Ukázky aplikací matematiky
Objekty geometrického modelování

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta

17. března 2016

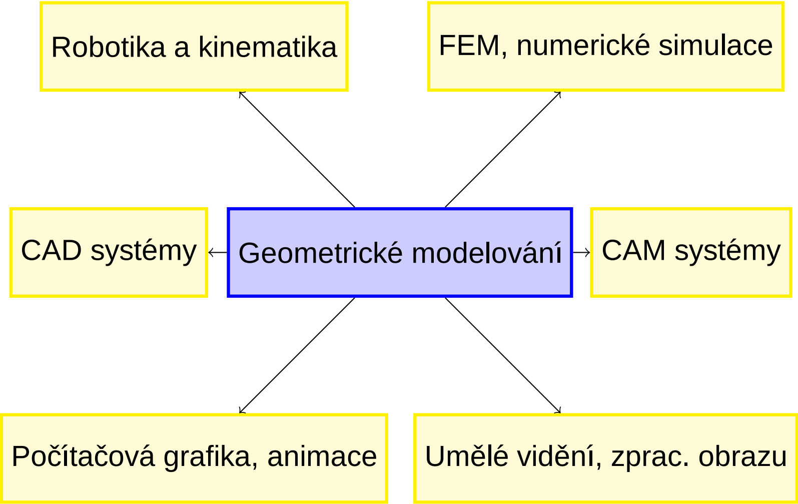
Obsah dnešní přednášky

- Co je to geometrické modelování?
- Polynomiální křivky v různých bazích - Beziérovy křivky.
- Cesta od Beziérových křivek k NURBS plochám.
- Některé problémy a jejich možná řešení.

Motto:
Dimenze 3 je fajn!

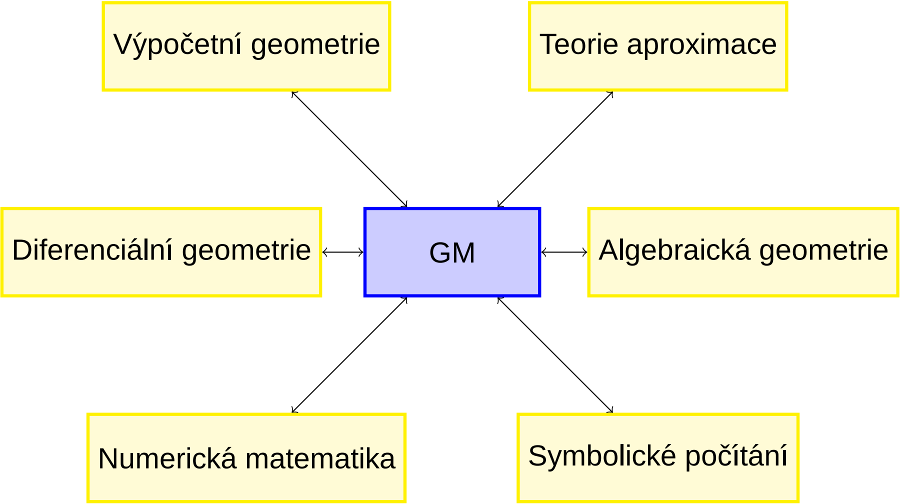
Co je geometrické modelování?

- moderní teoretická geometrická disciplína
- studuje objekty a reprezentace vhodné pro geometrické aplikace

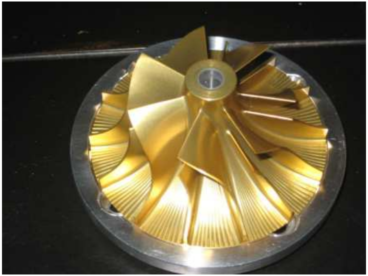


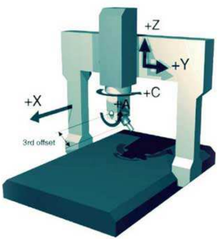
Teoretické a metodologické souvislosti

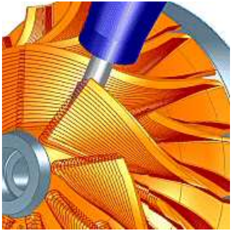
Vzájemné ovlivňování:



