Metody hodnocení a seřazování

Problém týkající se hodnocení a seřazování je všude kolem nás a více či méně ovlivňuje naše životy. Ať už se rozhodujeme, na který film se podívat, na základě žebříčku ČSFD, nebo si na internetu vyhledáváme potřebné informace, kdy nám vyhledávač musí nějakým způsobem seřadit nalezené výsledky. Velmi významnou událostí jsou také volby. Určitě bychom uvítali, aby systém generující dané pořadí byl co nejlepší. Jistě se nespokojíme s náhodně vygenerovaným pořadím. Třeba v příkladu s vyhledáváním důležité informace bychom tím mohli přijít o spoustu drahocenného času nebo dokonce i o samotnou informaci. V případě voleb by to mohlo mít fatální následky.

Já se zaměřím na určení hodnocení a pořadí sportovních týmů v různých soutěžích. Konkrétně jsem si vybral ostravskou skupinu z Mistrovství světa v ledním hokeji 2015. Metody, které zde uvedu, se však dají aplikovat na prakticky jakýkoliv sport a soutěž. A nejen na sport. Dají se využít třeba i pro ohodnocování webových stránek nebo filmů.

Arrowův teorém nemožnosti

Arrowův teorém nemožnosti nám říká, že nemůže existovat dokonalý volební systém. Přesněji, říká, že žádný volební systém s více než dvěma kandidáty nemůže současně splnit následující 4 podmínky:

- První podmínkou dokonalého volebního systému je, že každý volič může seřadit kandidáty v jakémkoliv pořadí, které uzná za vhodné.
- Druhou podmínkou je, že pokud je v nějaké podmnožině kandidátů vždy kandidát A řazen před kandidátem B, potom by toto pořadí mělo být zachováno, i když vezme v úvahu celou množinu kandidátů. Tedy, změny pořadí kandidátů mimo danou podmnožinu by neměly mít vliv na vzájemné pořadí kandidátů A a B.
- Třetí podmínka říká, že, pokud všichni voliči upřednostní A před B, potom by i celkově měl být kandidát A řazen před kandidátem B.
- Podle poslední podmínky by žádný samostatný volič neměl mít moc určovat pořadí kandidátů.

Ken Arrow byl dokonce za tento teorém v roce 1972 oceněn Nobelovou cenou za ekonomii. Měli bychom tedy mít od volebních i dalších nevolebních systémů realistická očekávání. Totéž platí například pro jakýkoliv systém, který produkuje pořadí sportovních týmů podle jejich výkonosti.

Samotný příklad

Jak bylo již zmíněno, jako příklad použijeme týmy a jejich zápasy z ostravské skupiny hokejového Mistrovství světa 2015 v Praze a Ostravě. [1] [2] Výsledky zápasů jsou obsaženy v tabulce *Tabulka 1*. První číslo v buňce značí, kolik gólů vstřelil tým zapsaný v řádku, druhé číslo říká, kolik gólů dal tým napsaný ve sloupci. *pp* znamená, že utkání bylo rozhodnuto v prodloužení, *sn* znamená, že se rozhodlo až v samostatných nájezdech. Ve sloupci *zápasy* jsou postupně uvedeny výhry v základní hrací době, výhry po skončení základní hrací doby, prohry po skončení základní hrací doby a prohry v řádné hrací době týmu uvedeného na začátku řádku. Hodnoty ve sloupci *rozdíl* se rovnají počtu obdržených branek odečteného od počtu vstřelených branek.

Ostrava	BLR	DEN	FIN	NOR	RUS	SVK	SLO	USA	**zápasy**	**rozdíl**
Bělorusko		5:1	2:3sn	3:2	0:7	1:2pp	4:2	5:2	4-0-2-1	1
Dánsko	1:5		0:3	4:1	2:5	3:4sn	0:1	0:1	1-0-1-5	-10
Finsko	3:2sn	3:0		5:0	3:2sn	3:0	4:0	1:5	4-2-0-1	13
Norsko	2:3	1:4	0:5		2:6	3:2	3:1	1:2	2-0-0-5	-11
Rusko	7:0	5:2	2:3sn	6:2		3:2pp	5:3	2:4	4-1-1-1	14
Slovensko	2:1pp	4:3sn	0:3	2:3	2:3pp		3:1	4:5pp	1-2-2-2	-2
Slovinsko	2:4	1:0	0:4	1:3	3:5	1:3		1:3	1-0-0-6	-13
USA	2:5	1:0	5:1	2:1	4:2	5:4pp	3:1		5-1-0-1	8

Tabulka 1

V tomto případě můžeme pořadí týmů získat například tak, že rozhodujícím kritériem bude počet výher po 60 minutách, v případě rovnosti dvou týmů bude dalším kritériem počet vítězství po prodloužení nebo na nájezdy a případně ještě počet porážek po remíze v řádné hrací době.
V takovém případě bude vektor pořadí následující.

$$\begin{array}{l} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Číslo u týmu říká, kolikátý v pořadí je. Vektor pořadí je tedy (pokud nedošlo ke stejnému hodnocení více týmů) permutací celých čísel od 1 do n, kde n je počet týmů, v tomto případě n = 8. Každý vektor pořadí je jednoznačně určen vektorem hodnocení, ale opačně to neplatí. V tomto případě, abychom získali vektor pořadí uvedený výše, jsme mohli použít například následující hodnocení týmů. 100 bodů za vítězství v základní hrací době, 10 bodů za jiné vítězství, 1 bod za prohru po prodloužení nebo nájezdech. To jistě bude fungovat, protože každý tým odehrál 7 zápasů. Pokud například nějaký tým vyhraje sedmkrát v prodloužení, pak získá 70 bodů, ale nemůže vyrovnat 100 bodů získaných za jedno vítězství v řádné hraví době. Obecně, pokud označíme písmenem n počet odehraných her týmu, který jich odehrál nejvíc, pak stačí podmínku s nejnižší prioritou ohodnotit jedním bodem, podmínku s druhou nejnižší prioritou $(n+1)$ body, další podmínku $(n+1)^2$ body atd. V našem případě získáme tento vektor hodnocení.

$$\begin{array}{l} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} \begin{pmatrix} 402 \\ 101 \\ 420 \\ 200 \\ 411 \\ 122 \\ 100 \\ 510 \end{pmatrix}$$

Avšak můžeme jako hodnocení klidně použít klasické bodování mistrovství světa. To znamená 3 body za výhru v základní hrací době, 2 body za výhru po jejím skončení, 1 bod za prohru po skončení základní hrací doby a 0 za prohru v řádné hrací době. Potom budou příslušné vektory hodnocení a pořadí vypadat následovně.

$$\begin{array}{l} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 16 \\ 6 \\ 15 \\ 9 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektor pořadí je téměř stejný jako v prvním případě, ale prohodilo se Slovensko s Norskem. To je způsobeno tím, že Slováci vyhráli v řádné hrací době jediný zápas, ale v dalších čtyřech to dotáhli do prodloužení.

Ještě se nabízí hodnocení podle rozdílu skóre jednotlivých týmů. Potom budou vypadat vektory hodnocení a pořadí takto.

$$\begin{array}{l} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 13 \\ -11 \\ 14 \\ -2 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Skóre má nejlepší Rusko, zatímco USA se oproti předchozím hodnocení propadlo na 3. místo. Podle různých hodnocení jsme tedy získali různá pořadí. Ale jak nejlépe určit výkonnost jednotlivých týmů? Musíme mít na paměti, že perfektní systém prostě neexistuje. Ale některé hodnocení může být lepší než jiné. Také určitě není Dánská výhra 4:1 nad Norskem stejně hodnotná jako ta Běloruská 5:2 nad týmem USA. A to i přes to, že mají v těchto utkáních i stejný rozdíl skóre. Nabízí se tedy myšlenka, že výhra nad lepším týmem by měla být ohodnocena lépe než nad slabším týmem. Ale jak? Před začátkem turnaje vlastně ani nevíme, jak je který tým skutečně silný.

Masseyova metoda

V roce 1997 vytvořil Kenneth Massey metodu pro hodnocení univerzitních týmů amerického fotbalu. Massey vymyslel více metod, zde se však pojmem Masseyova metoda myslí jeho metoda využívající metody nejmenších čtverců. Hlavní myšlenka je vyjádřena následující rovnicí.

$$r_i - r_j = y_k$$

y_k je rozdíl vstřelených branek týmu i a týmu j v k-tém utkání. r_i a r_j jsou příslušná hodnocení týmů i a j. Jinými slovy, rozdíl hodnocení týmů předpovídá rozdíl skóre v utkání. Potřebujeme ohodnotit každý tým v soutěži n týmů, které dohromady odehrály m her. Vyjdeme z toho, že víme, kdo s kým hrál a jak utkání dopadlo. Pro každou hru k tedy máme příslušnou rovnici a dohromady získáváme systém m lineárních rovnic o n neznámých, který může být zapsán jako

