7. Primitivní funkce

7.1. Úvodní definice

Definice 7.1:
Řekneme, že F je primitivní funkcí k f na intervalu (a, b), jestliže pro každé $x \in (a, b)$ existuje $F'(x) = f(x)$.

Z kapitoly 5 vyplývá následující tabulka

$f(x)$	$F(x)$	interval
$x^n, n \in N$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \in R$
$x^\alpha, \alpha \in R \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x \in (0, \infty)$
x^{-1}	$\ln \lvert x \rvert$	$x \in (0, \infty)$ nebo $x \in (-\infty, 0)$
e^x	e^x	$x \in R$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in R$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in R$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg} x$	$x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in Z$
$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{cotg} x$	$x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in Z$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg} x$	$x \in R$
$\frac{-1}{1+x^2}$	$\mathrm{arccotg} x$	$x \in R$

Věta 7.1 : BD (Postačující podmínka existence primitivní funkce)
Je-li f spojitá na intervalu (a, b), pak existuje alespoň jedna funkce F, která je primitivní funkcí k f na (a, b).

Věta 7.2 : T (Nutná podmínka existence primitivní funkce)
Jestliže existuje alespoň jedna funkce F, která je primitivní funkcí k f na (a, b), pak f má na (a, b) Darbouxovu vlastnost.
Připomeňme, že f má na (a, b) Darbouxovu vlastnost, jestliže pro každé dva body $x, y \in (a, b), x < y$ a každé d ležící mezi $f(x)$ a $f(y)$ existuje alespoň jedno $c \in (x, y)$ takové, že $f(c) = d$.

Věta 7.3 : L (Jednoznačnost primitivní funkce)
Jsou-li F, G dvě primitivní funkce k f na (a, b), pak existuje $C \in R$ tak, že $F(x) - G(x) = C$ pro všechna $x \in (a, b)$.
Je-li F primitivní funkcí k f na (a, b) a $C \in R$, pak je funkce $G = F + C$ rovněž primitivní funkcí k f na (a, b).

Označení:
Buď F primitivní funkcí k f na (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k f na (a, b) budeme značit takto $\int f(x)dx = F(x) + C, x \in (a, b), C \in R$.

7.2. Metody výpočtu primitivní funkce

Věta 7.4 : L (Linearita primitivní funkce)
Buď F primitivní funkcí k f na $(a, b), G$ primitivní funkcí k g na $(a, b), c, d \in R$. Pak $H = cF + dG$ je primitivní funkcí k $cf + dg$ na (a, b) nebo

$$\int (cf(x) + dg(x))dx = c \int f(x)dx + d \int g(x)dx.$$

Věta 7.5 : L (Integrace per partes)

Buď F primitivní funkcí k f na $I = (a,b), G$ primitivní funkcí k g na (a,b) a H primitivní funkcí k $F.g$ na (a,b). Pak existuje i primitivní funkce k $f.G$ na (a,b) a platí

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx, x \in I$$

neboli

$$\int F'(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx, x \in I.$$

Věta 7.6 : (Substituce)

Buď $\phi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$, která má na intervalu (α,β) vlastní derivaci, buď f definovaná na (a,b).

1. Jestliže existuje primitivní funkce F k f na (a,b), pak existuje i primitivní funkce H k $h(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$ na (α,β) a platí $H(t) = F(\phi(t))$ na (α,β). Jinak zapsáno

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)), t \in (\alpha,\beta).$$

2. Nechť ϕ navíc zobrazí (α,β) na (a,b) a $\phi'(t) \neq 0 \ \forall \ t \in \alpha,\beta$. Jestliže existuje primitivní funkce H k $h(t) = f(\phi(t)).\phi'(t)$ na (α,β), pak existuje i primitivní funkce F k f na (a,b) a platí $F(x) = H(\phi^{-1}(x))$ na (a,b). Jinak zapsáno

$$\int f(x)dx = H(\phi^{-1}(x), x \in (a,b).$$

7.3 Integrace racionálních funkcí

V tomto odstavci uvedeme třídu funkcí, jejichž primitivní funkce jsou elementární, tj. jsou kombinací resp složením konečného počtu funkcí racionálních, algebraických, exponenciální funkce, logaritmu, sinu a kosinu a funkcí k nim inverzních. Z věty 7.1. plyne, že ke každé spojité funkci na intervalu existuje funkce primitivní, to však neznamená, že tato primitivní funkce je elementární.

Definice 7.3

Buď $n \in N, a_i \in C$ pro $i = 0, ..., n$. Řekneme, že funkce $P : R \to R$ je (komplexní) polynom jedné reálné proměnné stupně nejvýše n, jestliže

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, x \in R.$$

Je-li $a_n \neq 0$, řekneme, že P je polynom stupně n.

Buď $n \in N, a_{ij} \in C$ pro $i,j = 0, ..., n$. Řekneme, že $P : R_2 \to R$ je (komplexní) polynom (dvou proměnných), jestliže

$$P(x,y) = \sum_{i,j=0,...,n} a_{ij} x^i y^j, \ \forall x, y \in R.$$

Řekneme, že $r : R \to R$ je racionální funkce jedné reálné proměnné, jestliže existují polynomy $P, Q : R \to R$ tak, že Q není identicky rovný nule a platí

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

pro všechna $x \in R$, pro která $Q(x) \neq 0$.

