

Lineární a nelineární problémy v geometrickém modelování

Zbyněk Šír

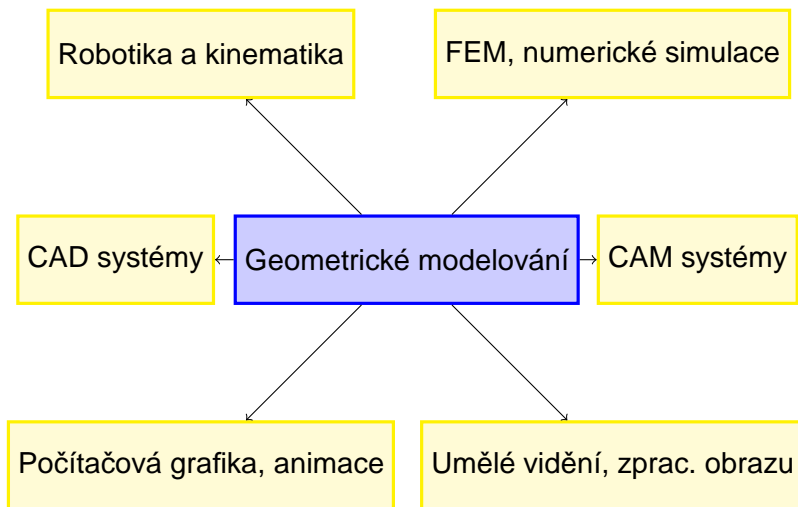
Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta



Ukázky aplikací matematiky

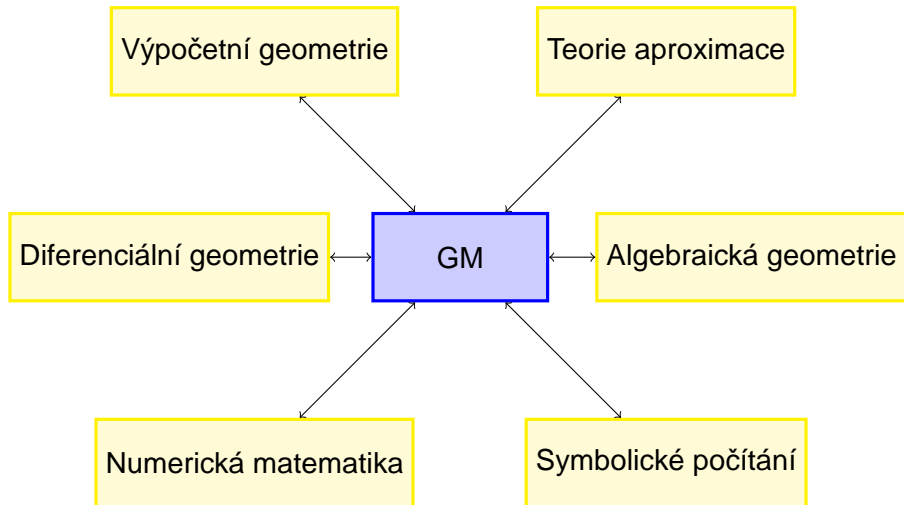
Co je geometrické modelování?

- moderní teoretická geometrická disciplína
- studuje objekty a reprezentace vhodné pro geometrické aplikace



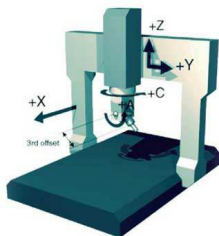
Teoretické a metodologické souvislosti

Vzájemné ovlivňování:



Správné pochopení geometrie je zásadní

Obrábění rotoru turbodmychadla:



- pouze rozvinutelné plochy je možno obrábět válcovou frézou, jinak nutně dochází k podřezu
- chyby jsou často marně odstraňovány pokusy o vyšší kvalitu a přesnost frézování
- návrh správného nástroje je obtížný geometrický problém

Správné pochopení geometrie je zásadní

Singularity paralelního robota (Steward platform):

