

Braessův paradox a teorie her

Robert Navrátil

1. Motivace

Teorie her je odvětví matematiky, které analyzuje řešení rozhodovacích situací mezi osobami, jež se starají pouze o své vlastní dobro. Nejvíce se uplatňuje v ekonomii a mikroekonomii, ale své uplatnění najde i v odvětvích jako je biologie, sociologie a politologie. Ve své práci se budu zabývat nejznámějším příkladem z teorie her a dále uvedu Braessův paradox a jeho reálnou aplikaci v řadě různých odvětví.

2. Věžňovo dilemma

Asi nejznámější problém z teorie her je tzv. věžňovo dilema. Na kterém se velice snadno ukáže, jak teorie her funguje a čím se zabývá. Situace je následující: policie zadržela dva podezřelé, Alici a Boba, které vyslýchá každého v jiné místnosti a není mezi nimi možná jakákoliv forma komunikace. Oba se mohou rozhodnout, zda-li budou spolupracovat s policií (a tím pádem i udají toho druhého) nebo budou zapírat. Možnosti, jak vyslýchání může skončit :

- Alice i Bob zapírají, pak policie pro nedostatek důkazů zatkne oba jen na jeden rok.
- Pokud Alice spolupracuje a Bob zapírá, tak je Alice poslána na svobodu a Bob půjde na čtyři roky do vězení. (a vica versa)
- Pokud Alice i Bob spolupracují, tak oba půjdou do vězení na tři roky.

A/B	Zapírání	Spolupráce
Zapírání	(-1,-1)	(-4,0)
Spolupráce	(-4,0)	(-3,-3)

Obr. 1.1 Věžňovo dilemma

Jak pro Alici, tak i pro Boba je vždy výhodnější spolupracovat s policií a snížit si tak svůj trest, nezávisle na tom, zda-li ten druhý spolupracuje nebo ne. Paradoxně tak ale dostáváme případ, kdy se oba vyhnou nejlepšímu řešení, tj. kdy oba zapírají.

Věžňovo dilema je velice zkoumaným subjektem převážně v sociálních vědách (ekonomie, politologie, sociologie), protože spousta reálných situací má stejnou

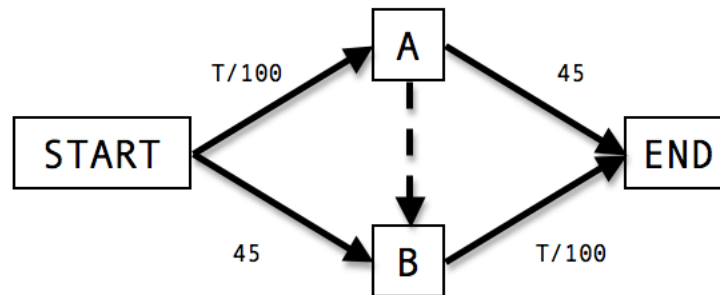
matici výtěžku. Například se vězňovo dilema uplatňuje v reklamách. Mějme firmy A,B které se chtějí rozhodnout kolik peněz investují do reklamy. Efektivita reklamy je určena podle toho, kdo investuje více peněz. Pokud A i B investují stejně, tak žádná firma nezíská ani neztratí zákazníky, ale přijdou o investované peníze a oboje firmy by na tom byly lépe, kdyby se investovalo méně peněz. Pokud by ale firma A sama investovala méně peněz než firma B, tak by ztratí velkou část zákazníků a prodělala by mnohem více, než kdyby doinvestovala tak, aby dorovнала firmu B.

Například, když se v USA rozhodovala o zákazu reklamních spotů na cigarety, tak to tabákové společnosti podporovaly, neboť jim to vynuluje náklady na reklamu a tedy zvýší zisky. [1] USA tou dobou byli známé, že tabákové společnosti investovali enormní množství peněz do reklam. Mezi další příklady patří např. doping ve sportovním odvětví nebo snižování emisí do ovzduší. Je všeobecný názor, že ze snížením počtu emisí by měl každý stát užitek, jenže pokud by se jen pár států domluvilo na snížení emisí, tak ztratí konkurenceschopnost a na to doplatí více, než kdyby emise nesnižovali.