$$\mathbf{Xr} = \mathbf{y}.$$

V každém řádku matice $\mathbf{X}$ jsou téměř samé nuly. Pouze na místě i je 1 a na místě j je –1, pokud tým i porazil tým j. V našem příkladě máme několik možností, jak se vypořádat s utkáními, které dospěly do prodloužení. Buď budou označeny jako remízy a rozdíl skóre utkání bude 0, nebo taky můžeme nerozlišovat mezi jednotlivými typy výher. Tedy, výhra 2:1pp pro nás bude totéž jako výhra 2:1.
V každém případě získáme velmi řídkou matici $\mathbf{X}_{m \times n}$. Vektor pravých stran $\mathbf{y}_{m \times 1}$ je tvořen rozdíly skóre příslušných utkání a $\mathbf{r}_{n \times 1}$ je vektor neznámých hodnocení týmů. Obvykle platí, že $m >> n$, což znamená, že získaná rovnice je předefinovaná. Pomocí metody nejmenších čtverců získáme soustavu normálních rovnic $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Xr} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$. Výsledný vektor $\mathbf{r}$ tedy bude nejlepší možnou aproximací řešení původní soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Xr} = \mathbf{y}$. Je však výhodné používat matici koeficientů $\mathbf{M} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$, která ani nemusí být počítána. Prvek na místě $\mathbf{M}_{ii}$ je roven počtu her odehraných týmem i. Prvek na místě $\mathbf{M}_{ij}$, pro $i \neq j$, je roven mínus počtu her odehraných mezi týmy i a j. Podobně $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ získáme nasčítáním rozdílů skóre z jednotlivých her příslušných týmů (i-tou složku tvoří rozdíl celkového skóre i-tého týmu). Pokud definujeme $\mathbf{p} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$, obdržíme rovnici $\mathbf{Mr} = \mathbf{p}$. $\mathbf{M}_{n \times n}$ je nyní čtvercová matice řádu n a je mnohem menší než matice $\mathbf{X}$. Dále, $\mathbf{M}$ je diagonálně dominantní matice (Matice A se nazývá diagonálně dominantní, jestliže absolutní hodnota prvku na diagonále je větší nebo rovna součtu absolutních hodnot ostatních prvků – buď pro všechny řádky nebo pro všechny sloupce, tj. $|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ pro $i = 1,\ldots,n$. [3]) a součet prvků každého jejího řádku je roven nule. Důsledek tohoto je, že sloupce matice $\mathbf{M}$ jsou lineárně závislé, a tudíž $rank(\mathbf{M}) < n$, a proto má $\mathbf{Mr} = \mathbf{p}$ nekonečně mnoho řešení. To se dá vyřešit třeba tak, že libovolný (obvykle poslední) řádek matice $\mathbf{M}$ nahradíme řádkem samých jedniček a odpovídající složku $\mathbf{p}$ nahradíme nulou. Tím se zajistí, že součet hodnocení všech týmů bude roven nule a matice koeficientů bude regulární. Takto upravenou soustavu rovnic označíme jako $\overline{\mathbf{M}}\mathbf{r} = \overline{\mathbf{p}}$.

Příklad

Nejprve spočtěme hodnocení všech týmů pro případ, kdy neuznáváme remízy a nezáleží nám na tom, zda tým vyhrál během 60 minut, nebo až po nich. V tom případě hrál každý s každým právě jednou, a tak na hlavní diagonále budou 7, zatímco všude mimo hlavní diagonálu budou –1. Potom $\overline{\mathbf{M}}\mathbf{r} = \overline{\mathbf{p}}$ bude

$$
\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 13 \\ -11 \\ 14 \\ -2 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

s následujícím hodnocením a pořadím týmů.

Tým	**Hodnocení $\mathbf{r}$**	**pořadí**
Bělorusko	1/8	4
Dánsko	-10/8	6
Finsko	13/8	2
Norsko	-11/8	7
Rusko	14/8	1
Slovensko	-2/8	5
Slovinsko	-13/8	8
USA	8/8	3

Není překvapením, že hodnocení je úměrné rozdílu skóre jednotlivých týmů, neboť každý tým hrál se všemi ostatními právě jednou. Ale jak by to vypadalo v momentě, kdy byla odehrána pouze polovina zápasů? Dostali bychom tabulku *Tabulka 2*

Ostrava	BLR	DEN	FIN	NOR	RUS	SVK	SLO	USA	**zápasy**	**rozdíl**
Bělorusko		5:1				1:2pp	4:2		2-0-1-0	5
Dánsko	1:5		0:3		2:5	3:4sn			0-0-1-3	-11
Finsko		3:0		5:0				1:5	2-0-0-1	4
Norsko			0:5		2:6	3:2		1:2	1-0-0-3	-9
Rusko		5:2		6:2			5:3	2:4	3-0-0-1	7
Slovensko	2:1pp	4:3sn		2:3			3:1		1-2-0-1	3
Slovinsko	2:4				3:5	1:3			0-0-0-3	-6
USA			5:1	2:1	4:2				3-0-0-0	7

Tabulka 2

a $\overline{\mathbf{M}}\mathbf{r} = \overline{\mathbf{p}}$ jako

$$
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 4 \\ -9 \\ 7 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

s následujícím hodnocením a pořadím týmů.

Tým	Hodnocení $\mathbf{r}$	pořadí
Bělorusko	16/68	4
Dánsko	-150/68	8
Finsko	79/68	3
Norsko	-73/68	6
Rusko	82/68	2
Slovensko	-29/68	5
Slovinsko	-113/68	7
USA	188/68	1

Ačkoliv mělo USA stejné skóre jako Rusko, bylo mnohem lépe ohodnoceno. To je způsobeno jednak tím, že jim na to stačilo o zápas méně, jednak tím, že Rusové toto skóre získali proti USA a třem nejslabším týmům.

Pokud bychom rozlišovali jen výhru, remízu a porážku, tak by se jen mírně změnilo skóre a pravá strana rovnice $\overline{\mathbf{M}}\mathbf{r} = \overline{\mathbf{p}}$. A výsledek by byl velmi podobný tomu, který jsme už spočítali.

Myslím, že, pokud bychom chtěli odhlédnout od skóre, více se zaměřit na výhry a současně se příliš neodchylovat od standardního bodovacího systému mistrovství světa v hokeji, bylo by dobré jako „skóre" použít získané body z utkání. Takže například místo skóre 6:2 bychom si zaznamenali 3:0. Místo 2:3sn zase 1:2. A podobně. Stačí tedy opět pouze změnit pravou stranu rovnice. Potom platí

$$p_i = 3\text{x(počet výher týmu } i \text{ v řádné hrací době – počet proher týmu } i \text{ v řádné hrací době)}$$
$$+ \text{ (počet výher týmu } i \text{ v prodloužení – počet proher týmu } i \text{ v prodloužení).}$$

Úpravou posledního řádku pak dostáváme rovnici $\overline{\mathbf{M}}\mathbf{r} = \overline{\mathbf{p}}$ jako

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 11 \\ -9 \\ 9 \\ -3 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a následující hodnocení a pořadí týmů.

Tým	Hodnocení $\mathbf{r}$	pořadí
Bělorusko	7/8	4
Dánsko	-13/8	7
Finsko	11/8	2
Norsko	-9/8	6
Rusko	9/8	3
Slovensko	-3/8	5
Slovinsko	-15/8	8
USA	13/8	1

Zajímavější by mělo být, jak to vypadalo po polovině odehraných utkáních.

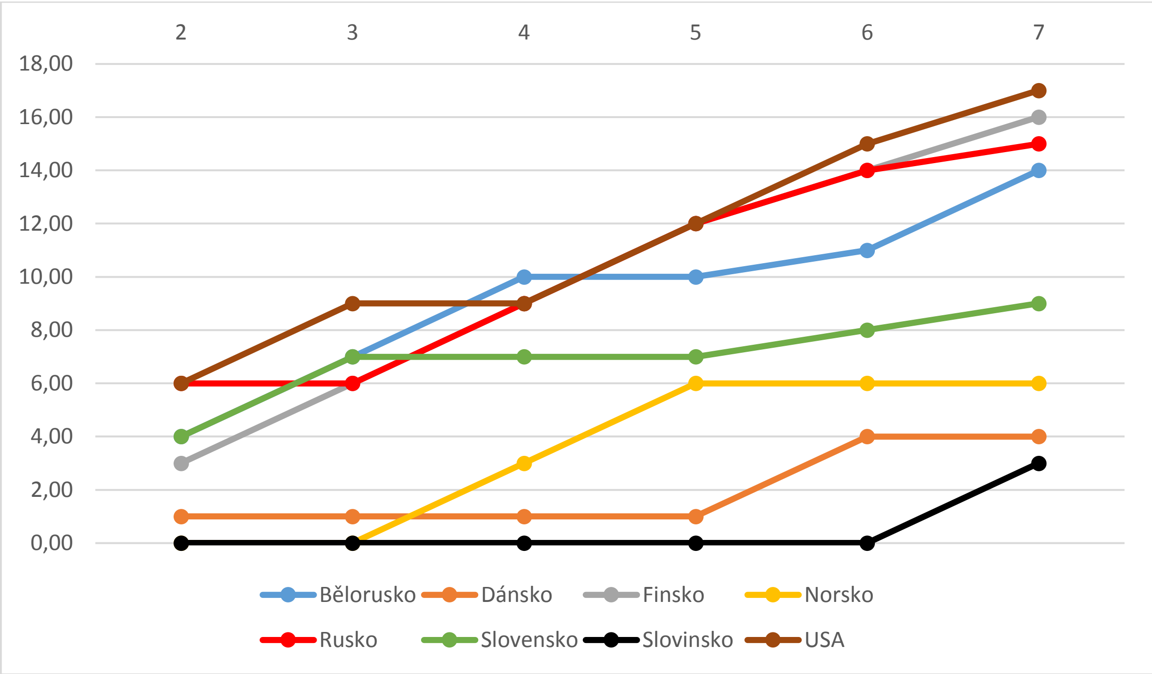
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 3 \\ -6 \\ 6 \\ 2 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hodnocení a pořadí týmů jsou následující.