Obrábění rotoru turbodmychadla:



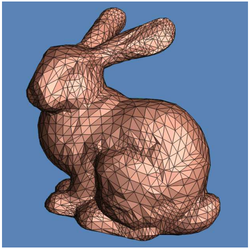




- pouze rozvinutelné plochy je možno obrábět válcovou frézou, jinak nutně dochází k podřezu
- chyby jsou často marně odstraňovány pokusy o vyšší kvalitu a přesnost frézování
- návrh správného nástroje je obtížný geometrický problém

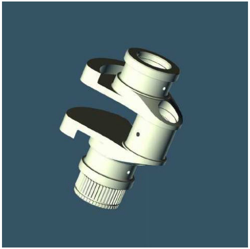
Dva hlavní typy geometrických reprezentací v GM

1. diskrétní či po částech lineární objekty, mnohostěny, mračna bodů



   - především v počítačové grafice, animacích, FEM ...
   - paradigmatem je trojúhelníkový mesh
   - metody výpočetní geometrie, diskrétní matematiky, diskrétní diferenciální geometrie ...

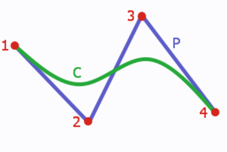
2. spojité a hladké reprezentace, C^n parametrizace, implicitní plochy

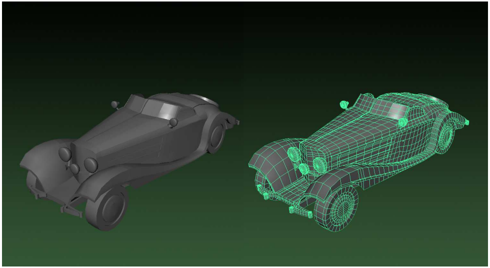


   - využívá se zejména v CAD, CAM, robotice ...
   - paradigmatem je po částech polynomiální či racionální parametrizace
   - užívá metod diferenciální a algebraické geometrie, teorie aproximace ...

Ráj racionálních parametrizací

- Bézierovy křivky mají mnoho dobrých vlastností (vysoká stabilita, intuitivní ovládání tvaru, efektivní vykreslení, výpočet polohy, omezení konvexním obalem, omezená variace)





- racionální po částech = NURBS (non-uniform rational B-splines)
- v CAD, CAM systémech jsou reprezentovány velmi efektivně
- neracionální reprezentace tradičně podporovány nejsou

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).
- Budeme studovat zejména vlastnosti nezávislé na parametrizaci.

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).
- Budeme studovat zejména vlastnosti nezávislé na parametrizaci.
- Křivka je *regulární*, pokud $\forall t \in I : \mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, 0)$.

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).
- Budeme studovat zejména vlastnosti nezávislé na parametrizaci.
- Křivka je *regulární*, pokud $\forall t \in I : \mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, 0)$.
- Vektor $\mathbf{c}'(t) \in \mathbb{R}^3$ se nazývá *tečný vektor* k parametrizované křivce $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).
- Budeme studovat zejména vlastnosti nezávislé na parametrizaci.
- Křivka je *regulární*, pokud $\forall t \in I : \mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, 0)$.
- Vektor $\mathbf{c}'(t) \in \mathbb{R}^3$ se nazývá *tečný vektor* k parametrizované křivce $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(t)$.
- Délku křivky vypočítáme jako $\int_\alpha^\beta |\mathbf{c}'(t)| dt$ a nezávisí na parametrizace.

Reparametrizace

- $\mathbf{c}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná křivka a $\varphi : J \to I$ hladné zobrazení intervalů, pak $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \tilde{\mathbf{c}}(\varphi(s))$ pro $s \in J$ je *reparametrizace křivky* $\mathbf{c}$.