3. Braessův paradox

Zajímavá událost se stala ve městě Stuttgart v Německu. V roce 1969 byli investovány peníze do infrastruktury, ale paradoxně se dopravní situace nezlepšila do té doby než tyto nové silnice byly uzavřeny. Proč tomu tak je, vysvětluje právě Braessův paradox. [2]

Německý matematik Dietrich Braess publikoval v roce 1968 paradox, který se zabývá dopravní situací. Braessův paradox tvrdí, že přidáváním dalších cest do dopravní sítě nemusí nutně snížit cestu potřebnou k cíli, ba naopak v určitých situacích jí může zvýšit. Uvažujme například situaci vyobrazenou na obrázku 3.1.

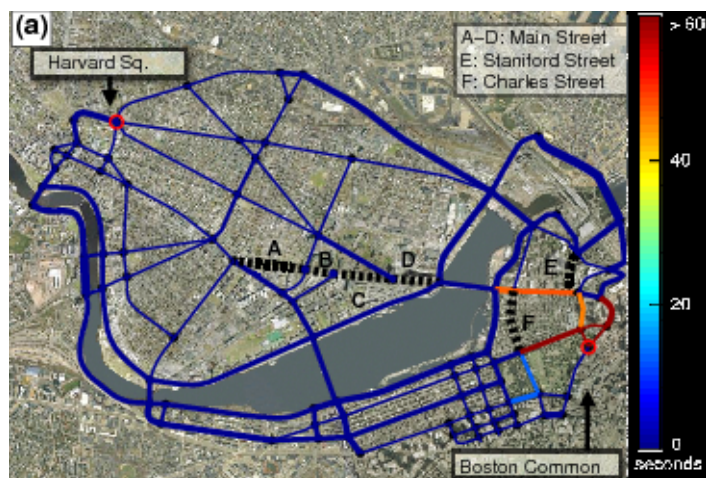


Obrázek 1: Braessův paradox

Předpokládejme, že vyjíždí 4 000 lidí ze startu a chtějí se dostat do cíle autem.

Počet lidí v daný okamžik na dané silnici mezi dvěma body označme T . Nebude-li vybudována zkratka z bodu A do bodu B, tak se řidiči na začátku cesty mohou rozhodnout, zda-li pojedou přes bod A nebo přes bod B. Předpokládáme-li, že každý řidič chce dorazit do práce co nejrychleji, takže se ze symetrie dá očekávat, že polovina řidičů pojedou přes A a druhá polovina přes B. Jejich celková doba do práce tedy bude činit 65 minut. Po vybudování zkratky z A do B která, pro jednoduchost, dopraví za 0 minut řidiče z bodu A do B se celková doba do cesty se zvedne na 80 minut. Je to důsledkem toho, že nyní je pro každého řidiče výhodné zvolit cestu do A, pak se přesunout bez časové ztráty do B a pokračovat do cíle, neboť i v nejhorším případě je silnice s kapacitou rychlejší než silnice po které cesta trvá stále 45 minut. Pokud by řidič zvolil jinou cestu, tak mu cesta potrvá déle a bude to pro něj časově nevýhodné. Paradoxně tak dochází k tomu, že vybudováním zkratky se zvýšila celková doba do cíle. Řidiči by na tom byli nejlépe, kdyby se domluvili, že by zkratku ignorovali. Toto rozdělení ale nemůže dlouho vydržet, neboť v tomto případě by pro každého bylo výhodné zkratku využít a zkrátit si tak cestu z 65 minut na 40 minut. Tím pádem bychom se dostali do situace kdy zkratku využívají všichni a tedy by cesta trvala opět 80 minut.

Tento paradox zkoumali v praxi např. H. Yeong, H. Youn a M. T. Gastner v Bostonu, Londýně a New Yorku. [3] Vědci došli k názoru, že ke zlepšení dopravní situace v těchto městech by bylo nejlepší uzavřít několik silnic. Jejich poznatky shrnuje obrázek níže, kde přerušované jsou zvýrazněny silnice, jež by měly být neprůjezdné.



Obrázek 2: Braessův paradox v Bostonu. Čárkovaně jsou vyznačeny cesty, jež by se měly uzavřít. Barevně je vyznačeno procentuální zpoždění.