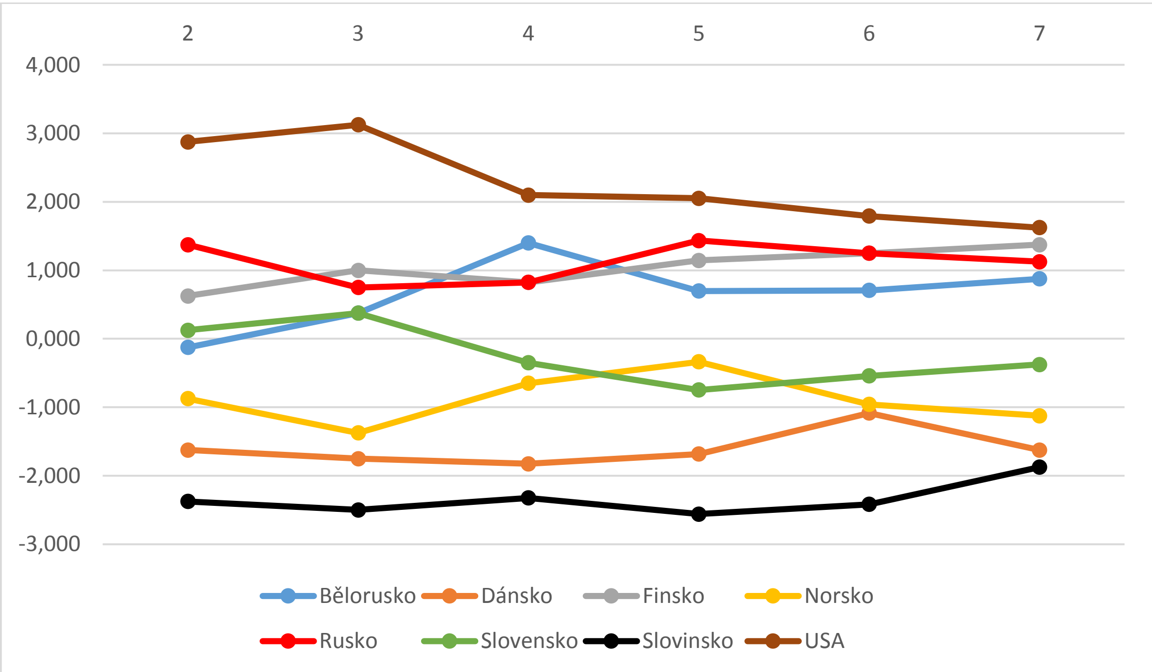
Tým	**Hodnocení r**	**pořadí**
Bělorusko	-25/68	5
Dánsko	-146/68	7
Finsko	105/68	2
Norsko	-6/68	4
Rusko	78/68	3
Slovensko	-62/68	6
Slovinsko	-207/68	8
USA	263/68	1

Určitě stojí za zmínku, že v celkovém oficiálním pořadí, podle standardního bodování, se oproti tomuto pořadí pouze propadli Norové o 2 místa níž. Navíc toto pořadí se zdá být vzhledem k tomu celkovému přesnější, než pořadí podle standardního bodování po polovině odehraných duelech.

Graf 1 zachycuje vývoj bodového stavu všech týmů od druhého do sedmého kola podle oficiálního bodování mistrovství světa. *Graf 2* ukazuje vývoj výše uvedeného hodnocení jednotlivých týmů přes všechna kola od druhého do sedmého.



Graf 1



Graf 2

Hodnocení ofenzívy a defenzívy

Vraťme se zpět ke klasickému použití Masseyovy metody na skóre týmů. Vektor hodnocení $\mathbf{r}$ lze rozložit na součet vektoru hodnocení ofenzívy $\mathbf{o}$ a vektoru hodnocení defenzívy $\mathbf{d}$. Vektor $\mathbf{p}$, jehož i-tá složka je rovna rozdílu počtu vstřelených a obdržených gólů i-tého týmu, rozložíme jako $\mathbf{p} = \mathbf{f} - \mathbf{a}$, kde $\mathbf{f}$ je vektor vstřelených a $\mathbf{a}$ je vektor inkasovaných branek. Dále rozložíme matici $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M} = \mathbf{T} - \mathbf{P}$, kde $\mathbf{T}$ je diagonální matice uchovávající počet všech her každého týmu a $\mathbf{P}$ je matice s nulami na hlavní diagonále uchovávající počet her mezi každými dvěma týmy.

$$\mathbf{Mr} = \mathbf{p}$$
$$(\mathbf{T} - \mathbf{P})\mathbf{r} = \mathbf{p}$$
$$(\mathbf{T} - \mathbf{P})(\mathbf{o} + \mathbf{d}) = \mathbf{p}$$
$$\mathbf{To} - \mathbf{Po} + \mathbf{Td} - \mathbf{Pd} = \mathbf{p}$$
$$\mathbf{To} - \mathbf{Po} + \mathbf{Td} - \mathbf{Pd} = \mathbf{f} - \mathbf{a}$$

Výslednou rovnici výše rozdělíme do dvou oddělených rovnic.

$$\mathbf{To} - \mathbf{Pd} = \mathbf{f} \text{ a } \mathbf{Po} - \mathbf{Td} = \mathbf{a}$$

Rovnice nalevo říká, že celkový počet vstřelených branek libovolného týmu obdržíme jako součet defenzivních hodnocení soupeřů daného týmu odečtených od součinu jeho ofenzivního hodnocení a počtu jeho odehraných her.

$$\mathbf{To} - \mathbf{Pd} = \mathbf{f}$$
$$\mathbf{T}(\mathbf{r} - \mathbf{d}) - \mathbf{Pd} = \mathbf{f}$$
$$(\mathbf{T} + \mathbf{P})\mathbf{d} = \mathbf{Tr} - \mathbf{f}$$

Nyní už si stačí pouze uvědomit, že $\mathbf{T}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{r}$ i $\mathbf{f}$ už známe. Po spočtení vektoru $\mathbf{d}$ můžeme dopočítat vektor $\mathbf{o}$ jako $\mathbf{o} = \mathbf{r} - \mathbf{d}$.

Příklad

Určíme vektory $\mathbf{o}$ a $\mathbf{d}$ z vektoru $\mathbf{r}$, který byl vytvořen ze skóre jednotlivých utkání. $(\mathbf{T} + \mathbf{P})\mathbf{d} = \mathbf{Tr} - \mathbf{f}$ dostaneme jako

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 - 20 \\ -70/8 - 10 \\ 91/8 - 22 \\ -77/8 - 12 \\ 98/8 - 30 \\ -14/8 - 17 \\ -91/8 - 9 \\ 56/8 - 22 \end{pmatrix}$$

a takto bude vypadat tabulka obsahující celkové hodnocení, hodnocení ofenzívy i defenzívy.

Tým	$\mathbf{r}$	**Pořadí podle** $\mathbf{r}$	$\mathbf{o}$	**Pořadí podle** $\mathbf{o}$	$\mathbf{d}$	**Pořadí podle** $\mathbf{d}$
Bělorusko	1/8	4	545/336	4	-503/336	6
Dánsko	-10/8	6	62/336	7	-482/336	4
Finsko	13/8	2	573/336	3	-27/336	1
Norsko	-11/8	7	181/336	6	-643/336	8
Rusko	14/8	1	1014/336	1	-426/336	3
Slovensko	-2/8	5	398/336	5	-482/336	4
Slovinsko	-13/8	8	27/336	8	-573/336	7
USA	8/8	3	608/336	2	-272/336	2

Colleyova metoda

Colleyova metoda, kterou publikoval v roce 2001 Wesley Colley, je modifikací systému využívajícího procenta výher. Procenta výher hodnotí tým i s hodnotou r_i podle pravidla $r_i = \frac{w_i}{t_i}$, kde w_i je počet výher a t_i je celkový počet her odehraných týmem i. Tento systém (procenta výher) má však několik nevýhod. Tak například poražení nejsilnějšího týmu má stejné ohodnocení jako poražení toho nejslabšího, mohou častěji nastat remízy v celkovém hodnocení mezi některými týmy, na začátku sezóny mají všechny týmy hodnocení $\frac{0}{0}$ a v jejím průběhu má tým bez vítězství skóre 0. Hlavní myšlenka Colleyovy metody spočívá v mírné úpravě vzorce pro procenta výher.

$$r_i = \frac{1 + w_i}{2 + t_i}$$

Týmy nyní začínají s hodnocením $\frac{1}{2}$ a tým, který první hru prohraje, obdrží hodnocení $\frac{1}{3}$ místo 0, což je jistě rozumnější. Ještě by bylo dobré nějakým způsobem zařídit, aby výhra nad silným soupeřem byla oceněna lépe než vítězství nad slabším oponentem. Podle vzorce uvedeného výše začínají všechny týmy s hodnocením $r_i = \frac{1}{2}$. Nyní šikovně rozložíme počet výher. l_i bude počet prohraných utkání týmu i.

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{w_i - l_i}{2} + \frac{w_i + l_i}{2} \\ &= \frac{w_i - l_i}{2} + \frac{t_i}{2} \\ &= \frac{w_i - l_i}{2} + \sum_{j=1}^{t_i} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Protože všechny týmy začínají soutěž s $r_j = \frac{1}{2}$, součet $\sum_{j=1}^{t_i} \frac{1}{2}$ je na začátku roven $\sum_{j \in O_i} r_j$, kde O_i je množina soupeřů týmu i. V průběhu soutěže rovnost platit nemusí, ale stále bude platit dobrá aproximace.

$$w_i \approx \frac{w_i - l_i}{2} + \sum_{j \in O_i} r_j$$

Budeme-li předpokládat rovnost a dosadíme-li tento vztah do původní rovnice, získáme Colleyovu rovnici.

$$r_i = \frac{1 + \frac{w_i - l_i}{2} + \sum_{j \in O_i} r_j}{2 + t_i}$$

Colleyovy rovnice můžeme zapsat dohromady jako soustavu lineárních rovnic $\mathbf{Cr} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{r}_{n \times 1}$ je neznámý vektor Colleyova hodnocení, $\mathbf{b}_{n \times 1}$ je vektor definovaný jako $b_i = 1 + \frac{w_i - l_i}{2}$ a $\mathbf{C}_{n \times n}$ je Colleyova matice koeficientů definovaná jako

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{cases} 2 + t_i, & i = j, \\ -n_{ij}, & i \neq j, \end{cases}$$

kde n_{ij} je počet her odehraných mezi týmy i a j.