Obdobně řekneme, že $r : R^2 \to R$ je racionální funkce (dvou proměnných), jestliže existují polynomy $P, Q : R^2 \to R$ tak, že Q není identicky rovný nule a platí

$$r(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

pro všechna $[x,y] \in R^2$, pro která $Q(x,y) \neq 0$.

Důsledkem základní věty algebry je následující tvrzení o rozkladu polynomu:

Tvrzení(O rozkladu polynomu na kořenové činitele)

Buď $Q : R \to R, Q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ polynom stupně $n \in N$ s reálnými koeficienty , buďte $\alpha_1, ..., \alpha_k$ reálné navzájem různé kořeny polynomu Q s násobnostmi $m_1, ..., m_k$, označme $\beta_1, ..., \beta_l, \overline{\beta_1}, ..., \overline{\beta_l}$ komplexní (nikoliv reálné!)navzájem různé kořeny polynomu Q s násobnostmi $n_1, ..., n_l$ a kladnou imaginární částí. Pak platí

(1)

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}...(x-\alpha_k)^{m_k}(x-\beta_1)^{n_1}(x-\overline{\beta_1})^{n_1}...(x-\beta_l)^{n_l}(x-\overline{\beta_l})^{n_l} \\ &= a_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}...(x-\alpha_k)^{m_k}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}...(x^2+p_lx+q_l)^{n_l}, \end{aligned}$$

kde $p_k = -2\mathrm{Re}\beta_k, q_k = (\mathrm{Re}\beta_k)^2 + (\mathrm{Im}\beta_k)^2$ a $n = m_1 + ... + m_k + 2(n_1 + ... + n_l)$.

Věta 7.7 (O rozkladu racionální funkce na parciální zlomky)

Buďte P, Q polynomy jedné proměnné s reálnými koeficienty, nechť Q není identicky nulový a má rozklad (1). Předpokládejme, že stupeň P je menší než stupeň Q. Pak existují čísla $A_i^{r_i}, i = 1, ..., k, r_i = 1, ..., m_i$ a $B_j^{s_j}, C_j^{s_j}, j = 1, ..., l, s_j = 1, ..., n_j$ tak, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{A_1^2}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}} + ... \frac{A_1^{m_1}}{x-\alpha_1} + ... \\ \frac{A_k^1}{(x-\alpha_k)^{m_k}} + \frac{A_k^2}{(x-\alpha_k)^{m_k-1}} + ... \frac{A_k^{m_k}}{x-\alpha_k} + \\ \frac{B_1^1x + C_1^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} + ... \frac{B_1^{n_1}x + C_1^{n_1}}{x^2+p_1x+q_1} + ... \\ \frac{B_l^1x + C_l^1}{(x^2+p_lx+q_l)^{n_l}} + ... \frac{B_l^{n_l}x + C_l^{n_l}}{x^2+p_lx+q_l} \end{aligned}$$

pro všechna reálná $x \neq \alpha_1, ..., \alpha_k$.

Integrace parciálních zlomků

Jednotlivé typy parciálních zlomků

integrand	primitivní funkce
$\frac{1}{x-\alpha}$	$\ln\lvert x-\alpha\rvert$
$\frac{1}{(x-\alpha)^k}; k > 1$	$\frac{1}{k+1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k+1}}$
$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln\lvert x^2+px+q\rvert$
$\frac{1}{x^2+px+q}$	$\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$
$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}; k > 1$	$\frac{1}{k+1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k+1}}$
$\frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}; k > 1$	$\frac{1}{2k}(\frac{x}{(1+x^2)^k} + (2k-1)\int\frac{1}{(1+x^2)^k}$

Typy, které lze převést na integraci racionálních funkcí

V následující tabulce značí $r(x,y)$ racionální funkci dvou proměnných s výjimkou posledních dvou řádků, kde r závisí na jedné proměnné.

typ integrálu		doporučená substituce
$\int r(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$		$y = \phi(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
$\int r(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, a > 0$		$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + y$
$\int r(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, c > 0$		$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + yx$
$\int r(\sin x, \cos x)dx$		$y = \phi(x) = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$
$\int r(\sin x, \cos x)dx, r$	sudá v sinech a kosinech	$y = \phi(x) = \mathrm{tg} x$
$\int r(\sin x, \cos x)dx, r$	lichá v sinech	$y = \phi(x) = \cos x$
$\int r(\sin x, \cos x)dx, r$	lichá v kosinech	$y = \phi(x) = \sin x$
$\int r(e^x)dx$		$y = \phi(x) = e^x$
$\int r(\ln x).\frac{1}{x}dx$		$y = \phi(x) = \ln x$

Pro některé poměrně jednoduché spojité funkce nelze primitivní funkci vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí. V některých případech lze k takovému zjištění užít následující větu:

Věta(Liouvilleova)
Buďte g, h racionální funkce jedné proměnné, g nekonstantní. Je-li

$$\int e^{g(x)}h(x)dx$$

elementární funkce na I, pak existuje racionální funkce r tak, že

$$\int e^{g(x)}h(x)dx = e^{g(x)}r(x) + C, x \in I.$$