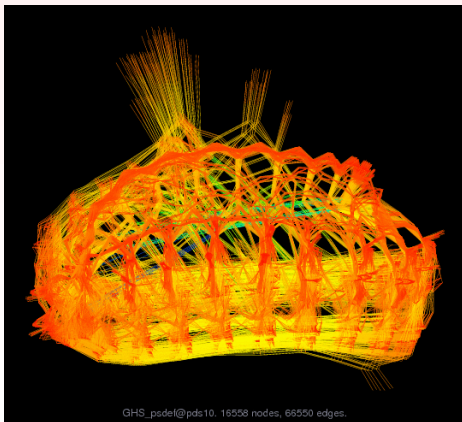
Přemítání o problému

- Když je ten **graf pravidelný**, asi se nám to povede nějakým způsobem stříhnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...
 - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký **realistický**.
 - **A co tento?**

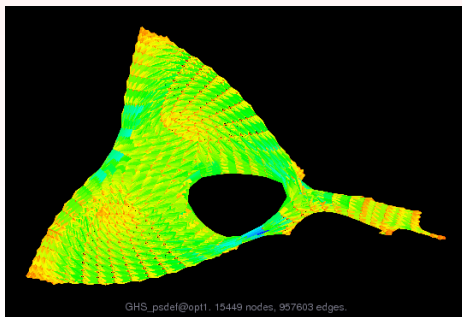


Přemítání o problému

- Když je ten **graf pravidelný**, asi se nám to povede nějakým způsobem stříhnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...
 - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký **realistický**.
 - **Jiný exemplář**.



- Když je ten **graf pravidelný**, asi se nám to povede nějakým způsobem stříhnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...
 - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký **realistický**.
 - **A ještě jeden grafík.**



Shrňme si, co máme

- Oblast potřebujeme rozdělit na podoblasti,

Shrňme si, co máme

- Oblast potřebujeme **rozdělit na podoblasti**,
- Na podoblastech **“počítat”** úlohy, které jsou dány aplikacemi: jednoduché soustavy, ale i třeba komplikované diferenciální rovnice. Možná bude třeba počítat vícekrát (zahrnuje-li model dynamiku procesů)

Shrňme si, co máme

- Oblast potřebujeme **rozdělit na podoblasti**,
- Na podoblastech **“počítat”** úlohy, které jsou dány aplikacemi: jednoduché soustavy, ale i třeba komplikované diferenciální rovnice. Možná bude třeba počítat vícekrát (zahrnuje-li model dynamiku procesů)
- Pak to vše nějak dát **dohromady**.

Shrňme si, co máme

- Oblast potřebujeme **rozdělit na podoblasti**,
- Na podoblastech **“počítat”** úlohy, které jsou dány aplikacemi: jednoduché soustavy, ale i třeba komplikované diferenciální rovnice. Možná bude třeba počítat vícekrát (zahrnuje-li model dynamiku procesů)
- Pak to vše nějak dát **dohromady**.
- **Poznámka**: paralelní počítání nebylo jedinou a první motivací dělit grafy:
- Například: **sériová konstrukce procesorů** potřebuje řešení stejného problému - **součástky a jejich propojení** (např. Kernighan, Lin, Bell Labs, 1969 - 1971)

V každém případě, **je zapotřebí hlubší vhled**

- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek

V každém případě, **je zapotřebí hlubší vhled**

- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek
 - ① (1) Jak automaticky dělit, abychom splnili dva výše uvedené úkoly (rovnoměrnost, minimalitu propojek)?