Příklad

Zpět k našemu příkladu. Výsledky zápasů budeme rozlišovat na výhry a prohry. Naše soustava lineárních rovnic $\mathbf{Cr} = \mathbf{b}$, bude vypadat takto.

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 7/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Tým	Hodnocení $\mathbf{r}$	pořadí
Bělorusko	11/20	4
Dánsko	5/20	7
Finsko	15/20	1
Norsko	7/20	6
Rusko	13/20	3
Slovensko	9/20	5
Slovinsko	5/20	7
USA	15/20	1

Dvě dvojice týmů skončily se stejným hodnocením, neboť každý tým hrál s každým právě jednou a protože nerozlišujeme mezi výhrou v prodloužení a klasickou výhrou. Podívejme se ještě, jak to vypadalo v polovině soutěže.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 6 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \\ 3/2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Tým	Hodnocení $\mathbf{r}$	pořadí
Bělorusko	767/1524	5
Dánsko	326/1524	8
Finsko	908/1524	3
Norsko	663/1524	6
Rusko	944/1524	2
Slovensko	861/1524	4
Slovinsko	362/1524	7
USA	1265/1524	1

Eloův systém

Árpád Élö vytvořil efektivní metodu pro hodnocení a řazení šachistů, kterou přijala v roce 1970 Světová šachová federace. Tento systém je vytvořen tak, aby hodnocení hráče bylo stabilní a v průběhu času se neměnilo příliš rychle. Pokud S je současná hráčova výkonost a $r_{(old)}$ jeho poslední hodnocení, pak jeho nové hodnocení bude

$$r_{(new)} = r_{(old)} + K(S - \mu),$$

kde K je konstanta, kterou Elo původně položil $K = 10$. Definice μ bude později.

Nejprve se musí hráčům přiřadit nějaké počáteční hodnocení. Poté je zapotřebí definovat, jakých hodnot bude nabývat proměnná S.

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i \text{ porazí } j, \\ 0, & \text{pokud } i \text{ prohraje s } j, \\ 1/2, & \text{pokud } i \text{ a } j \text{ spolu remizují} \end{cases}$$

(Speciálně pro náš příklad se mi zdá vhodné definovat *S* následovně.

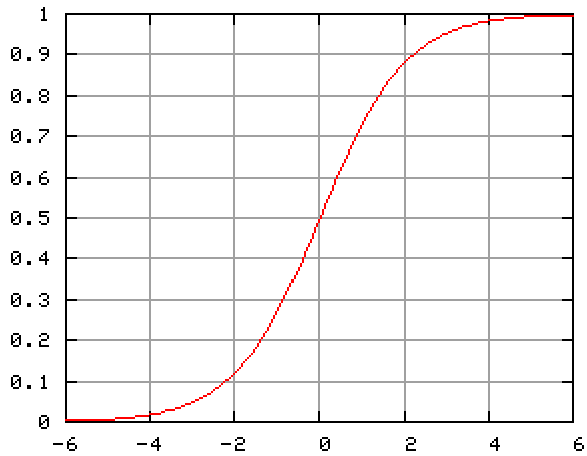
$$S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i \text{ porazí } j \text{ v základní hrací době,} \\ 2/3, & \text{pokud } i \text{ porazí } j \text{ v prodloužení nebo na nájezdy,} \\ 1/3, & \text{pokud } i \text{ prohraje s } j \text{ v prodloužení nebo na nájezdy,} \\ 0 & \text{pokud } i \text{ prohraje s } j \text{ v základní hrací době)} \end{cases}$$

μ_{ij} představuje předpokládaný počet bodů, které by měl hráč i uhrát proti hráči j. Pro přehlednost zápisu budeme dále potřebovat definovat rozdíl starých hodnocení.

$$d_{ij} = r_{i(old)} - r_{j(old)}$$

Standardní logistická funkce je definována jako $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, zde se však více využívá verze o základu 10.

$$L(x) = \frac{1}{1 + 10^{-x}}$$



Graf logistické funkce [4]

μ_{ij} je definováno následovně.

$$\mu_{ij} = L\left(\frac{d_{ij}}{400}\right) = \frac{1}{1 + 10^{-d_{ij}/400}}$$

Po aktualizaci jsou hodnocení hráčů i a j následovné.

$$r_{i^{(new)}} = r_{i^{(old)}} + K(S_{ij} - \mu_{ij})$$

$$r_{j^{(new)}} = r_{j^{(old)}} + K(S_{ji} - \mu_{ji})$$

Výsledkem je, že slabší hráč bude za poražení silnějšího ohodnocen lépe než silnější za poražení slabšího. Například, pokud má průměrný hráč avg hodnocení 1500 a silný hráč str 1900, potom

$$\mu_{avg,str} = \frac{1}{1 + 10^{-(1500-1900)/400}} = \frac{1}{11}$$

Zatímco

$$\mu_{str,avg} = \frac{1}{1 + 10^{-(1900-1500)/400}} = \frac{10}{11}.$$

Proto je odměna průměrného hráče za poražení silného

$$r_{avg^{(new)}} - r_{avg^{(old)}} = K\left(S_{avg,str} - \mu_{avg,str}\right) = K\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11}K$$

zatímco pokud silný hráč porazí průměrného, bude jeho odměna pouze

$$r_{str^{(new)}} - r_{str^{(old)}} = K\left(S_{str,avg} - \mu_{str,avg}\right) = K\left(1 - \frac{10}{11}\right) = \frac{1}{11}K$$

Hodnota K ovlivňuje, jak moc se bude hodnocení měnit. Pokud bude hodnota K příliš velká, pak bude stačit jen pár utkání a hodnocení se může významně změnit. Na druhou stranu, pokud bude K příliš malé, potom hodnocení bude stagnovat a nebude schopno odrážet jakékoliv zlepšení či zhoršení. Hodnota K také může záležet na fázi soutěže, nebo na úrovni hráče. Například nový hráč bude mít vyšší K. Vyšší K také může být zvoleno v důležitých duelech.

Logistický parametr $\xi = 400$ ovlivňuje rozsah hodnocení.

$$\mu_{ij} = \frac{10^{r_i/400}}{10^{r_i/400} + 10^{r_j/400}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_{ij}}{\mu_{ji}} = \frac{10^{r_i/400}}{10^{r_j/400}}$$

$$\Rightarrow \mu_{ij} = \mu_{ji} 10^{(r_i - r_j)/400}$$

μ_{ij} je počet bodů, které se očekává, že získá hráč i proti hráči j. Tudíž, pokud $r_i - r_j = 400$, pak se očekává, že hráč i bude desetkrát lepší, než hráč j. Obecně, každých 400 bodů rozdílu znamená, že hráč i má desetkrát větší šanci na výhru než hráč j. Takže, pokud by rozdíl činil 800 bodů, pak by pravděpodobnost vítězství hráče i byla stokrát vyšší než pravděpodobnost výhry hráče j.

Pro každé $\xi > 0$ platí

$$\mu_{ij} = L\left(\frac{d_{ij}}{\xi}\right) = \frac{1}{1 + 10^{-d_{ij}/\xi}}$$

$$\Rightarrow \mu_{ij} = \frac{10^{r_i/\xi}}{10^{r_i/\xi} + 10^{r_j/\xi}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_{ij}}{\mu_{ji}} = \frac{10^{r_i/\xi}}{10^{r_j/\xi}}$$

$$\Rightarrow \mu_{ij} = \mu_{ji} 10^{(r_i - r_j)/\xi}$$

Nyní, za každých ξ bodů rozdílu hodnocení ve prospěch hráče i proti hráči j, je pravděpodobnost vítězství hráče i desetkrát vyšší než pravděpodobnost výhry hráče j.

Tvrzení

Pokud $S_{ij} + S_{ji} = 1$, tak nezávisle na tom, jak jsou skóre S_{ij} definována, je součet všech hodnocení Elo $r_i(t)$ v každém čase $t > 0$ stejný jako součet počátečních hodnocení $r_i(0)$. Jinými slovy, pokud máme m týmů, potom

$$\sum_{k=1}^{m} r_k(0) = \sigma \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} r_k(t) = \sigma \quad \text{pro všechna } t > 0.$$

Speciálně, pokud udělíme všem hráčům počáteční hodnocení $r_i(0) = 0$, potom bude součet všech hodnocení vždy 0, a tedy i průměrné hodnocení bude 0.

Důkaz

Nezávisle na logistickém parametru ξ platí $\mu_{ij} + \mu_{ji} = 1$. To společně s faktem, že $S_{ij} + S_{ji} = 1$, znamená, že po hře mezi hráčem i a j jsou příslušné aktualizace starých hodnocení $r_{i^{(old)}}$ a $r_{j^{(old)}}$ vyjádřeny jako $K(S_{ij} - \mu_{ij})$ a $K(S_{ji} - \mu_{ji})$ a platí

$$K(S_{ij} - \mu_{ij}) + K(S_{ji} - \mu_{ji}) = 0.$$

Proto

$$\sum_{k=1}^{m} r_{k^{(new)}} = \sum_{k \neq i,j}^{m} r_{k^{(old)}} + \left[r_{i^{(old)}} + K(S_{ij} - \mu_{ij})\right] + \left[r_{j^{(old)}} + K(S_{ji} - \mu_{ji})\right] = \sum_{k=1}^{m} r_{k^{(old)}} \quad \blacksquare$$