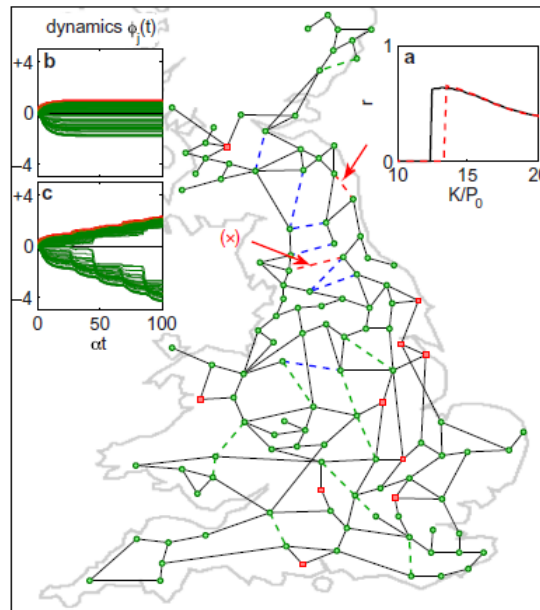
Jedna z mnoha aplikací je zrušení přístupu pro auta na Broadway, která byla

jednou z nejvytíženějších ulic v New Yorku a přispělo se tak ke zlepšení dopravní situace. [4]

4. Elektrické sítě v Británii

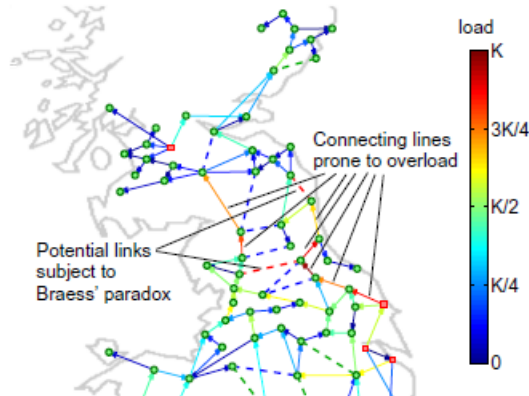
Protože je výhodné zkoumat, kdy k Braessovu paradoxu dochází při budování nové sítě, tak se vědci Witthaut a Timme rozhodli systematicky studovat Braessův paradox na distribuční síti v Británii. [5] Model je velmi zjednodušený, ale k ukázce bohatě stačí.

Předpokládejme přenosovou soustavu vysokého napětí v Británii. Vybereme náhodně 10 ze 120 bodů, které budou generátory a zbytek budou spotřebitelé. Pro generátory bylo nastaveno $P_j = 11P_0$ a pro spotřebitele $P_j = -P_0$. Dále bylo přidáno 20 spojnic, které jsou vyznačeny čárkovaně. Ve 2 došlo k Braessově paradoxu, ty jsou označeny červeně, 7 modře vyznačených spojnic pomohlo k celkovému proudění a 11, zeleně vyznačených, nemělo žádný vliv na efektivitu sítě. Viz obrázek 3.



Obrázek 3: Elektrická síť v Británii

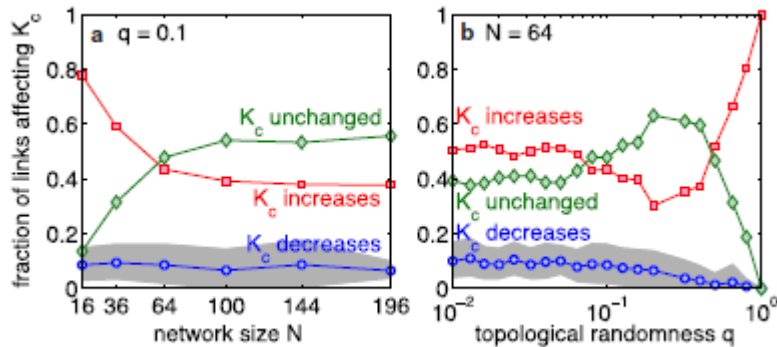
Pro vliv topologie sítě na Braessův paradox se podívejme na obrázek 4. Z obrázku je patrné, že dvě spojnice u nichž by došlo k přetížení sítě, mají ve své



Obrázek 4: Vliv okolních linek na Braessův paradox

blízkosti velmi vytížené spojnice. Zároveň je vidět, že tyto vytížené linky nemusí být přímo spojené se spojnicí, kde nastává Braessův paradox, neboť například u té severnější červené spojnice je velmi přetížená spojnice o dva body jižně. Tedy ke zkoumání Braessova paradoxu je potřeba nedívat se pouze lokálně na vybrané spojnice, jelikož nejen pouze spojené spojnice mohou mít vliv na výskyt.