V každém případě, **je zapotřebí hlubší vhled**

- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek
 - ① (1) Jak automaticky dělit, abychom splnili dva výše uvedené úkoly (rovnoměrnost, minimalitu propojek)?
 - ② (2) Když už chceme počítat nejprve odděleně a pak částečné výsledky spojovat (“rozděl a panuj”), **nenadřeme se navíc?**

V každém případě, **je zapotřebí hlubší vhled**

- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek
 - ❶ (1) Jak automaticky dělit, abychom splnili dva výše uvedené úkoly (rovnoměrnost, minimalitu propojek)?
 - ❷ (2) Když už chceme počítat nejprve odděleně a pak částečné výsledky spojovat (“rozděl a panuj”), **nenadřeme se navíc?**
 - ❸ Dva články z roku 1973 patří mezi zakladatelské statě **nových podoborů** informatiky – počítačové vědy – výpočetní matematiky (dosaďte dle svého uvážení), které na tyto okruhy otázek začaly odpovídat:
 - články (1) Miroslava Fiedlera a (2) Alana George

V každém případě, **je zapotřebí hlubší vhled**

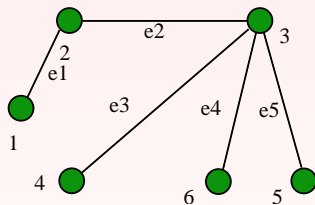
- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek
 - ❶ (1) Jak automaticky dělit, abychom splnili dva výše uvedené úkoly (rovnoměrnost, minimalitu propojek)?
 - ❷ (2) Když už chceme počítat nejprve odděleně a pak částečné výsledky spojovat (“rozděl a panuj”), **nenadřeme se navíc?**
 - ❸ Dva články z roku 1973 patří mezi zakladatelské statě **nových podoborů** informatiky – počítačové vědy – výpočetní matematiky (dosaďte dle svého uvážení), které na tyto okruhy otázek začaly odpovídat:

články (1) Miroslava Fiedlera a (2) Alana George
- **Varování pro jedince matematictější náтуры:** následující text neobsahuje pro jednoduchost výkladu některé technické předpoklady a může tak i slabším povahám uškodit.

- 1 Úvod do problému
- 2 Přemítání o problému
- 3 Dělení grafů na části**
- 4 Rozděl a spojuj
- 5 Závěr

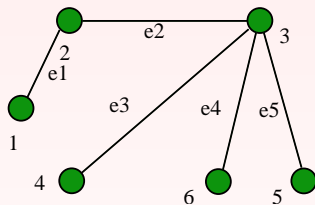
Dělení grafů na části

- Aby se nám dobře se sítěmi a grafy dobře pracovalo, pěkně si je označujeme



Dělení grafů na části

- Aby se nám dobře se sítěmi a grafy dobře pracovalo, pěkně si je označujeme



- A můžeme si je zapisovat do kompaktních tvarů, některým z nichž říkáme **matice**. Tohle je například matice, nazývaná **Laplacián grafu**:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ & & -1 & 1 & & \\ & & -1 & & 1 & \\ & & -1 & & & 1 \end{pmatrix} = D - A$$

- Proč si vlastně grafy a sítě do schémat typu matice zapisujeme?

Dělení grafů na části

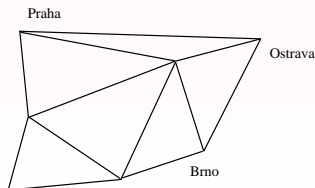
- Proč si vlastně grafy a sítě do schémat typu matice zapisujeme?
- Důvodů je víc: například: rozvinutý **teoretický aparát** pro operace s nimi, výrazné zjednodušování **počítačových implementací**

Dělení grafů na části

- Proč si vlastně grafy a sítě do schémat typu matice zapisujeme?
- Důvodů je víc: například: rozvinutý **teoretický aparát** pro operace s nimi, výrazné zjednodušování **počítačových implementací**
- Ad teoretický aparát ... některé vlastnosti matic a tedy i **vlastnosti grafů** zprostředkovaných maticemi není příliš vidět:

Dělení grafů na části

- Proč si vlastně grafy a sítě do schémat typu matice zapisujeme?
- Důvodů je víc: například: rozvinutý **teoretický aparát** pro operace s nimi, výrazné zjednodušování **počítačových implementací**
- Ad teoretický aparát ... některé vlastnosti matic a tedy i **vlastnosti grafů** zprostředkovaných maticemi není příliš vidět:
 - ▶ Skoro násobení: Hledání nejkratších cest **mezi všemi vrcholy grafu navzájem** se provádí algoritmem, který je velmi blízký maticovému násobení (Floyd (1962), Roy (1959), Warshall (1962))



Dělení grafů na části

- Opravdické násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L : Lx .