Příklad

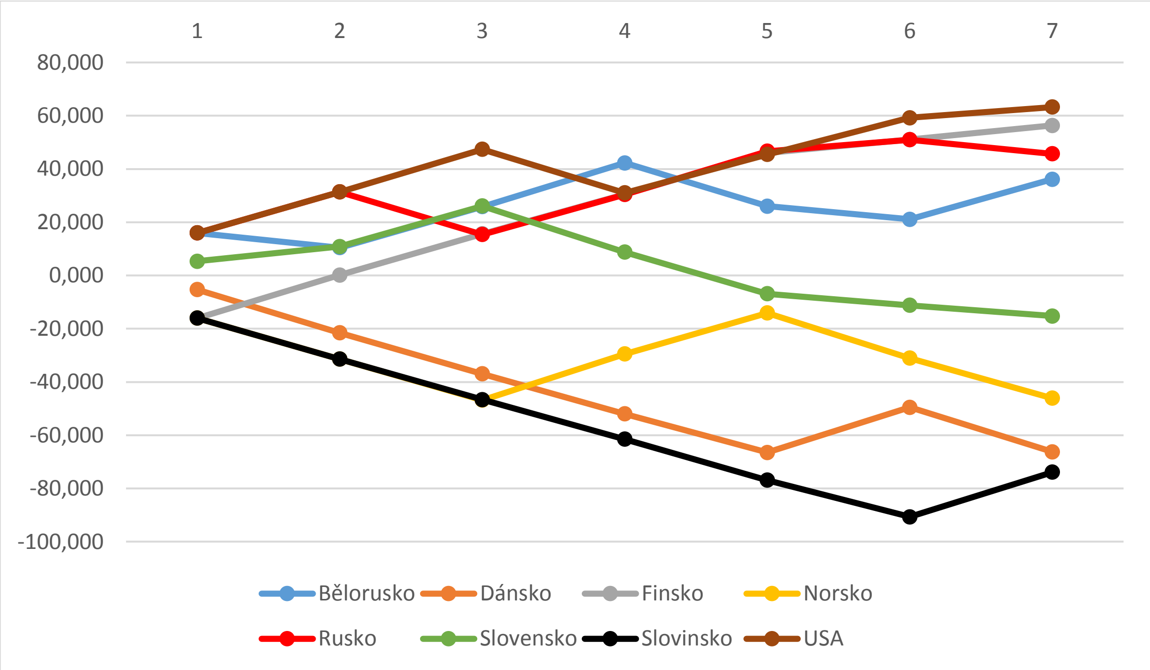
S definujme, jak už bylo zmíněno dříve, následovně.

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i \text{ porazí } j \text{ v základní hrací době,} \\ 2/3, & \text{pokud } i \text{ porazí } j \text{ v prodloužení nebo na nájezdy,} \\ 1/3, & \text{pokud } i \text{ prohraje s } j \text{ v prodloužení nebo na nájezdy,} \\ 0 & \text{pokud } i \text{ prohraje s } j \text{ v základní hrací době} \end{cases}$$

Položme $K = 32$ (často používaná hodnota v šachových komunitách) a pro větší přehlednost a lepší rozmezí hodnocení vezměme $\xi = 1000$. Na začátku položme všechna hodnocení týmů $r_i = 0$. Nakonec dojdeme k následujícímu hodnocení a pořadí.

Tým	Hodnocení r	pořadí
Bělorusko	36,14	4
Dánsko	-66,25	7
Finsko	56,37	2
Norsko	-46,08	6
Rusko	45,68	3
Slovensko	-15,24	5
Slovinsko	-73,90	8
USA	63,29	1

Graf 3 zachycuje průběh soutěže.



Graf 3

Pouze bych poznamenal, že počínaje třetím kolem nemají nikdy žádné dva týmy stejné hodnocení, i když by se z pohledu na graf mohlo zdát, že opak je pravdou. Minimální rozdíl mezi hodnoceními dvou týmů od třetího kola dál není menší než 0,02 bodu.

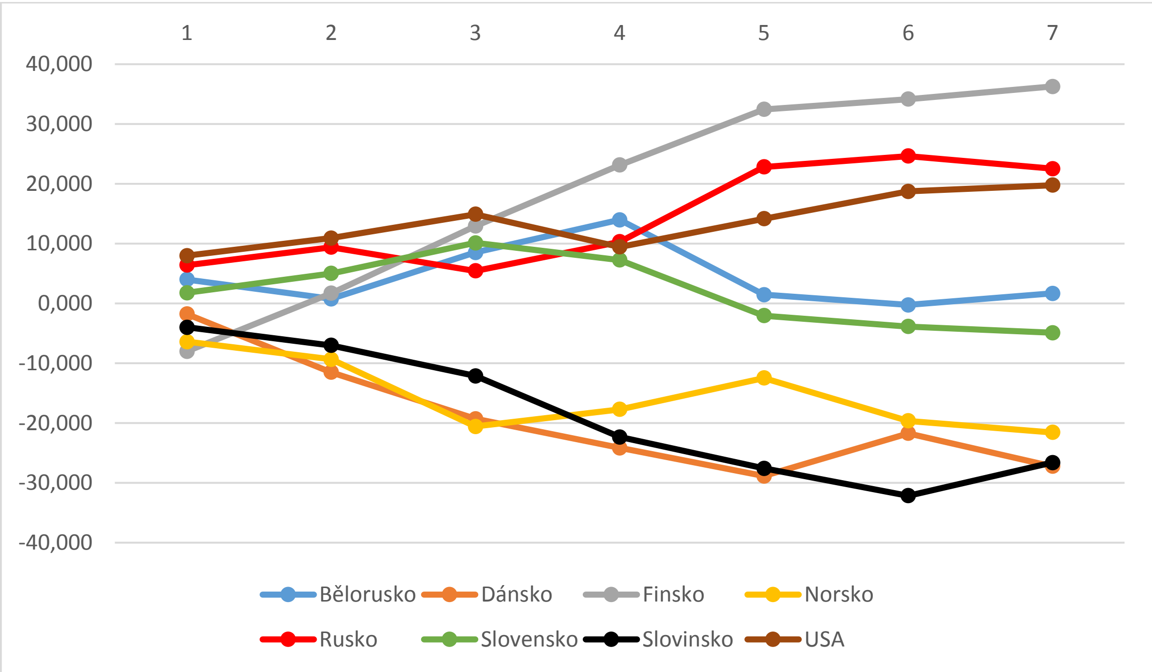
Elo nám umožňuje i hodnotit pouze podle skóre. Stačí předefinovat S. Lepší, než jen položit $S_{ij} = P_{ij}$, kde P_{ij} je počet gólů vstřelených týmem i proti týmu j, je položit

$$S_{ij} = \frac{P_{ij} + 1}{P_{ij} + P_{ji} + 2}$$

Nyní vždy platí $0 < S_{ij} < 1$ a $S_{ij} + S_{ji} = 1$, takže S_{ij} může být interpretováno jako pravděpodobnost výhry týmu i nad týmem j. Po této úpravě můžeme provést tentýž výpočet pro Elo hodnocení podle skóre a dospějeme k tomuto hodnocení a pořadí.

Tým	Hodnocení r	Pořadí
Bělorusko	1,69	4
Dánsko	-27,23	8
Finsko	36,28	1
Norsko	-21,55	6
Rusko	22,54	2
Slovensko	-4,89	5
Slovinsko	-26,61	7
USA	19,77	3

Graf 4 zachycuje vývoj hodnocení podle skóre.



Graf 4

Markovova metoda

Tato nová metoda vznikla díky Markovovým řetězcům, které vymyslel Andrej Andrejevič Markov v roce 1906. Hlavní myšlenkou této metody je, že slabší tým odkazuje na silnější. Nejjednodušší variantou by mohlo být k hodnocení používat výhry a porážky. Poražený potom odkazuje na vítěze. Také by každý tým mohl na soupeře odkázat tolikrát, kolik bodů podle oficiálního hodnocení MS v hokeji v jejich vzájemném utkání získal jeho soupeř. Další variantou je například použití skóre. Slabší tým odkazuje na silnější tolikrát, o kolik gólů prohrál. Nebo na sebe mohou odkazovat oba týmy navzájem, a to každý tolikrát, kolik gólů dal jeho soupeř. Hodnocení každého týmu je určeno hodnocením týmů, které na něj odkazují. Jedná se vlastně o modifikaci PageRanku, algoritmu, který využívá Google. Představme si nyní fanouška, který fandí v každém okamžiku „nejlepšímu“ týmu. „Nejlepší“ zde znamená, že se jedná o tým, který byl označen za „nejlepší“ předchozím týmem, kterému tento fanoušek fandil. Na začátku si fanoušek vybere náhodně jeden tým, například Slovensko. Zeptá se potom Slovenska, který tým je „nejlepší“. A to mu odpoví, že je to jeden z týmů Finsko, Norsko, Rusko a USA, protože ho právě tyto týmy porazily. Fanoušek si nyní vybere náhodně jeden z nich. Třeba Finsko. Pak se zeptá Finska „kdo je nejlepší?“ a to mu odpoví, že USA. Jde tedy k USA a opět se zeptá. Dozví se, že „nejlepší“ je Bělorusko a takhle to stále pokračuje. Hodnocení týmů odpovídá tomu, jaký podíl času by tento fanoušek fandil kterému týmu, pokud by takto pokračoval nekonečně dlouho.

