

Ukázka - Systémy hromadné obsluhy

Příklad:

Pan Pumpička se rozhodl postavit samoobslužnou čerpací stanici u obce Česká Bříza. Na základě průzkumu ví, že by čerpací stanici mohlo průměrně navštívit 32,1 lidí za hodinu, s tím, že jeden stojan zvládne obsloužit 12 lidí za hodinu. Pan Pumpička by chtěl vypracovat rozbor kolik stojanů (všechny stojany mají stejnou nabídku) by měl postavit, aby pravděpodobnost, že je na pumpě méně aut než 15 byla vyšší než 95% (prostor pro tvoření fronty je totiž jen pro 20 aut). Dále by chtěl, aby byl průměrný čas, který zákazník čeká ve frontě, menší než 1 minuta.

Toto je klasická úloha teorie nazývaní se Systémy hromadné obsluhy. Vytvoříme si matematický model této situace a úlohu vyřešíme nejprve obecně a následně i pro tento konkrétní příklad.

Systémy hromadné obsluhy se analyzují podle několika základních kritérií, pro náš příklad předpokládáme následující:

- 1) počet zákazníků je nekonečný, jedná se o takzvaný otevřený systém
- 2) zákazník je obsloužen v pořadí, v kterém přijel (FIPO)
- 3) příjezd zákazníků probíhá takzvaným Poissonovým tokem. Pravděpodobnost, že za časový údaj t přijede právě k zákazníků je určena vzorcem:

$$P(N(t)=k) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

kde λ je konstanta určující intenzitu příjezdů a N funkce označující počet zákazníků.

- 4) doba obsluhy má exponenciální rozdělení. Pravděpodobnost, že bude zákazník obsloužen v čase t je určena vzorcem:

$$P(t) = \mu e^{-\mu \cdot t}$$

Systém s jednou obslužnou přepážkou

Pro jednoduchost nejprve vytvoříme matematický model systému s jednou obslužnou přepážkou. Tento model se v literatuře vyskytuje pod označením M/M/1.

Označme λ intenzitu příchoďů zákazníků za čas t

Označme μ intenzitu obsluhy (průměrný počet obsloužených) za čas t

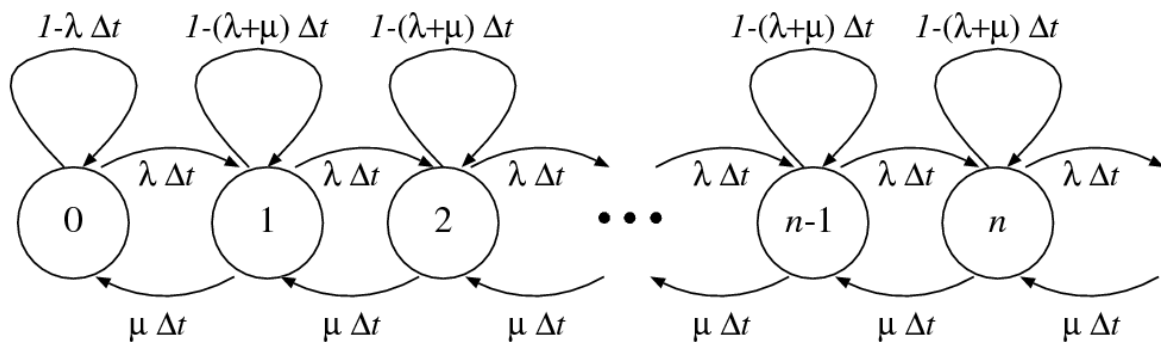
Analyzovat je možné pouze systémy, u kterých platí: $\lambda < \mu$. Pokud by to tak nebylo, mohla by se vytvořit nekonečně dlouhá fronta.