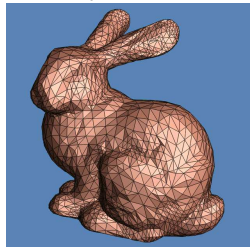


- dvě šesticí bodů leží na kuželosečkách a jsou projektivně příbuzné \Rightarrow samopohyb
- šest spojnic tvoří projektivní lineární komplex \Rightarrow robot lokálně ztrácí stupeň volnosti

Dva hlavní typy geometrických reprezentací v GM

1 diskrétní či po částech lineární objekty, mnohostěny, mračna bodů

- především v počítačové grafice, animacích, FEM ...
- paradigmatem je trojúhelníkový mesh
- metody výpočetní geometrie, diskrétní matematiky, diskrétní diferenciální geometrie ...



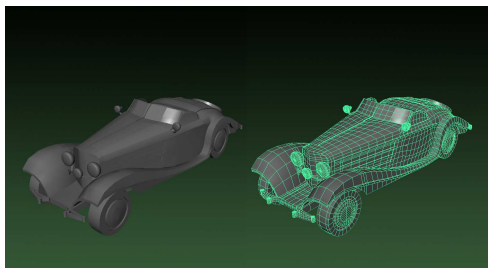
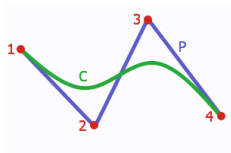
2 spojité a hladké reprezentace, C^n parametrizace, implicitní plochy

- využívá se zejména v CAD, CAM, robotice ...
- paradigmatem je po částech polynomiální či racionální parametrizace
- užívá metod diferenciální a algebraické geometrie, teorie aproximace ...



Ráj racionálních parametrizací

- Bézierovy křivky mají mnoho dobrých vlastností (vysoká stabilita, intuitivní ovládání tvaru, efektivní vykreslení, výpočet polohy, omezení konvexním obalem, omezená variace)



- racionální po částech = NURBS (non-uniform rational B-splines)
- v CAD, CAM systémech jsou reprezentovány velmi efektivně
- neracionální reprezentace tradičně podporovány nejsou

Vše je založeno na Bernsteinově bázi polynomů stupně nejvýše n

$$(B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)),$$

kde $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}$. Křivku potom parametrizujeme jako

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t),$$

kde $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ jsou kontrolní body.

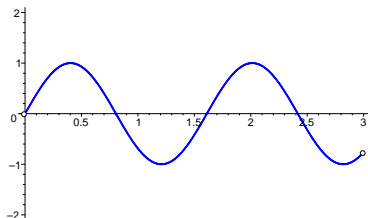
<http://cagd-applets.webarchiv.kit.edu/mocca/html/noplugin/inhalt.html>

Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestavit křivku, která interpoluje hraniční data



Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.



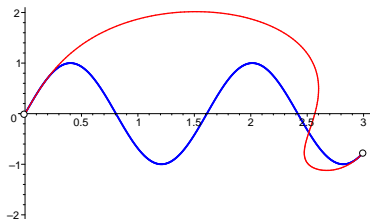
Vyzkoušejme si C^1 Hermitovskou interpolaci v různých bazích: monomiální, Bernsteinova, existuje nějaká optimální база?

Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestavit křivku, která interpoluje hraniční data



Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.



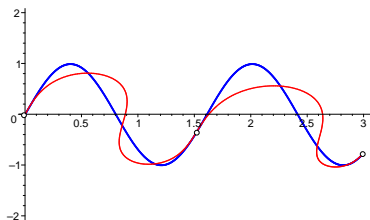
Vyzkoušejme si C^1 Hermitovskou interpolaci v různých bazích: monomiální, Bernsteinova, existuje nějaká optimální база?

Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestavit křivku, která interpoluje hraniční data



Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.



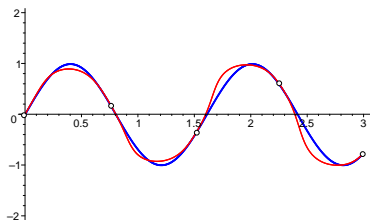
Vyzkoušejme si C^1 Hermitovskou interpolaci v různých bazích: monomiální, Bernsteinova, existuje nějaká optimální база?

Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestavit křivku, která interpoluje hraniční data



Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.



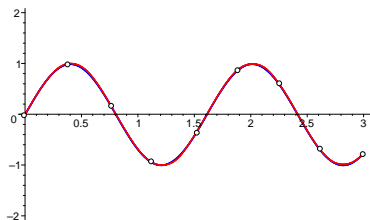
Vyzkoušejme si C^1 Hermitovskou interpolaci v různých bazích: monomiální, Bernsteinova, existuje nějaká optimální база?

Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestavit křivku, která interpoluje hraniční data



Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.



Vyzkoušejme si C^1 Hermitovskou interpolaci v různých bazích: monomiální, Bernsteinova, existuje nějaká optimální база?

Řada vlastností a konstrukcí pro polynomiální či racionální křivky není racionální:

- vyjádření délky křivky $\mathbf{c}(t)$, ale i normály, křivosti, torze

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{c}'(\tau)\| \, d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} \, d\tau$$

Vyhnutí z ráje

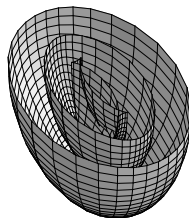
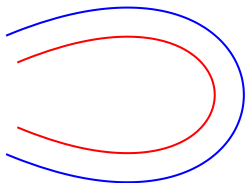
Řada vlastností a konstrukcí pro polynomiální čiracionální křivky není racionální:

- vyjádření délky křivky $\mathbf{c}(t)$, ale i normály, křivosti, torze

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{c}'(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau$$

- offset (paralelní křivka, plocha) ve vzdálenosti d :

$$\mathbf{o}_d = \mathbf{c} + d\mathbf{n}, \text{ kde např. pro plochy } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\|}$$



Vyhnutí z ráje

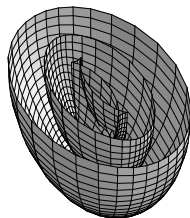
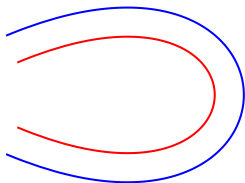
Řada vlastností a konstrukcí pro polynomiální čiracionální křivky není racionální:

- vyjádření délky křivky $\mathbf{c}(t)$, ale i normály, křivosti, torze

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{c}'(\tau)\| \, d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} \, d\tau$$

- offset (paralelní křivka, plocha) ve vzdálenosti d :

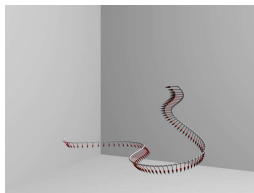
$$\mathbf{o}_d = \mathbf{c} + d\mathbf{n}, \text{ kde např. pro plochy } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\|}$$



- offsety jsou klíčové v aplikacích \Rightarrow tento problém je zásadní

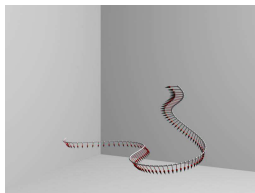
Ztráta racionality - repér podél křivky

- pro prostorovou racionální křivku neexistuje racionální repér



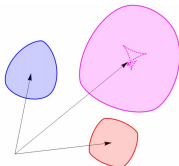
Ztráta racionality - repér podél křivky

- pro prostorovou racionální křivku neexistuje racionální repér



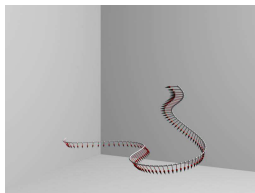
- konvoluce (hranice Minkovského součtu), není obecně racionální

$$\partial A \star \partial B = \{a + b : a \in \partial A, b \in \partial B, \mathbf{n}_a = \mathbf{n}_b\}$$