Dělení grafů na části

- Opravdivé násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L : Lx .
- Velikosti x a Lx měříme jejich normami $\|x\|_2$ a $\|Lx\|_2$.

Dělení grafů na části

- Opravdické násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L : Lx .
- Velikosti x a Lx měříme jejich normami $\|x\|_2$ a $\|Lx\|_2$.
- Kolikrát může být $\|Lx\|_2^2 \equiv x^T L^T Lx$ větší nebo menší než $\|x\|_2^2$?

Dělení grafů na části

- Opravdivé násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L : Lx .
- Velikosti x a Lx **měříme** jejich normami $\|x\|_2$ a $\|Lx\|_2$.
- Kolikrát může být $\|Lx\|_2^2 \equiv x^T L^T Lx$ větší nebo menší než $\|x\|_2^2$?
- Pro Laplacián souvislého grafu je odpověď dána druhou mocninou největšího a druhého nejmenšího vlastního čísla λ matice L a příslušnými vlastními vektory.

$$Lx = \lambda x$$

- **Vlastní čísla** jsou právě takové vlastnosti matice, které nejsou na první pohled vidět, ale naprosto podstatně ji **charakterizují**.

Dělení grafů na části

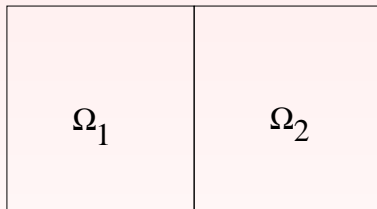
- Opravdivé násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L : Lx .
- Velikosti x a Lx **měříme** jejich normami $\|x\|_2$ a $\|Lx\|_2$.
- Kolikrát může být $\|Lx\|_2^2 \equiv x^T L^T Lx$ větší nebo menší než $\|x\|_2^2$?
- Pro Laplacián souvislého grafu je odpověď dána druhou mocninou největšího a druhého nejmenšího vlastního čísla λ matice L a příslušnými vlastními vektory.

$$Lx = \lambda x$$

- **Vlastní čísla** jsou právě takové vlastnosti matice, které nejsou na první pohled vidět, ale naprosto podstatně ji **charakterizují**.
- Miroslav Fiedler (1973) ukázal, že druhé nejmenší vlastní číslo Laplaciánu souvisí s **dobrou rozdělitelností** grafu. **Jak to můžeme nahlédnout?**

Dělení grafů na části

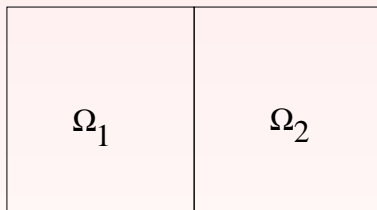
- Mějme graf reprezentující oblast a chtějme jej rozdělit. Jeho hrany označme E .



Ω

Dělení grafů na části

- Mějme graf reprezentující oblast a chtějme jej rozdělit. Jeho hrany označme E .



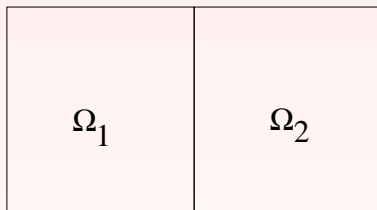
Ω

- Zvolme $x_i = 1$ pro Ω_1 a $x_i = -1$ pro Ω_2 . Uvažujme Laplacián grafu.

$$\sum_{(i,j) \in E} (x_i - x_j)^2 = 4 \times \text{počet hran mezi } \Omega_1 \text{ a } \Omega_2$$

Dělení grafů na části

- Mějme graf reprezentující oblast a chtějme jej rozdělit. Jeho hrany označme E .