Nyní provedeme diskuzi událostí, které mohou v našem systému nastat:

- 1) příchod nového zákazníka s pravděpodobností: $P = \lambda \cdot \Delta t$
 - 2) ukončení obsluhy zákazníka s pravděpodobností: $P = \mu \cdot \Delta t$
 - 3) žádná událost se nestane s pravděpodobností: $P = 1 - (\lambda + \mu) \Delta t$
- kde Δt je nějaký časový okamžik

Schéma systému:

v kolečkách je počet zákazníků v systému



označme vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$ jako vektor pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému

např. $p_n(t)$ značí pravděpodobnost, že je v systému (ve frontě i obsluhovaných) právě n hostů v čase t

$$P = \begin{pmatrix} (1-\lambda)\Delta t & \mu\Delta t & 0 & \dots & 0 \\ \lambda\Delta t & 1-(\lambda+\mu)\Delta t & \mu\Delta t & 0 & \dots \\ 0 & \lambda\Delta t & 1-(\lambda+\mu)\Delta t & \mu\Delta t & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda\Delta t & 1-(\lambda+\mu)\Delta t & \mu\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\Delta t & \ddots \end{pmatrix}$$

$P(i,j)$ - matice pravděpodobností přechodů systému ze stavu i do stavu j v časovém intervalu Δt

dynamický vývoj systému je popsán vzorcem:

$$\vec{p}(t + \Delta t) = P \vec{p}(t) \quad (1)$$

Matici pravděpodobnosti přechodů upravíme do tvaru:

$$P = I + (\Delta t) A$$

Kde I je jednotková matice.

Vztah (1) přepíšeme:

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t) + (\Delta t) A \vec{p}(t)$$

dále upravíme:

$$\frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{(\Delta t)} = A \vec{p}(t)$$

limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0^+$ dostáváme soustavu diferenciálních rovnic.

$$\vec{p}'(t) = A \vec{p}(t) \quad (2)$$

s počáteční podmínkou

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) = 1 \quad (3)$$

Uvažujme, že řešíme takzvaný **stacionární systém**, to znamená systém, ve kterém pravděpodobnosti jednotlivých jevů nezávisí na čase t . Většina „rozumně se chovajících“ systémů se do takového stavu po nějakém čase ustálí. Nás tedy budou zajímat pravděpodobnosti $p_n(t)$

, které ovšem nezávisí na čase t , tudíž jde pouze o pravděpodobnosti p_n , což jsou pravděpodobnosti, že v systému bude n hostů (měřeno v kterémkoliv čase).

To, že se $\vec{p}(t)$ v čase nemění znamená, že $\vec{p}'(t)=0 \text{ pro } \forall t$. Z naší diferenciální rovnice (2) se stává rovnice algebraická $0=A\vec{p}$.

dostáváme :

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ 0 &= \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + \mu p_2 \\ 0 &= \lambda p_1 - (\lambda + \mu) p_2 + \mu p_3 \\ &\vdots \\ 0 &= \lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu) p_n + \mu p_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Z první rovnice:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

zdá se, že obecné řešení pro $n > 0$ má tvar

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

důkaz provedeme matematickou indukcí

1) pro $n=1$ a pro $n=2$ zřejmě platí

2) předpokládejme platnost vzorce pro n a $n-1$, dokažme platnost pro $n+1$

$$0 = \lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu) p_n + \mu p_{n+1} \quad \text{použijeme indukční předpoklad}$$

$$0 = \lambda \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} p_0 - (\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 + \mu p_{n+1}$$

$$0 = -\left(\frac{\lambda^{n+1}}{\mu^n}\right) p_0 + \mu p_{n+1}$$

$$\text{a tedy } p_{n+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} p_0$$

tudíž platí :

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

dosazením do vztahu(3) dopočteme p_0 :

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 = p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = p_0 \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Pravděpodobnost, že v systému není žádný zákazník

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Pravděpodobnost, že v systému je právě n zákazníků

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad \text{pro } n > 0$$

Pravděpodobnost, že systém pracuje - U

je stejná jako, že v systému není nula zákazníků tedy

$$U = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{tento vztah se také nazývá vyžitelnost systému}$$

Střední hodnota počtu zákazníků v systému

nechť N je náhodná veličina udávající počet zákazníků v systému
pravděpodobnosti této náhodné veličiny máme již spočítány

$$P(N=0)=p_0=1-\frac{\lambda}{\mu}$$

$$P(N=n)=p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right), \text{ pro } n>0$$

Z definice střední hodnoty:

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)'$$

$$EN = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)' = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)' = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

protože platí $\frac{\lambda}{\mu} < 1$

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě

Nechť N_f je náhodná veličina udávající počet zákazníků ve frontě.

Pravděpodobnosti N_f máme již také spočítány, jen si musíme uvědomit, že

$$P(N_f=n-1)=P(N=n)$$

Pravděpodobnost, že je ve frontě $n-1$ zákazníků, je stejná jako, že je v systému n zákazníků (jeden je obsluhován).