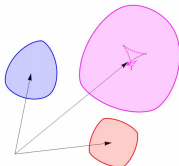
Ztráta racionality - repér podél křivky

- pro prostorovou racionální křivku neexistuje racionální repér



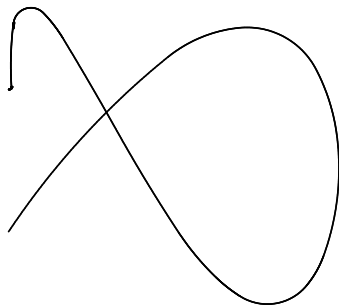
- konvoluce (hranice Minkovského součtu), není obecně racionální

$$\partial A \star \partial B = \{a + b : a \in \partial A, b \in \partial B, \mathbf{n}_a = \mathbf{n}_b\}$$



- konvoluce s kružnicí je offset

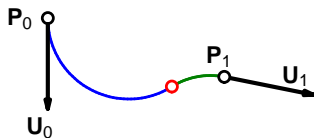
Křivka složená ze 16 kruhových oblouků.



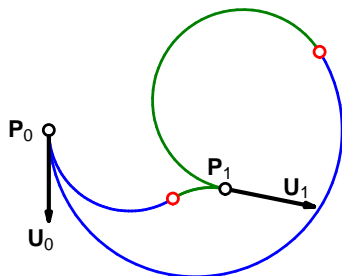
Interpolace dvojbloukem



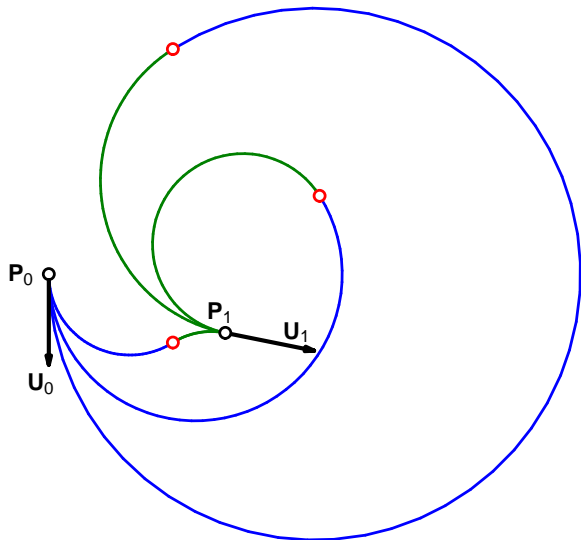
Interpolace dvojbloukem



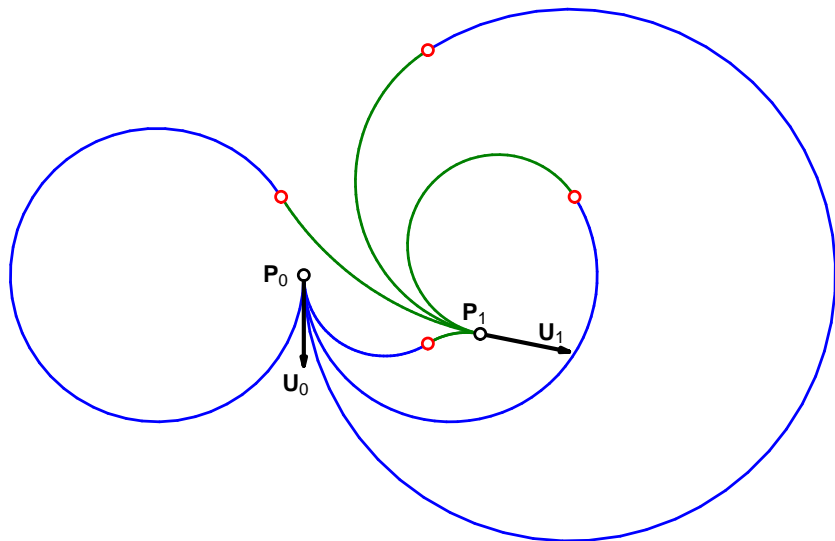
Interpolace dvojobloukem



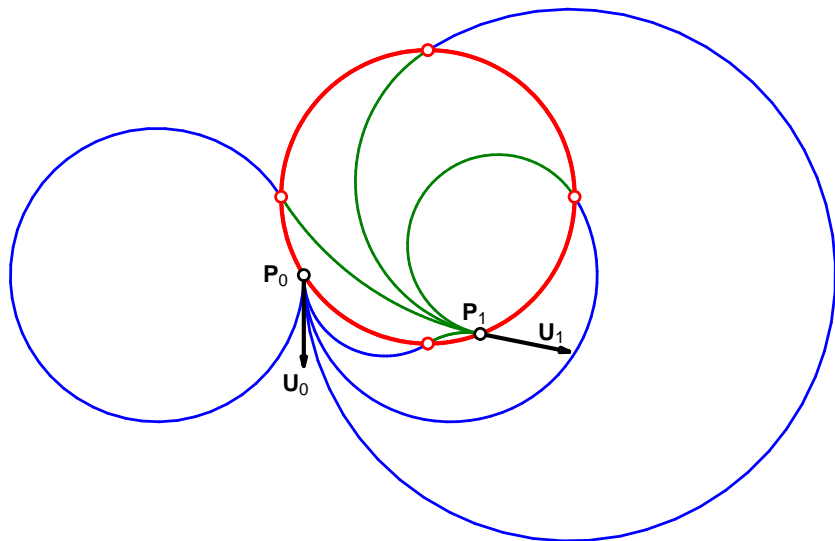
Interpolace dvojobloukem



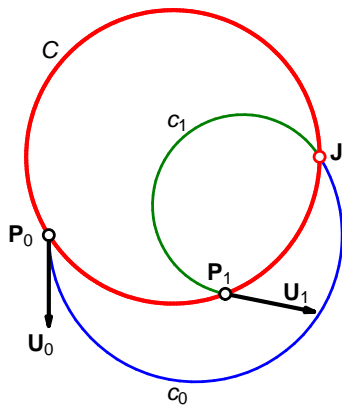
Interpolace dvojobloukem



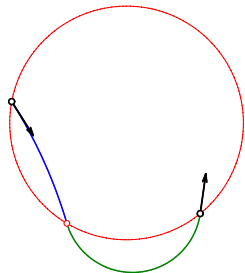
Interpolace dvojobloukem



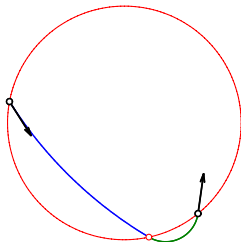
Análýza geometrického problému



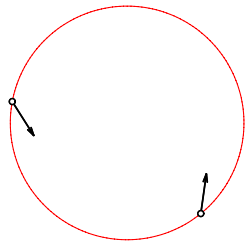
Výběr dvojoblouku



Equal chords

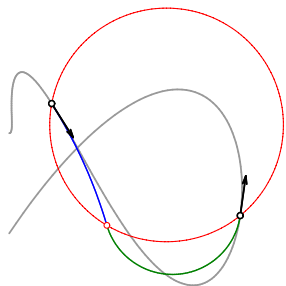


Parallel tangent

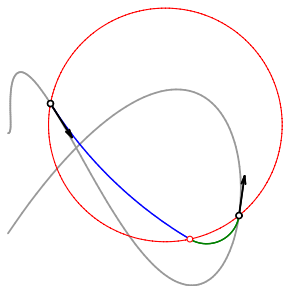


New method

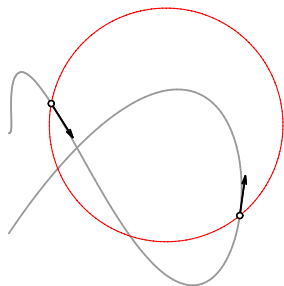
Výběr dvojoblouku



Equal chords

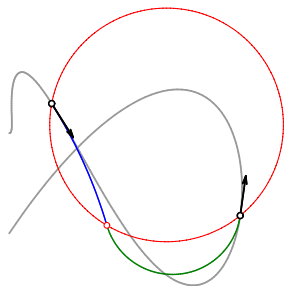


Parallel tangent

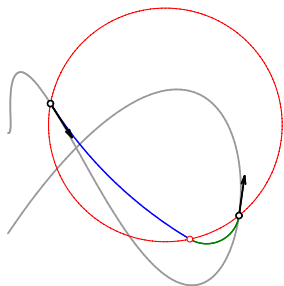