Reparametrizace

- $\mathbf{c}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná křivka a $\varphi : J \to I$ hladné zobrazení intervalů, pak $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \tilde{\mathbf{c}}(\varphi(s))$ pro $s \in J$ je *reparametrizace křivky* $\mathbf{c}$.
- Zvolme $t_0 \in I$ a položme $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{c}'(u)| du$

Reparametrizace

- $\mathbf{c}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná křivka a $\varphi : J \to I$ hladné zobrazení intervalů, pak $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \tilde{\mathbf{c}}(\varphi(s))$ pro $s \in J$ je *reparametrizace křivky* $\mathbf{c}$.
- Zvolme $t_0 \in I$ a položme $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{c}'(u)| du$
- inverzní funkci k $s(t)$ označíme $t(s)$, označíme $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(t(s))$, $\left|\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{c}}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$

Reparametrizace

- $\mathbf{c}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná křivka a $\varphi : J \to I$ hladné zobrazení intervalů, pak $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \tilde{\mathbf{c}}(\varphi(s))$ pro $s \in J$ je *reparametrizace křivky* $\mathbf{c}$.
- Zvolme $t_0 \in I$ a položme $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{c}'(u)| du$
- inverzní funkci k $s(t)$ označíme $t(s)$, označíme $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(t(s))$, $\left|\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{c}}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$
- Křivka je *parametrizovaná obloukem*, pokud $|\mathbf{c}'(t)| = 1$.

Reparametrizace

- $\mathbf{c}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná křivka a $\varphi : J \to I$ hladné zobrazení intervalů, pak $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \tilde{\mathbf{c}}(\varphi(s))$ pro $s \in J$ je *reparametrizace křivky* $\mathbf{c}$.
- Zvolme $t_0 \in I$ a položme $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{c}'(u)| du$
- inverzní funkci k $s(t)$ označíme $t(s)$, označíme $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(t(s))$, $\left|\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{c}}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$
- Křivka je *parametrizovaná obloukem*, pokud $|\mathbf{c}'(t)| = 1$.
- Platí, že každou regulární křivku je možno parametrizovat obloukem.

Reparametrizace

- $\mathbf{c}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná křivka a $\varphi : J \to I$ hladné zobrazení intervalů, pak $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \tilde{\mathbf{c}}(\varphi(s))$ pro $s \in J$ je *reparametrizace křivky* $\mathbf{c}$.
- Zvolme $t_0 \in I$ a položme $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{c}'(u)| du$
- inverzní funkci k $s(t)$ označíme $t(s)$, označíme $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(t(s))$, $\left|\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{c}}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$
- Křivka je *parametrizovaná obloukem*, pokud $|\mathbf{c}'(t)| = 1$.
- Platí, že každou regulární křivku je možno parametrizovat obloukem.
- Pokud je $c(s)$ parametrizace obloukem, pak každá jiná parametrizace obloukem $\tilde{s}$ se získá z jako

$$\tilde{s} = \pm s + c,$$

kde c je vhodná konstanta

Jak parametrizovat kružnici (oblouk)?

Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.

Jak parametrizovat kružnici (oblouk)?

Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.
Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

Jak parametrizovat kružnici (oblouk)?

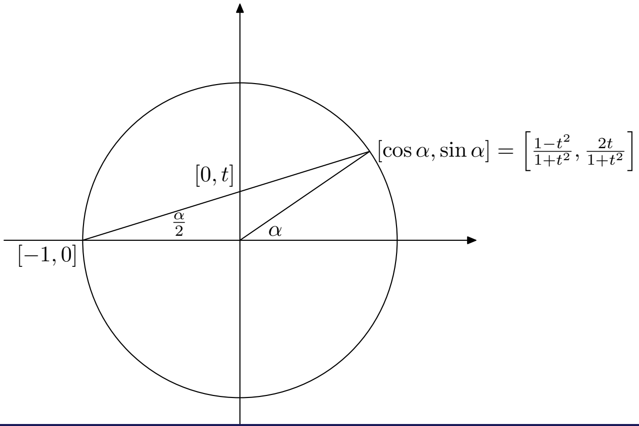
Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.
Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \text{kde } t = \tan(\alpha/2).$$

Jak parametrizovat kružnici (oblouk)?

Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.
Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{kde } t = \tan(\alpha/2).$$



Polynomiální rovinné křivky

- Rovinná polynomiální křivka je zobrazení z omezeného intervalu $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ tvaru $\mathbf{c}(t) = [p_x(t), p_y(t)]$, kde p_x, p_y jsou polynomy v t.
- Stupeň $\mathbf{c}(t)$ definujeme jako maximum stupňů p_x, p_y.
- Křivky stupně 0 jsou body, stupně 1 úsečky a stupně 2 části parabol.
- Křivky stupně 3 jsou pro aplikace nejdůležitější:
  - Mohou mít inflexe.
  - Mohou to být pravé 3d křivky s nenulovou torzí(při zobrazení do $\mathbb{R}^3$).
  - Mohou řešit tzv. Hermitovskou C^1 interpolaci.

Reparametrizace polynomálních křivek.

Uvažujme křivku

$$[1 + 3s - 3s^2 + 3s^3, 1 - 6s^2 + 6t^3]$$

na intervalu $s \in [-1, 2]$ a reparametrizujme jí na standartní interval $J = [0, 1]$. Co zůstane stejné, co se změní?

Dostáváme

$$[-8 + 54t - 108t^2 + 81t^3, -11 + 90t - 216t^2 + 162t^3]$$

pro $t \in [0, 1]$.

Báze kubických polynomů

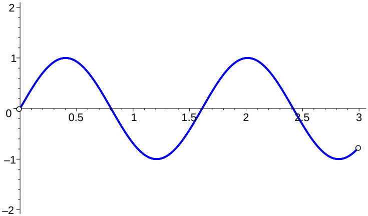
- Monomiální báze $\mathcal{M} = (1, t, t^2, t^3)$, v té je vlastně křivka $[-8 + 54t - 108t^2 + 81t^3, -11 + 90t - 216t^2 + 162t^3]$ vyjádřena.
- Můžeme ovšem upravit jako $[-8, -11] + [54, 90]t + [108, -216]t^2 + [81, 162]t^3$.
- Jakou jinou bázi můžeme zvolit, aby se něco zjednodušilo nebo zlepšilo?
- Bernsteinova báze (vítěz historického boje), Fergusonova interepolační báze.

Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\}$  $\mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$

Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.

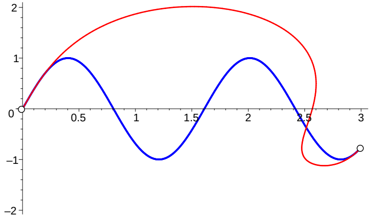


Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\}$  $\mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$

Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.

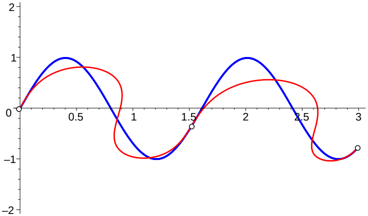


Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\}$  $\mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$

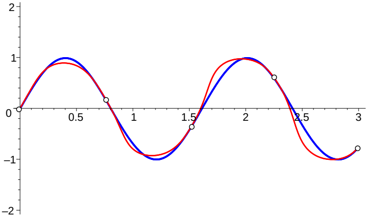
Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.



Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\}$  $\mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$

Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.

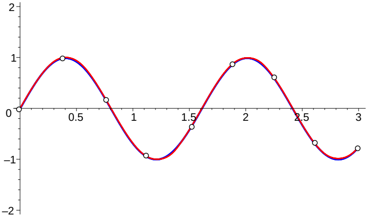


Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\}$  $\mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$

Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.