Střední hodnotu N_f teď můžeme vypočítat pomocí pravděpodobností hodnot N

$$EN_f = 0 \cdot P(N=1) + 1 \cdot P(N=2) + 3 \cdot P(N=2) + \dots$$

$$EN_f = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n = EN - (1-p_0) = EN - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{(\mu-\lambda)\mu}$$

Průměrný čas, který zákazník stráví v systému

$$T = EN \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad \text{na základě Littleova vztahu *,}$$

Průměrný čas, který zákazník stráví ve frontě

$$T_f = EN_f \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)\mu} \quad \text{znovu použit Littleův vztah}$$

Model s více obslužnými přepážkami M/M/1

Označme λ intenzitu příchodů zákazníků za čas t

Označme μ intenzitu obsluhy (průměrný počet obsloužených) za čas t

Označme c počet obslužných přepážek, $c \geq 1$

Pozn. střední rychlost obsluhy je $c \cdot \mu$

Analyzovat je možné pouze systémy, u kterých platí: $\lambda < \mu \cdot c$. Pokud by to tak nebylo, mohla by se vytvořit nekonečně dlouhá fronta.

Poznamenejme, že stále platí předpoklady 1-4 z úvodu.

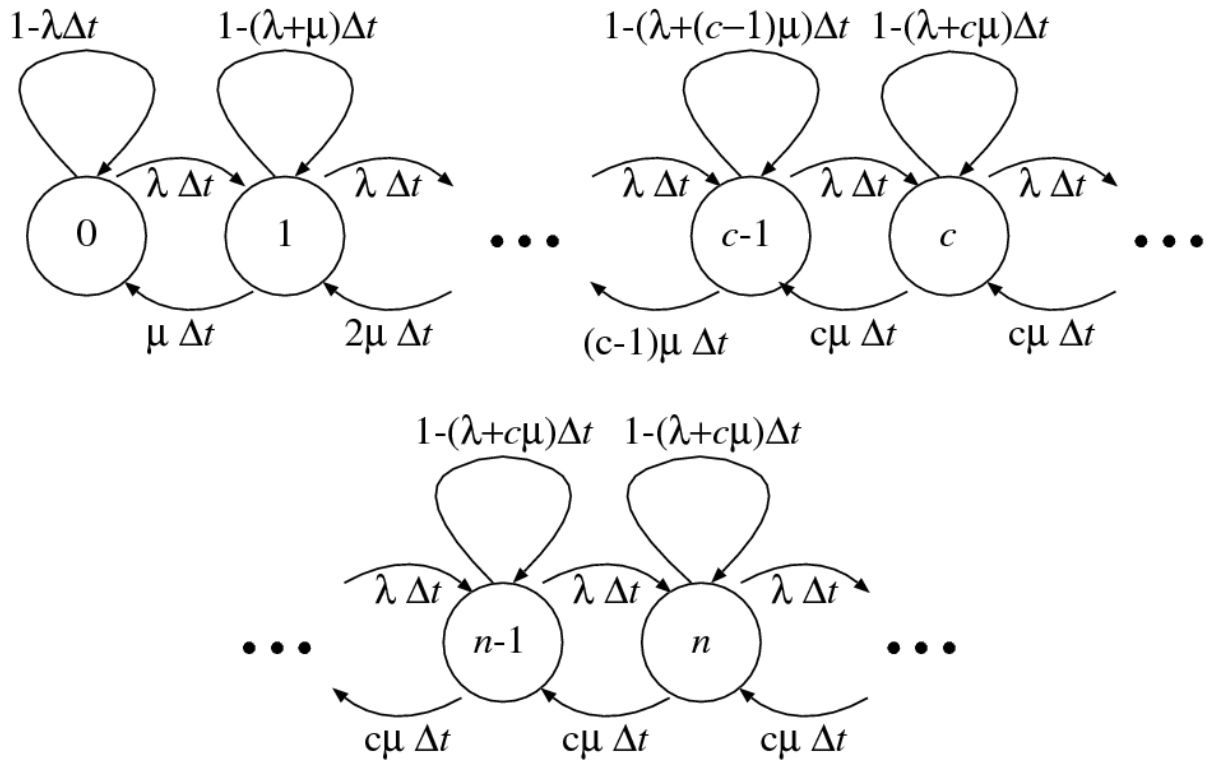
Nyní budeme postupovat podobně jako v systému s jednou přepážkou.