New method

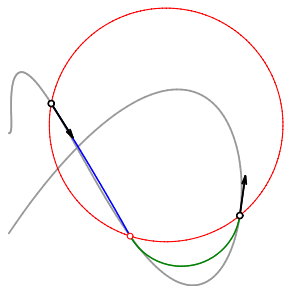
Výběr dvojoblouku



Equal chords



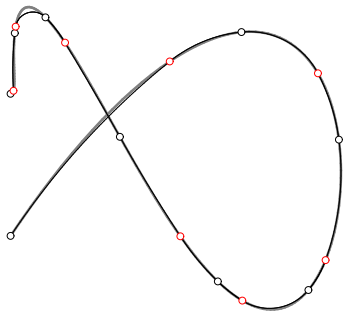
Parallel tangent



New method

Konverze regulárních křivek

Nasamplujeme G^1 data z dané křivky, jeli chyba příliš velká, rozdělíme na více částí.



Asymptotické chování konverze

	Error	Ratio		Error	Ratio
1	4.97				
2	2.23	2.233	256	$3.32 \cdot 10^{-5}$	5.552
4	$3.98 \cdot 10^{-1}$	5.594	512	$4.32 \cdot 10^{-6}$	7.699
8	$1.89 \cdot 10^{-1}$	2.110	1024	$5.45 \cdot 10^{-7}$	7.928
16	$4.02 \cdot 10^{-2}$	4.697	2048	$6.82 \cdot 10^{-8}$	7.988
32	$5.93 \cdot 10^{-3}$	6.780	4096	$8.57 \cdot 10^{-9}$	7.956
64	$1.03 \cdot 10^{-3}$	5.767	8192	$1.07 \cdot 10^{-9}$	7.979
128	$1.85 \cdot 10^{-4}$	5.568	16384	$1.34 \cdot 10^{-10}$	8.009

Aproximační stupeň 3 nelze kruhovými oblouky zlepšit.

- Bézierova křivka se nazývá s *Pythagorean Hodograph*, jestliže délka jejího tečného vektoru (rychlost) závisí polynomiálně na parametru. To znamená, že existuje polynom $\sigma(t)$ tak, že

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma^2(t). \quad (1)$$

- Věta (Kubota 1972): Polynomy x' , y' , σ splňují (1) právě tehdy, když existují polynomy u , v , w takové, že

$$x' = w(u^2 - v^2), \quad y' = w(2uv), \quad \sigma = w(u^2 + v^2).$$

- Interpolace bude nelineární problém.

Rovinná křivka