Ω

- Zvolme $x_i = 1$ pro Ω_1 a $x_i = -1$ pro Ω_2 . Uvažujme Laplacián grafu.

$$\sum_{(i,j) \in E} (x_i - x_j)^2 = 4 \times \text{počet hran mezi } \Omega_1 \text{ a } \Omega_2$$

- No ale taky: $x^T Lx = x^T Dx - x^T Ax = \sum_i d_i x_i^2 - 2 \sum_{(i,j) \in E} x_i x_j = \sum_{(i,j) \in E} (x_i - x_j)^2$

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy **algebraicky** jako problém vlastních čísel.

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy **algebraicky** jako problém vlastních čísel.
- Pozor na to, že postup od kvadratické formy zpět nenajde obvykle **diskrétní** řešení, ale pouze jeho spojitou aproximaci (**relaxaci**).

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy **algebraicky** jako problém vlastních čísel.
- Pozor na to, že postup od kvadratické formy zpět nenajde obvykle **diskrétní** řešení, ale pouze jeho spojitou aproximaci (**relaxaci**).
- Nikoliv náhodná souvislost s hledáním Google algoritmem - **zase problém vlastních čísel**

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy **algebraicky** jako problém vlastních čísel.
- Pozor na to, že postup od kvadratické formy zpět nenajde obvykle **diskrétní** řešení, ale pouze jeho spojitou aproximaci (**relaxaci**).
- Nikoliv náhodná souvislost s hledáním Google algoritmem - **zase problém vlastních čísel**
- Ohromný rozvoj oboru po roce 1990 (Pothen, Simon, Liou, 1990; Pothen, Simon, Wang, 1992 atd.); Software (Chaco - Sandia Lab)

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy **algebraicky** jako problém vlastních čísel.
- Pozor na to, že postup od kvadratické formy zpět nenajde obvykle **diskrétní** řešení, ale pouze jeho spojitou aproximaci (**relaxaci**).
- Nikoliv náhodná souvislost s hledáním Google algoritmem - **zase problém vlastních čísel**
- Ohromný rozvoj oboru po roce 1990 (Pothen, Simon, Liou, 1990; Pothen, Simon, Wang, 1992 atd.); Software (Chaco - Sandia Lab)

Miroslav Fiedler - Fiedlerův vektor

Outline

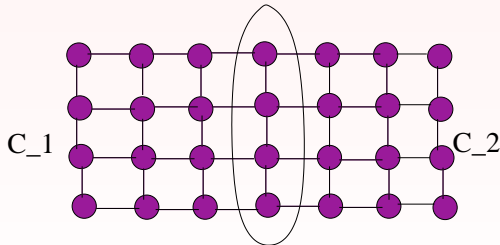
- 1 Úvod do problému
- 2 Přemítání o problému
- 3 Dělení grafů na části
- 4 Rozděl a spojuj**
- 5 Závěr

- Zopakujme si formulaci našeho druhého problému: když rozdělíme, nebude to na úkor počtu operací? Nebylo by lepší spočítat úlohu najednou.

- Zopakujme si formulaci našeho druhého problému: když rozdělíme, nebude to na úkor počtu operací? Nebylo by lepší spočítat úlohu najednou.
 - Ne. **Ba naopak.** I když pomineme fakt, že paralelně (jít) musíme

- Zopakujme si formulaci našeho druhého problému: když rozdělíme, nebude to na úkor počtu operací? Nebylo by lepší spočítat úlohu najednou.
 - Ne. **Ba naopak**. I když pomineme fakt, že paralelně (jít) musíme
 - Do řešení problému totiž vneseme další důležitý prvek, který začal hýbat počítáním hlavně později: **Pravidelnost do nepravidelného**.