Diskuze událostí:

- 1) příchod nového zákazníka s pravděpodobností: $P = \lambda \cdot \Delta t$
 - 2) ukončení obsluhy zákazníka s pravděpodobností: $P = \min(c, k) \cdot \mu \cdot \Delta t$, kde k je aktuální počet obsazených přepážek
 - 3) nic se neděje s pravděpodobností: $P = 1 - (\lambda + \min(c, k) \cdot \mu) \Delta t$
- kde Δt je nějaký časový okamžik

Schéma systému:

v kolečkách je počet zákazníků v systému



Znovu označíme vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$ jako vektor pravděpodobností jednotlivých stavů systému

Matice P nyní obecně vypadá:

$$P = \begin{pmatrix} (1-\lambda) \Delta t & \mu \Delta t & 0 & 0 \\ \lambda \Delta t & 1 - (\lambda + \min(c, 1) \cdot \mu) \Delta t & \min(c, 2) \cdot \mu \Delta t & 0 \\ 0 & \lambda \Delta t & 1 - (\lambda + \min(c, 2) \cdot \mu) \Delta t & \min(c, 3) \cdot \mu \Delta t \\ \vdots & 0 & \lambda \Delta t & 1 - (\lambda + \min(c, 3) \cdot \mu) \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \Delta t \end{pmatrix}$$

Dynamický vývoj systému je znovu popsán vzorcem

$$\vec{p}(t + \Delta t) = P \vec{p}(t)$$

Stejnými úpravami, jako v systému s jednou přepážkou, dojdeme ke tvaru

$$\vec{p}'(t) = A \vec{p}(t) \text{ s počáteční podmínkou } \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) = 1$$

Znovu budeme předpokládat stacionární systém, dostáváme algebraickou soustavu:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ 0 &= \lambda p_0 - (\lambda + \min(c, 1) \cdot \mu) p_1 + \min(c, 2) \cdot \mu p_2 \\ 0 &= \lambda p_1 - (\lambda + \min(c, 2) \cdot \mu) p_2 + \min(c, 3) \cdot \mu p_3 \\ &\vdots \\ 0 &= \lambda p_{n-1} - (\lambda + \min(c, n) \cdot \mu) p_n + \min(c, n+1) \cdot \mu p_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Z první rovnice:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

nyní řešení rozdělíme na dvě části

pro $0 < n \leq c$:

postupným dosazováním podobně jako v případě systému s jednou přepážkou odhadneme vztah

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0$$

a znovu jej dokážeme indukcí

1) vztah zřejmě platí pro $n=1$ a $n=2$

2) předpokládejme, že vztah platí pro n a $n-1$ a dokažme, že pak platí pro $n+1$

$$0 = \lambda p_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) p_n + (n+1) \cdot \mu p_{n+1} \text{ použijeme indukční předpoklad}$$

$$0 = \lambda \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-1} p_0 - (\lambda + n \cdot \mu) \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 + (n+1) \cdot \mu p_{n+1}$$

$$0 = \frac{-1}{n!} \left(\frac{\lambda^{n+1}}{\mu^n} \right) p_0 + (n+1) \cdot \mu p_{n+1}$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+1} p_0$$

pro $c < n$:

systém můžeme nahradit systémem s jednou přepážkou a intenzitou obsluhy $c \cdot \mu$

(musíme si ale uvědomit, že začínáme ve stavu c)

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu} \right)^{n-c} p_c = \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu} \right)^{n-c} \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{(c! c^{n-c})} p_0$$

pro vyjádření p_c jsme využili vztah odvozený výše

$$\text{dopočítáme } p_0 \text{ znovu pomocí podmínky } \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{c-1} p_n + \sum_{n=c}^{\infty} p_n = p_0 \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{(c! c^{n-c})} \right)$$

sečteme sumu

$$\sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{(c! c^{n-c})} = \frac{c^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu} \right)^n = \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu} \right)^c \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu} \right)^{n-c} = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu} \right)^n = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu} \right)}$$

celkem tedy

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{\mu c}{\mu c - \lambda}}$$

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě

Nechť N_f je náhodná veličina udávající počet zákazníků ve frontě.