$$\mathbf{p}(t) = x(t) + y(t)\mathbf{i}$$

, pro kterou platí $\gcd(x', y')=1$ je PH právě tehdy, když existuje komplexní polynom (nazývaný *preimage*)

$$\mathbf{z}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i}$$

takový, že

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{z}^2(t).$$

Délka tečného vektoru je pak rovna $\|\mathbf{z}(t)\|^2$.

C^1 interpolace s PH křivkami stupně 5

$$\mathbf{p}'(t) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{h}_i B_i^4(t), \quad \mathbf{z}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{z}_i B_i^2(t), \quad t \in [0, 1].$$

Interpoláční podmínky jsou

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{h}_4 = \mathbf{t}_1, \quad \text{and} \quad \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 \mathbf{h}_i = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

a s užitm $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{z}^2(t)$ dostáváme 3 kvadratick rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0^2 &= \mathbf{t}_0, & \mathbf{z}_2^2 &= \mathbf{t}_1, \\ (3\mathbf{z}_0 + 4\mathbf{z}_1 + 3\mathbf{z}_2)^2 &= 120(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) - 15(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + 10\mathbf{z}_0\mathbf{z}_2. \end{aligned}$$

Obecn dostaneme **tyri** rzn interpolanty $\mathbf{p}(t)$.