Příklad – odkazy podle výher

To, že tým i odkazuje na tým j, zapíšeme do matice tak, že počet odkazů zapíšeme do i-tého sloupce a j-tého řádku. Matice odkazů používající pouze výhry a prohry je níže.

$$
\mathbf{V_1} = \begin{array}{r}
\\ \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

i-tý tým odkazuje na každý tým, který ho porazil, se stejnou váhou. Pokud znormalizujeme sloupce, dostaneme stochastickou matici $\mathbf{S_1}$.

$$
\mathbf{S_1} = \begin{array}{r}
\\ \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1/6 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/6 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 1/6 & 0 & 1/5 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/6 & 0 \\
1/3 & 1/6 & 0 & 1/5 & 0 & 1/4 & 1/6 & 0 \\
1/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\
0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/6 & 1 & 1/5 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Jenže, co by se stalo, kdybychom si vybrali pražskou skupinu, kde Kanada vyhrála všechna utkání? Pak bychom získali matici s nulovým sloupcem. Pro větší rozmanitost navíc proveďme modifikaci, kdy každý tým bude odkazovat na soupeře tolikrát, kolik mu dovolil získat oficiálních bodů. Potom dostaneme matici $\mathbf{V_2}$.

$$\mathbf{V_2} = \begin{array}{r} \\ \text{Česko} \\ \text{Francie} \\ \text{Kanada} \\ \text{Lotyšsko} \\ \text{Německo} \\ \text{Rakousko} \\ \text{Švédsko} \\ \text{Švýcarsko} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \text{CZE} & \text{FRA} & \text{CAN} & \text{LAT} & \text{GER} & \text{AUT} & \text{SWE} & \text{SUI} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Po znormování nenulových sloupců dostaneme matici $\mathbf{N_2}$, která není stochastická.

$$\mathbf{N_2} = \begin{array}{r} \\ \text{Česko} \\ \text{Francie} \\ \text{Kanada} \\ \text{Lotyšsko} \\ \text{Německo} \\ \text{Rakousko} \\ \text{Švédsko} \\ \text{Švýcarsko} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \text{CZE} & \text{FRA} & \text{CAN} & \text{LAT} & \text{GER} & \text{AUT} & \text{SWE} & \text{SUI} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3/16 & 0 & 3/16 & 3/14 & 3/16 & 1/5 & 2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 2/16 & 0 & 3/16 & 0 & 0 \\ 3/6 & 3/16 & 0 & 3/16 & 3/14 & 3/16 & 3/5 & 3/11 \\ 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 2/16 & 0 & 2/11 \\ 0 & 3/16 & 0 & 3/16 & 0 & 1/16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 & 2/14 & 0 & 0 & 2/11 \\ 2/6 & 3/16 & 0 & 3/16 & 3/14 & 3/16 & 0 & 2/11 \\ 1/6 & 3/16 & 0 & 1/16 & 3/14 & 1/16 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Problém je s nulovým sloupcem. Problém lze vyřešit podobně jako u PageRanku. Nahradíme nulové sloupce $\mathbf{0}$ sloupcem $1/n\ \mathbf{e}$, kde n je počet sloupců matice $\mathbf{N}$. Touto úpravou získáme stochastickou matici $\mathbf{S_2}$.

$$\mathbf{S_2} = \begin{array}{r} \\ \text{Česko} \\ \text{Francie} \\ \text{Kanada} \\ \text{Lotyšsko} \\ \text{Německo} \\ \text{Rakousko} \\ \text{Švédsko} \\ \text{Švýcarsko} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \text{CZE} & \text{FRA} & \text{CAN} & \text{LAT} & \text{GER} & \text{AUT} & \text{SWE} & \text{SUI} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3/16 & 1/8 & 3/16 & 3/14 & 3/16 & 1/5 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1/8 & 2/16 & 0 & 3/16 & 0 & 0 \\ 3/6 & 3/16 & 1/8 & 3/16 & 3/14 & 3/16 & 3/5 & 3/11 \\ 0 & 1/16 & 1/8 & 0 & 0 & 2/16 & 0 & 2/11 \\ 0 & 3/16 & 1/8 & 3/16 & 0 & 1/16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 1/16 & 2/14 & 0 & 0 & 2/11 \\ 2/6 & 3/16 & 1/8 & 3/16 & 3/14 & 3/16 & 0 & 2/11 \\ 1/6 & 3/16 & 1/8 & 1/16 & 3/14 & 1/16 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hodnocením týmů potom bude stacionární vektor $\mathbf{r}$, což je v tomto případě vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 matice $\mathbf{S}$, splňující podmínku, že součet jeho složek je roven jedné.

Tým	Hodnocení $\mathbf{r}_1$	Pořadí
Bělorusko	0,284	1
Dánsko	0,005	7
Finsko	0,187	3
Norsko	0,024	6
Rusko	0,125	4
Slovensko	0,096	5
Slovinsko	0,001	8
USA	0,279	2

Tým	Hodnocení $\mathbf{r}_2$	Pořadí
Česko	0,145	3
Francie	0,060	8
Kanada	0,294	1
Lotyšsko	0,073	6
Německo	0,066	7
Rakousko	0,074	5
Švédsko	0,161	2
Švýcarsko	0,128	4

Poměrně překvapivě se umístilo na prvním místě ostravské skupiny Bělorusko. Vraťme se k příměru s fanouškem. Úspěch Běloruska je způsoben patrně tím, že kdykoliv se dostane zmiňovaný fanoušek k USA, musí odtamtud nutně k Bělorusku. Od Běloruska může k Finsku, odkud musí opět k USA, nebo k Rusku, odkud jde zase k Finsku nebo rovnou k USA, a nebo ke Slovensku. To, že od USA musí vždy rovnou k Bělorusku, zaručuje Bělorusku nejhůře stejně dobré hodnocení, jaké má USA. Ale do Běloruska se navíc může dostat i jinými způsoby než přes USA, a proto má lepší hodnocení.

Příklad – odkazy podle rozdílu skóre

Pokud se rozhodneme, že poražený bude na vítěze nějakého utkání odkazovat tolikrát, kolik činí rozdíl skóre tohoto utkání, získáme následující matici odkazů $\mathbf{V}$.

$$\mathbf{V} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccccc} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Z matice $\mathbf{V}$ snadno vytvoříme matici $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccccc} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 4/13 & 0 & 1/14 & 0 & 0 & 2/14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/14 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & 3/13 & 0 & 5/14 & 1/3 & 3/6 & 4/14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 2/14 & 0 \\ 7/9 & 3/13 & 0 & 4/14 & 0 & 1/6 & 2/14 & 0 \\ 1/9 & 1/13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/14 & 0 \\ 0 & 1/13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/13 & 1 & 1/14 & 2/3 & 1/6 & 2/14 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Výsledné hodnocení je následující.

Tým	Hodnocení $\mathbf{r}$	Pořadí
Bělorusko	0,296	1
Dánsko	0,001	7
Finsko	0,130	4
Norsko	0,006	6
Rusko	0,238	3
Slovensko	0,033	5
Slovinsko	0,0001	8
USA	0,295	2

Pokud spolu dva týmy hrály vícekrát, můžeme buď zvolit celkový rozdíl jejich zápasů, nebo jejich průměr.

Příklad – odkazy podle celého skóre

Pokud zvolíme model využívající kompletní skóre, kde každý tým odkazuje na svého soupeře tolikrát, kolikrát dovolil soupeři skórovat, dostaneme následující matice $\mathbf{V}_{point}$ a $\mathbf{S}_{point}$.

$$\mathbf{V}_{point} = \begin{array}{rc} & \begin{matrix} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & 6 & 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 4 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{S}_{point} = \begin{array}{rc} & \begin{matrix} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 5/20 & 2/9 & 3/23 & 0 & 1/19 & 4/22 & 5/14 \\ 1/19 & 0 & 0 & 4/23 & 2/16 & 3/19 & 0 & 0 \\ 3/19 & 3/20 & 0 & 5/23 & 3/16 & 3/19 & 4/22 & 1/14 \\ 2/19 & 1/20 & 0 & 0 & 2/16 & 3/19 & 3/22 & 1/14 \\ 7/19 & 5/20 & 2/9 & 6/23 & 0 & 3/19 & 5/22 & 2/14 \\ 2/19 & 4/20 & 0 & 2/23 & 2/16 & 0 & 3/22 & 4/14 \\ 2/19 & 1/20 & 0 & 1/23 & 3/16 & 1/19 & 0 & 1/14 \\ 2/19 & 1/20 & 5/9 & 2/23 & 4/16 & 5/19 & 3/22 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tento model je velmi užitečný, neboť pravděpodobnost nulového sloupce je výrazně snížena.

Tým	Hodnocení $\mathbf{r}_{point}$	Pořadí
Bělorusko	0,145	3
Dánsko	0,065	8
Finsko	0,133	4
Norsko	0,085	6
Rusko	0,185	2
Slovensko	0,123	5
Slovinsko	0,077	7
USA	0,189	1

Příklad – další statistiky

K ohodnocení týmů nemusíme použít jen vstřelené skóre. Můžeme použít třeba i počet střel nebo počet trestných minut. Níže jsou tabulky, které tyto údaje obsahují.

Ostrava	BLR	DEN	FIN	NOR	RUS	SVK	SLO	USA
Bělorusko		35-26	25-26	17-24	13-32	18-34	26-23	23-30
Dánsko	26-35		16-41	19-25	20-33	19-43	24-21	21-41
Finsko	26-25	41-16		30-20	30-35	31-22	33-13	30-27
Norsko	24-17	25-19	20-30		19-36	23-24	24-18	23-35
Rusko	32-13	33-20	35-30	36-19		32-22	35-25	17-20
Slovensko	34-18	43-19	22-31	24-23	22-32		33-23	25-34
Slovinsko	23-26	21-24	13-33	18-24	25-35	23-33		22-17
USA	30-23	41-21	27-30	35-23	20-17	34-25	17-22	

Tabulka počtu střel

Ostrava	BLR	DEN	FIN	NOR	RUS	SVK	SLO	USA
Bělorusko		8-18	6-8	10-16	18-4	8-10	4-4	10-8
Dánsko	18-8		8-2	8-8	10-12	10-6	2-2	6-6
Finsko	8-6	2-8		12-10	25-6	8-10	4-6	4-8
Norsko	16-10	8-8	10-12		10-8	10-45	4-10	12-20
Rusko	4-18	12-10	6-25	8-10		2-4	4-4	6-6
Slovensko	10-8	6-10	10-8	45-10	4-2		6-12	12-10
Slovinsko	4-4	2-2	6-4	10-4	4-4	12-6		4-6
USA	8-10	6-6	8-4	20-12	6-6	10-12	6-4	