Fergusonova kubika

- Řešíme Hermitovskou interpolaci, máme předepsáno $\mathbf{c}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{c}(1) = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{V}_0$, $\mathbf{c}'(1) = \mathbf{V}_1$.
- Jak vypadá hledání kubické $\mathbf{c}(t)$ v různých bazích?
- Existuje taková baze $\mathcal{F} = (f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, ve které bude mít problém jako řešení

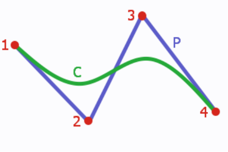
$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{P}_0 f_0(t) + \mathbf{P}_1 f_1(t) + \mathbf{V}_1 f_2(t) + \mathbf{V}_2 f_3(t)?$$

- ANO: (viz další slajd)
- Pozor na reparametrizaci! Je vhodné upravit délku vektorů $\mathbf{V}_0$ a $\mathbf{V}_1$ tak, aby byla přibližně rovna $||\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0||$.

Fergusonova báze

$$
\begin{aligned}
f_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 && (1)\\
f_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 && (2)\\
f_2(t) &= t - 2t^2 + t^3 && (3)\\
f_3(t) &= -t^2 + t^3 && (4)
\end{aligned}
$$

Bézierova křivka - ideál geometrického modelování



Vše je založeno na Bernsteinově bázi polynomů stupně nejvýše n

$$\mathcal{B}_n = (B_0^n(t), B_1^n(t), \cdots, B_n^n(t)),$$

kde $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}$. Křivku potom parametrizujeme jako

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{n}^{i=0} \mathbf{P}_i B_i^n(t),$$

kde $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ jsou kontrolní body.

`http://cagd-applets.webarchiv.kit.edu/mocca/html/noplugin/inhalt.html`

Výhody Bernsteinovy báze

- Nezápornost, symetrie a rozložní extrémů poskytují ideální modelářský základ.
- Rozklad jednotky poskytuje convex hall a variation diminishing vlastnosti.
- Algebraické vlastnosti Baze poskytují jednoduché algoritmy De Casteljau, degree elevation a pro derivování.
- Nejstabilnější báze na intervalu $[0, 1]$.

Cesta k NURBS plochám

Non Uniform Rational B-Splines

- Chceme lokální kontrolu, potřebujeme splajny (spline).
- Potřebujeme neuniformní definiční oblast kvůli různě velkým detailům.
- Potřebujeme racionální funkce kvůli kružnicím (vede na projektivní geometrii).
- Potřebujeme funkce více (dvou) proměnných kvůli plochám.

Vyhnání z ráje

Řada vlastností a konstrukcí pro polynomiální či racionální křivky není racionální:

- vyjádření délky křivky $\mathbf{c}(t)$, ale i normály, křivosti, torze

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\mathbf{c}'(\tau)||\, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}\, \mathrm{d}\tau$$

Vyhnání z ráje

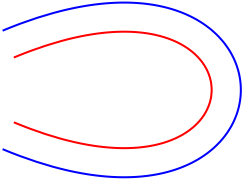
Řada vlastností a konstrukcí pro polynomiální či racionální křivky není racionální:

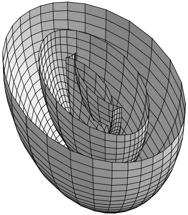
- vyjádření délky křivky $\mathbf{c}(t)$, ale i normály, křivosti, torze

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\mathbf{c}'(\tau)||\, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}\, \mathrm{d}\tau$$

- offset (paralelní křivka, plocha) ve vzdálenosti d:

$$\mathbf{o}_d = \mathbf{c} + d\mathbf{n}, \text{ kde např. pro plochy } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{||\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v||}$$





Vyhnání z ráje

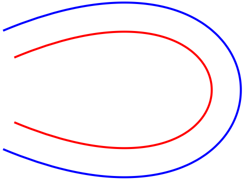
Řada vlastností a konstrukcí pro polynomiální či racionální křivky není racionální:

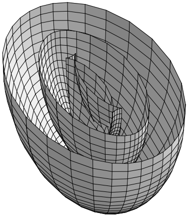
- vyjádření délky křivky $\mathbf{c}(t)$, ale i normály, křivosti, torze