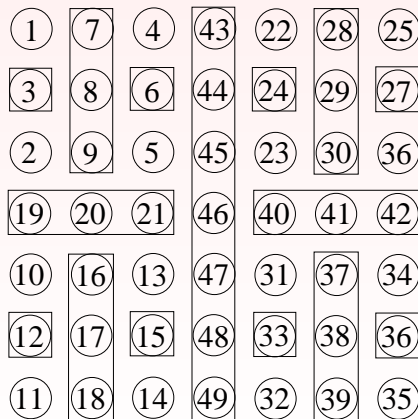
- Zopakujme si formulaci našeho druhého problému: když rozdělíme, nebude to na úkor počtu operací? Nebylo by lepší spočítat úlohu najednou.
 - Ne. **Ba naopak**. I když pomineme fakt, že paralelně (jít) musíme
 - Do řešení problému totiž vneseme další důležitý prvek, který začal hýbat počítáním hlavně později: **Pravidelnost do nepravidelného**.



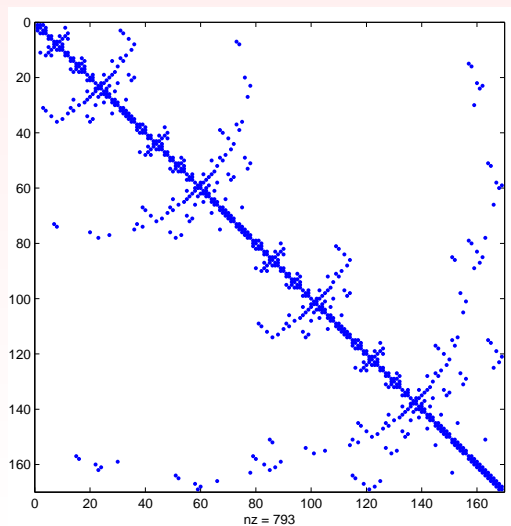
Matice po jednom dělení

	C_1	C_2	S
C_1			
C_2			
S			

Rozdělit můžeme vícrát - rekurzivně



Dělíme vícekrát: krásnoučká pravidelná matice



Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím **regulovaná řidkost**.

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím **regulovaná řídkost**.
- Která sice činila potíže **klasickým** implementacím řešičů systémů, ale to je už jiná historie ...

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím **regulovaná řídkost**.
- Která sice činila potíže **klasickým** implementacím řešičů systémů, ale to je už jiná historie ...
- Ale hlavně zavedla do výpočtů **pravidelnost** hierarchického přístupu.

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím **regulovaná řidkost**.
- Která sice činila potíže **klasickým** implementacím řešičů systémů, ale to je už jiná historie ...
- Ale hlavně zavedla do výpočtů **pravidelnost** hierarchického přístupu.
- Tyto výsledky a následný výzkum velmi silně ovlivnily ohromnou část počítání od konce minulého století.

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím **regulovaná řidkost**.
- Která sice činila potíže **klasickým** implementacím řešičů systémů, ale to je už jiná historie ...
- Ale hlavně zavedla do výpočtů **pravidelnost** hierarchického přístupu.
- Tyto výsledky a následný výzkum velmi silně ovlivnily ohromnou část počítání od konce minulého století.

Alan George - nested dissection

Outline

- 1 Úvod do problému
- 2 Přemítání o problému
- 3 Dělení grafů na části
- 4 Rozděl a spojuj
- 5 Závěr**

- Dvacet let od roku 1973 se **kombinace** efektivního dělení grafů a hierarchické reprezentace matic stává a nadále zůstává **absolutně nejužívanějším modelem** pro paralelní počítání reprezentované rozkladem oblasti.

Děkuji a Děkujeme.