Pravděpodobnosti N_f máme již také spočítány, jen si musíme uvědomit, že

$$P(N_f = n - c) = P(N = n)$$

pravděpodobnost, že ve frontě je $n - c$ zákazníků je stejná jako že je v systému n zákazníků (c zákazníků je obsluhováno)

Střední hodnotu N_f teď můžeme vypočítat pomocí pravděpodobností hodnot N

$$EN_f = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{(c! c^{n-c})} p_0 = p_0 \frac{1}{c \cdot c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu}\right)^{n-c} = p_0 \frac{1}{c \cdot c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu}\right)^{n-1} =$$

$$p_0 \frac{1}{c \cdot c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu}\right)^n\right)' = p_0 \frac{1}{c \cdot c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{c \cdot \mu}\right)}\right)' = p_0 \frac{1}{c \cdot c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \frac{(\mu c)^2}{(\mu c - \lambda)^2} =$$

$$EN_f = p_0 \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\mu c}{(\mu c - \lambda)^2}$$

Střední hodnota počtu zákazníků v systému

nechť N je náhodná veličina udávající počet zákazníků v systému

EN dopočteme pomocí vztahu $EN_f = EN - \frac{\lambda}{\mu}$, s kterým jsme se již setkali u odvození střední hodnoty počtu osob ve frontě u systému s jednou přepážkou. A tento vztah platí i v tomto případě.

$$EN = p_0 \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\mu c}{(\mu c - \lambda)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

Průměrný čas, který zákazník stráví v systému

$$T = EN \frac{1}{\lambda} \text{ na základě Littleova vztahu}$$

Průměrný čas, který zákazník stráví ve frontě

$$T_f = EN_f \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)\mu} \text{ znovu použít Littleův vztah}$$

Nyní vypracujeme příklad pana Pumpičky

$$\lambda = 20$$

$$\mu = 45$$

Je zřejmé, že bude potřeba postavit nejméně 3 stojany.

Hodnoty pro 3 stojany:

$$p_0 = 0,027247243 \text{ pravděpodobnost, že na čerpací stanici nebude žádný zákazník je 2,7\%}$$

$$EN = 3,292216045 \text{ průměrný počet zákazníků na čerpací stanici (i ve frontě) je 3,2}$$

$$EN_f = 0,6172 \text{ průměrný počet zákazníků čekajících ve frontě je 0,6}$$

$$T = 0,10256 \text{ h průměrný čas zákazníků strávený na čerpací stanici (i ve frontě) je 6,15 minut}$$

$$T_f = 0,019 \text{ h průměrný čas, který zákazník stráví ve frontě je 1,14 minut}$$

Pravděpodobnost, že je na čerpací stanici méně než 15 aut

$$P = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 + \sum_{n=4}^{14} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{(c! c^{n-c})} p_0 = 0,2844681 + 0,5126 = 0,7970681$$

Hodnoty pro 4 stojany:

$$p_0 = 0,059228886 \text{ pravděpodobnost, že na čerpací stanici nebude žádný zákazník je 5,9\%}$$

$$EN = 2,770967559 \text{ průměrný počet zákazníků na čerpací stanici (i ve frontě) je 2,7}$$

$$EN_f = 0,095967559 \text{ průměrný počet zákazníků čekajících ve frontě je 0,95}$$

$$T = 0,0863 \text{ h průměrný čas zákazníků strávený na čerpací stanici (i ve frontě) je 5,18 minut}$$

$T_f = 0,002989644 h$ průměrný čas, který zákazník stráví ve frontě je 10,7 sekund

Pravděpodobnost, že je na čerpací stanici méně než 15 aut

$$P = \sum_{n=0}^4 \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 + \sum_{n=5}^{14} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{(c! c^{n-c})} p_0 = 0,74 + 0,25 = 0,99$$

Mohli bychom pokračovat dále, ale všechny podmínky pana Pumpičky už jsou splněny. Pan pumpičky by měl tedy postavit 4 samoobslužné stojany.

Zdroje:

Prezentace Systémy hromadné obsluhy, Petr Janeček FAV ZČU

http://www2.ef.jcu.cz/~jfrieb/rmp/data/teorie_oa/OBSLUHA.pdf

* Littleův vztah - článek a důkaz

<http://web.mit.edu/sgraves/www/papers/Little's%20Law-Published.pdf>

<http://emiraga.wikispaces.com/file/view/Littles.law.January.2009.pdf>

Petr Vacek 2014