K systematickému studiu vlivu topologie sítě na Braessův paradox bylo zkoumáno více jak 100 sítí. Testování probíhalo následovně, náhodně byla vybrána polovina bodů jako generátory ($P_j = P_0$) a zbytek jako spotřebitelé ($P_j = -P_0$). Pak se ověřilo pro každou spojnicí jaké má její odstranění vliv na Braessův paradox. Dále se přidala pravděpodobnost q , že takto odstraněná spojnice bude přesunuta jinam. Snižující se hodnota K_c znamená, že tato spojnice snižuje synchronizaci sítě, to jest výskyt Braessova paradoxu. Obrázek 5(b) ukazuje, že toto nastává převážně v menších "řidších" sítích, neboť se snadněji stane, že určitá spojnice je přetížena. Naopak o hustých sítích se dá říci, že existuje spousta spojnic, u kterých by odstranění nijak neovlivnilo proudění. I přesto, ale pro $N = 196$ je přibližně 6,5% spojnic, jejichž odstraněním by se celková situace zlepšila.



Obrázek 5: Výskyt Braessova paradoxu. Zlomek spojnic, jež celkovou efektivitu snižují nebo zvyšují. Vybarvená oblast značí standartní odchylku pro snižující se K_c

6. Model pro zkoumání

Model pro výpočet níže je pouze velkým zjednodušením modelu, jež se používá. Detailnější popisy různých modelů lze najít v [6],[7],[8]. Spousta výpočtů a kroků je vynecháno. Nicméně většina potřebných dat ke správnému výpočtu je uvedena, jelikož bych rád zdůraznil, že výpočet této situace je náročný jak z hlediska získání dat, tak k jejich výpočtu.

Označme $G = (V, E)$ orientovaný, acyklický graf. Dále pro $i = 1, \dots, k$ mějme k uspořádaných dvojic start-cíl (s_i, t_i) kde s_i resp. t_i je startovní resp. konečná lokace. Předpokládejme, že městská populace, N se nachází na s_1, \dots, s_k s procentuálním rozdělením w_1, \dots, w_k . Dále definujme r_i jakožto očekávaná hodnota osob, jež si zvolí cestu (s_i, t_i) za nějakou časovou jednotku. Dále definujme $\vec{r} = (r_1, \dots, r_k)$ a $r = \sum_{i=1}^k r_i$.

Například tuto situaci si lze představit, že s_i je satelitní město, t_i je průmyslová zóna. r_i jednotlivců potřebuje do práce z celkové počtu $n_i = w_i N$ žijících v s_i . Každému jednotlivci je umožněno jet libovolnou cestou z s_i do t_i . Dále se definuje funkce f_a , která musí být spojitá, nezáporná, neklesající, semi-konvexní a určuje čas dopravy po hraně a .

Pomocí velkého počtu numerických úprav jsme schopni matematicky vyjádřit dopravní situaci ve městě, která se vyjadřuje pomocí funkcí f_a , ale protože jsou tyto funkce konvexní, tak nabývají globálního optima. Dá se ukázat, že hledání tohoto optima lze převést na maticový problém stejného typu jako ve věžňově dilemmatu, které se dále řeší numerickým softwarem.

7. Závěr

Co vypadalo zprvu jako matematická hříčka, tak nalézá čím dál větší uplatnění mimo akademickou sféru. Jelikož se Braessův paradox začal zkoumat více intenzivně za posledních pět let, tak je zřejmé, že ho uvidíme více v praxi uplatňovat.

8. Zdroje

- 1 : http://en.wikipedia.org/wiki/Prisoner%27s_dilemma
- 2 : <http://supernet.isenberg.umass.edu/facts/braess.html>
- 3 : Hyejin Youn, Hawoong Jeong, Michael T. Gastner. (2008) The Price of Anarchy in Transportation Networks: Efficiency and Optimality Control. (<http://arxiv.org/abs/0712.1598>)
- 4 : <http://amanagurney.blogspot.cz/2011/03/braess-paradox-broadway-and-basketball.html>
- 5 : Dirk Witthaut, Marc Timme. (2012). Braess's paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage.
- 6 : Francesco Trebbi, Matilde Bombardini. (2012). Gains from distortions in Congested City Networks.
- 7 : Yannis A. Korilis, Aurel A. Lazar, Ariel Odra. (1999). Avoiding the Braess Paradox in non-cooperative networks.
- 8 : Xin Huang, Asuman Ozdaglar, Daron Acemoglu. (2002). Efficiency and Braess' Paradox under Pricing in General Networks