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\mathbf{c}'(\tau)|| \,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} \,\mathrm{d}\tau$$

- offset (paralelní křivka, plocha) ve vzdálenosti d:

$$\mathbf{o}_d = \mathbf{c} + d\mathbf{n}, \text{ kde např. pro plochy } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{||\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v||}$$

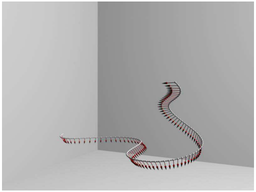




- offsety jsou klíčové v aplikacích $\Rightarrow$ tento problém je zásadní

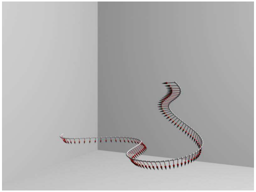
Ztráta racionality - repér podél křivky

- pro prostorovou racionální křivku neexistuje racionální repér



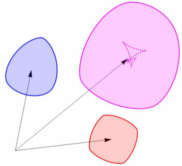
Ztráta racionality - repér podél křivky

- pro prostorovou racionální křivku neexistuje racionální repér



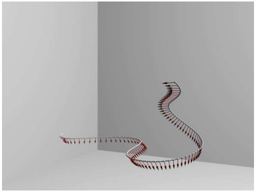
- konvoluce (hranice Minkowskiho součtu), není obecně racionální

$$\partial A \star \partial B = \{a + b : a \in \partial A, b \in \partial B, \mathbf{n}_a = \mathbf{n}_b\}$$



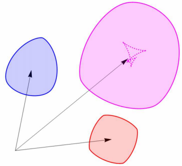
Ztráta racionality - repér podél křivky

- pro prostorovou racionální křivku neexistuje racionální repér




- konvoluce (hranice Minkowskiho součtu), není obecně racionální

$$\partial A \star \partial B = \{a + b : a \in \partial A, b \in \partial B, \mathbf{n}_a = \mathbf{n}_b\}$$



- konvoluce s kružnicí je offset

Křivky s Pythagorejským hodografem

- Bézierova křivka se nazává *s Pythagorean Hodograph*, jestliže délka jejího tečného vektoru (rychlost) závisí polynomiálně na parametru. To znamená, že existuje polynom $\sigma(t)$ tak, že

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma^2(t). \tag{5}$$

- Věta (Kubota 1972): Polynomy x', y', σ splňují (5) právě tehdy, když existují polynomy u, v, w takové, že

$$x' = w(u^2 - v^2), \qquad y' = w(2uv), \qquad \sigma = w(u^2 + v^2).$$

- Interpolace bude nelineární problém.

Výhodné užití komplexních čísel

Rovinná křivka

$$\mathbf{p}(t) = x(t) + y(t)\mathbf{i}$$

, pro kterou platí gcd(x', y')=1 je PH právě tehdy, když existuje komplexní polynom (nazývaný *preimage*)

$$\mathbf{z}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i}$$

takový, že

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{z}^2(t).$$

Délka tečného vektoru je pak rovna $||\mathbf{z}(t)||^2$.

C^1 interpolace s PH křivkami stupně 5

$$\mathbf{p}'(t) = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{h}_i B_i^4(t), \quad \mathbf{z}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{z}_i B_i^2(t), \quad t \in [0,1].$$

Interpolační podmínky jsou

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{h}_4 = \mathbf{t}_1, \text{ and } \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4} \mathbf{h}_i = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

a s užitím $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{z}^2(t)$ dostáváme 3 kvadratické rovnice

$$\mathbf{z}_0^2 = \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{z}_2^2 = \mathbf{t}_1,$$
$$(3\mathbf{z}_0 + 4\mathbf{z}_1 + 3\mathbf{z}_2)^2 = 120(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) - 15(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + 10\mathbf{z}_0\mathbf{z}_2.$$

Obecně dostaneme **čtyři** různé interpolanty $\mathbf{p}(t)$.