Tabulka počtu trestných minut

Z údajů o počtu střel vytvoříme novou matici $\mathbf{V}_{shots}$ stejně jako jsme vytvořili $\mathbf{V}_{point}$. Matici trestných minut $\mathbf{V}_{penalty}$ ovšem vytvoříme opačně. Lepší tým je jistě ten, který má méně trestných minut. To znamená, že tentokrát bude každý tým odkazovat na soupeře tolikrát, kolik měl daný tým trestných minut. Z těchto údajů dostaneme matice $\mathbf{V}_{shots}$, $\mathbf{S}_{shots}$, $\mathbf{V}_{penalty}$ a $\mathbf{S}_{penalty}$.

$$
\mathbf{V}_{shots} = \begin{array}{r}
\\ \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 35 & 25 & 17 & 13 & 18 & 26 & 23 \\
26 & 0 & 16 & 19 & 20 & 19 & 24 & 21 \\
26 & 41 & 0 & 30 & 30 & 31 & 33 & 30 \\
24 & 25 & 20 & 0 & 19 & 23 & 24 & 23 \\
32 & 33 & 35 & 36 & 0 & 32 & 35 & 17 \\
34 & 43 & 22 & 24 & 22 & 0 & 33 & 25 \\
23 & 21 & 13 & 18 & 25 & 23 & 0 & 22 \\
30 & 41 & 27 & 35 & 20 & 34 & 17 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\mathbf{S}_{shots} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccccc} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 35/239 & 25/158 & 17/179 & 13/149 & 18/180 & 26/192 & 23/161 \\ 26/195 & 0 & 16/158 & 19/179 & 20/149 & 19/180 & 24/192 & 21/161 \\ 26/195 & 41/239 & 0 & 30/179 & 30/149 & 31/180 & 33/192 & 30/161 \\ 24/195 & 25/239 & 20/158 & 0 & 19/149 & 23/180 & 24/192 & 23/161 \\ 32/195 & 33/239 & 35/158 & 36/179 & 0 & 32/180 & 35/192 & 17/161 \\ 34/195 & 43/239 & 22/158 & 24/179 & 22/149 & 0 & 33/192 & 25/161 \\ 23/195 & 21/239 & 13/158 & 18/179 & 25/149 & 23/180 & 0 & 22/161 \\ 30/195 & 41/239 & 27/158 & 35/179 & 20/149 & 34/180 & 17/192 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{V}_{penalty} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccccc} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 18 & 8 & 16 & 4 & 10 & 4 & 8 \\ 8 & 0 & 2 & 8 & 12 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 8 & 0 & 10 & 6 & 10 & 6 & 8 \\ 10 & 8 & 12 & 0 & 8 & 45 & 10 & 20 \\ 18 & 10 & 25 & 10 & 0 & 4 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 8 & 10 & 2 & 0 & 12 & 10 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 0 & 6 \\ 10 & 6 & 4 & 12 & 6 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{S}_{penalty} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccccc} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 18/62 & 8/63 & 16/70 & 4/42 & 10/93 & 4/42 & 8/64 \\ 8/64 & 0 & 2/63 & 8/70 & 12/42 & 6/93 & 2/42 & 6/64 \\ 6/64 & 8/62 & 0 & 10/70 & 6/42 & 10/93 & 6/42 & 8/64 \\ 10/64 & 8/62 & 12/63 & 0 & 8/42 & 45/93 & 10/42 & 20/64 \\ 18/64 & 10/62 & 25/63 & 10/70 & 0 & 4/93 & 4/42 & 6/64 \\ 8/64 & 10/62 & 8/63 & 10/70 & 2/42 & 0 & 12/42 & 10/64 \\ 4/64 & 2/62 & 4/63 & 4/70 & 4/42 & 6/93 & 0 & 6/64 \\ 10/64 & 6/62 & 4/63 & 12/70 & 6/42 & 12/93 & 4/42 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Teď je na čase sloučit stochastické matice jednotlivých statistik do výsledné stochastické matice $\mathbf{S}$. Stačí zvolit koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ takové, že $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ a $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Potom

$$\mathbf{S} = \alpha_1 \mathbf{S}_{point} + \alpha_2 \mathbf{S}_{shots} + \alpha_3 \mathbf{S}_{penalty}$$

Zvolme například $\alpha_1 = 0{,}5;\ \alpha_2 = 0{,}3$ a $\alpha_3 = 0{,}2$. Potom dostáváme matici $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} \approx \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccccc} \text{BLR} & \text{DEN} & \text{FIN} & \text{NOR} & \text{RUS} & \text{SVK} & \text{SLO} & \text{USA} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Bělorusko} \\ \text{Dánsko} \\ \text{Finsko} \\ \text{Norsko} \\ \text{Rusko} \\ \text{Slovensko} \\ \text{Slovinsko} \\ \text{USA} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}227 & 0{,}184 & 0{,}139 & 0{,}045 & 0{,}078 & 0{,}151 & 0{,}246 \\ 0{,}091 & 0 & 0{,}037 & 0{,}142 & 0{,}160 & 0{,}124 & 0{,}047 & 0{,}058 \\ 0{,}138 & 0{,}152 & 0 & 0{,}188 & 0{,}183 & 0{,}152 & 0{,}171 & 0{,}117 \\ 0{,}121 & 0{,}082 & 0{,}076 & 0 & 0{,}139 & 0{,}214 & 0{,}153 & 0{,}141 \\ 0{,}290 & 0{,}199 & 0{,}257 & 0{,}219 & 0 & 0{,}141 & 0{,}187 & 0{,}122 \\ 0{,}130 & 0{,}186 & 0{,}067 & 0{,}112 & 0{,}116 & 0 & 0{,}177 & 0{,}221 \\ 0{,}101 & 0{,}058 & 0{,}037 & 0{,}063 & 0{,}163 & 0{,}078 & 0 & 0{,}095 \\ 0{,}130 & 0{,}096 & 0{,}342 & 0{,}136 & 0{,}194 & 0{,}214 & 0{,}114 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Každý prvek matice $\mathbf{S}$ je zde zaokrouhlen na 3 desetinná místa. Stacionární vektor $\mathbf{r}$ byl však spočítán z přesné matice $\mathbf{S}$ a zaokrouhlen byl až jeho přesný výsledek.

Tým	Hodnocení $\mathbf{r}$	Pořadí
Bělorusko	0,129	4
Dánsko	0,088	7
Finsko	0,135	3
Norsko	0,118	6
Rusko	0,167	1
Slovensko	0,124	5
Slovinsko	0,082	8
USA	0,156	2

Co s neporaženými týmy?

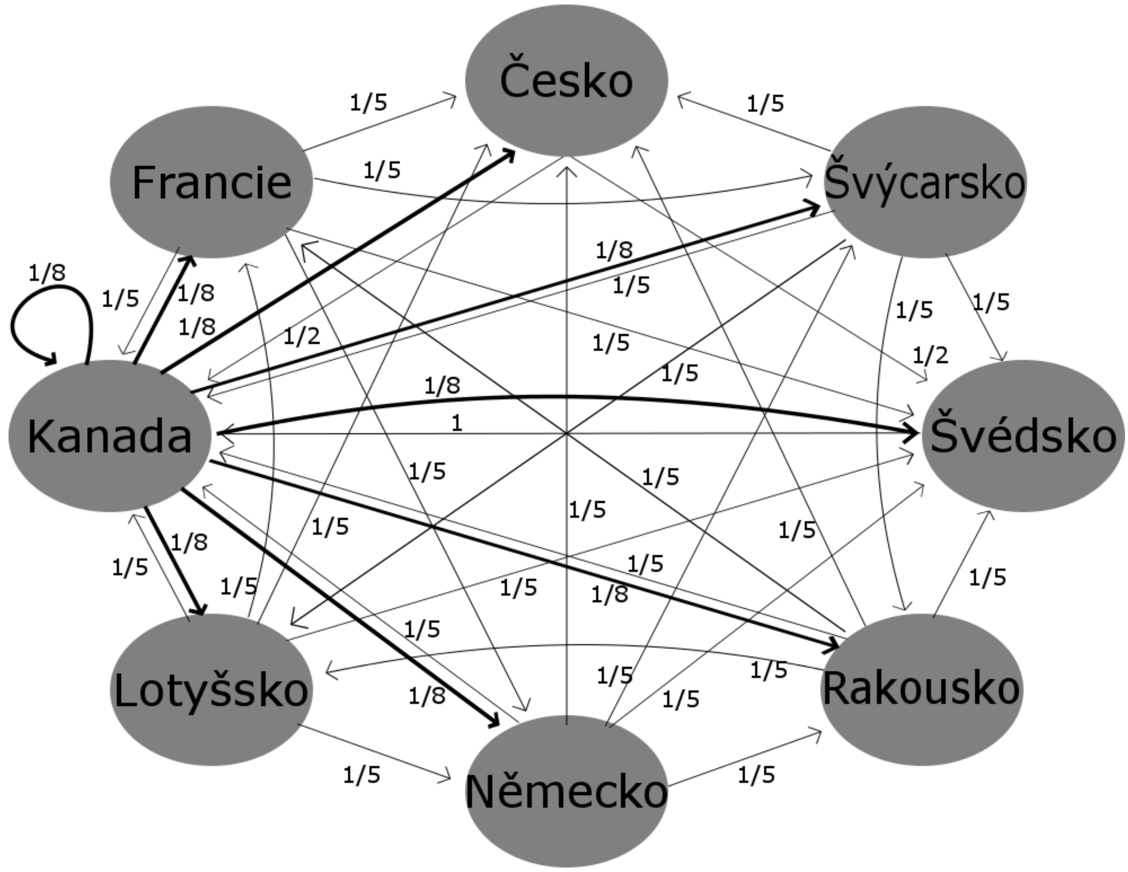
Občas se může přihodit, že matice $\mathbf{V}$ obsahuje nulový sloupec. Už dříve jsme si ukázali jedno z možných řešení, kdy jsme sloupec $\mathbf{0}$ nahradili sloupcem $1/n\ \mathbf{e}$. To však není jediný možný způsob řešení tohoto problému.

Například se nabízí otázka, proč by neporažený tým nemohl ukazovat jen sám na sebe? Mohli bychom tedy u každého neporaženého týmu i nahradit sloupec $\mathbf{0}$ sloupcem $\mathbf{e}_i$. Teď máme stochastickou matici a tudíž i Markovův řetězec. Avšak je tu jiný problém. Aby existoval stacionární vektor a byl unikátní, musí být Markovův řetězec ireducibilní (a aperiodický, což je téměř vždy splněno). Ireducibilní řetězec je takový, ve kterém je cesta z každého týmu do každého jiného týmu. Když neporažené týmy odkazují pouze na sebe, je řetězec reducibilní. Pokud by se vydal na cestu dříve zmiňovaný fanoušek, skončil by vždy u neporaženého týmu, odkud by se už nedostal, a všechny poražené týmy by všechny měly hodnocení 0, neboť poměr času stráveného u nich k celkovému času by se limitně blížil právě k nule, pokud by se čas blížil k nekonečnu. Řešením je kombinace prvního řešení a skládání jednotlivých statistik do jedné matice. To znamená, že zvolíme β takové, že $0 < \beta < 1$. Markovova matice $\bar{\mathbf{S}}$ potom je

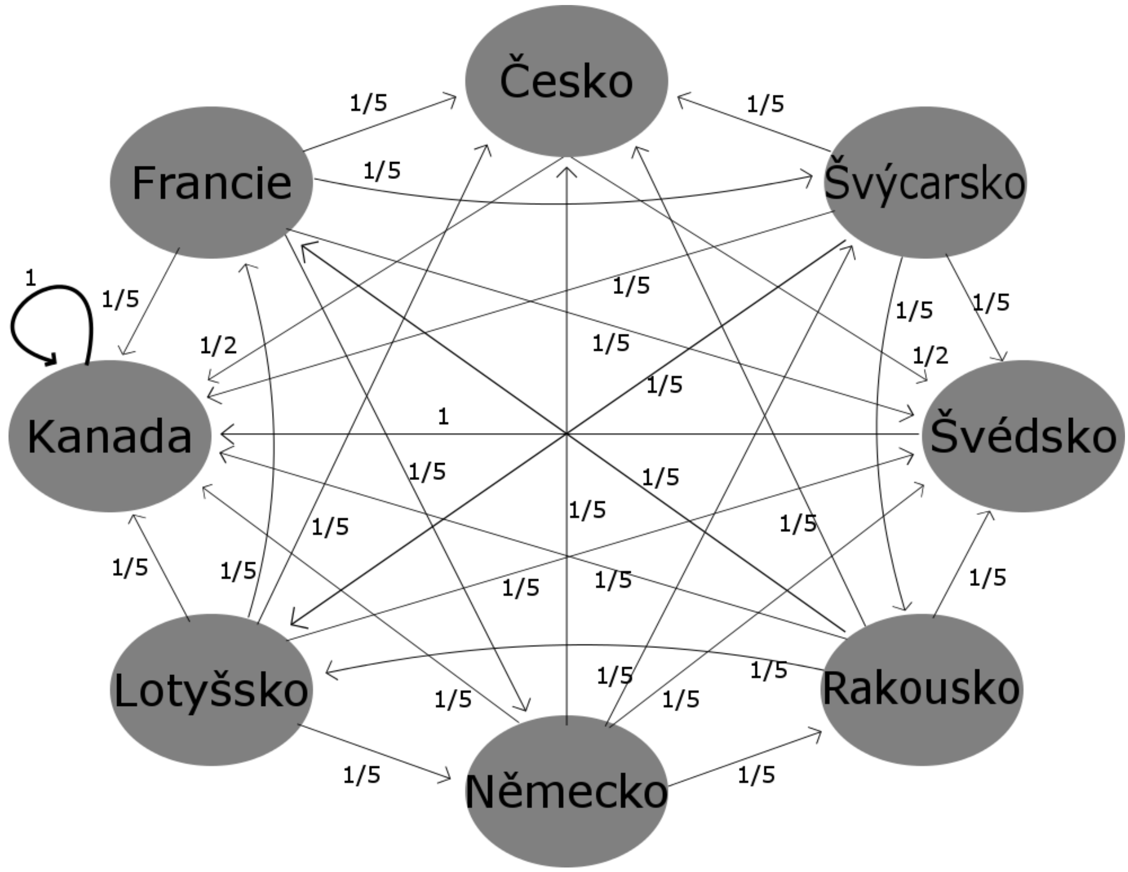
$$\bar{\mathbf{S}} = \beta\mathbf{S} + (1-\beta)/n\ \mathbf{E},$$

kde $\mathbf{E}$ je matice ze samých jednotek a *n* je počet týmů. Nyní je každý tým propojen se všemi ostatními a $\mathbf{S}$ je tedy ireducibilní. Její stacionární vektor existuje a je unikátní. Jeho hodnota samozřejmě záleží na zvoleném parametru β. Pro web se běžně používá hodnota 0,85, zatímco třeba pro NFL (americký fotbal) 0,6 a pro NCAA basketball 0,5.

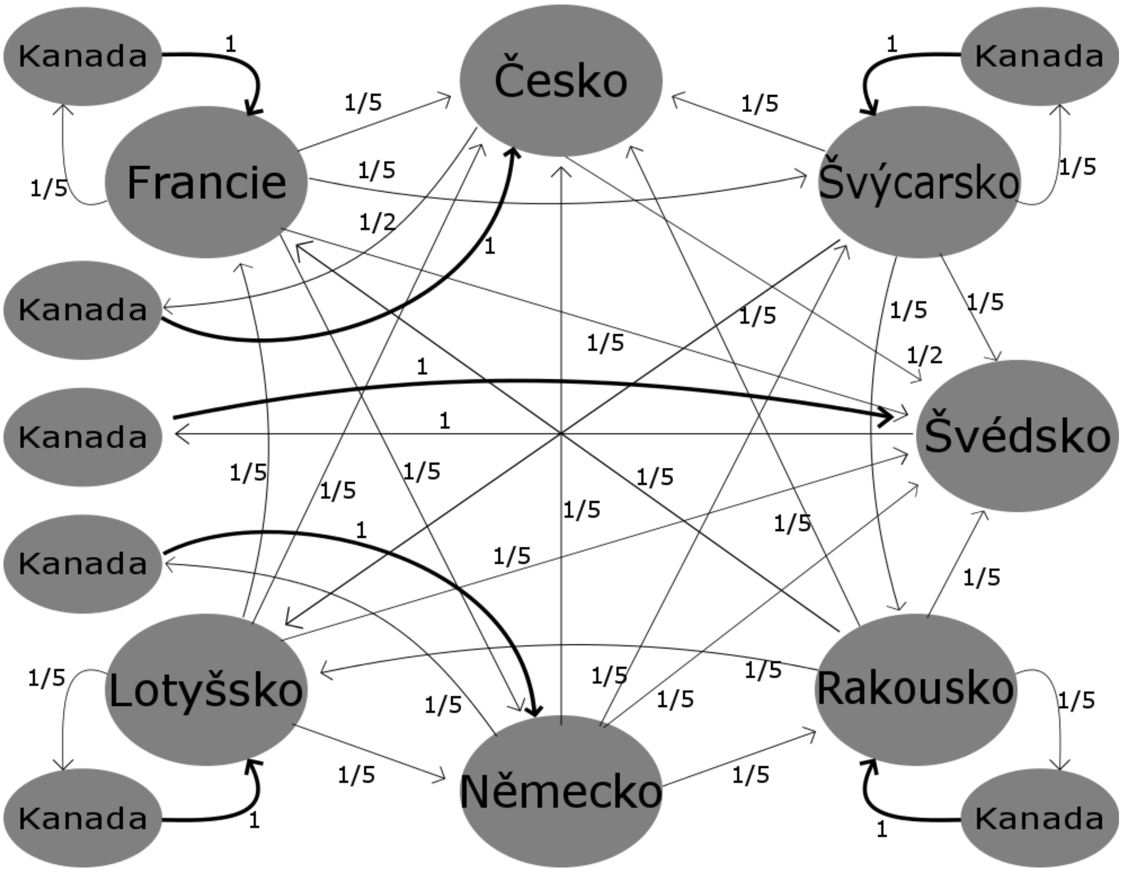
Další způsob, jak se vypořádat s nulovým sloupcem, je poslat zmiňovaného fanouška zpět k týmu, který ho poslal k současnému neporaženému. Odtamtud může pokračovat ve své cestě. Tato myšlenka byla úspěšně implementována v hodnocení webů, kde si tento návrat můžeme představit jako stisknutí tlačítka „zpět“.



Neporažené týmy odkazují na ostatní týmy rovnoměrně



Neporažené týmy odkazují jen na sebe



Neporažené týmy odkazují zpět na toho, kdo na ně odkázal

Závěr

Závěrem bych chtěl pouze podotknout, že žádná z výše popsaných metod není určena pouze pro hodnocení sportovních týmů. To je ve skutečnosti jen jedno z mnoha využití těchto široce použitelných technik, které se dají aplikovat prakticky na cokoliv.

David Vondrouš

Zdroje

Hlavní zdroj: *Amy N. Langville a Carl D. Meyer. Who’s #1? The Science of Rating and Ranking*

[1] *http://www.iihfworlds2015.com/*

[2] *https://cs.wikipedia.org/wiki/Mistrovstv%C3%AD_sv%C4%9Bta_v_ledn%C3%ADm_hokeji_2015*

[3] *nb.vse.cz/~stepkova/cf/k02_matice.pdf*

[4] *https://cs.wikipedia.org/wiki/Logistick%C3%A1_funkce*