7. Posloupnosti a řady funkcí

7.1. Úvodní definice a kritéria stejnoměrné konvergence posloupností a řad.

V tomto odstavci je M libovolná neprázdná množina a pro všechna $n \in N$ je $f_n : M \to R(C)$.

Definice 7.1(Stejnoměrná konvergence posloupností)
Řekneme, že posloupnost (f_n) konverguje **bodově** na množině M k funkci f (značíme $f_n \to f$ na M), jestliže platí

$$\forall x \in M \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n \in N, n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Řekneme, že posloupnost (f_n) konverguje **stejnoměrně** na množině M k funkci f (značíme $f_n \rightrightarrows f$ na M), jestliže platí

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n \in N, n \geq n_0 \quad \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Řekneme, že posloupnost (f_n) konverguje **lokálně stejnoměrně** na množině M k funkci f (značíme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na M), jestliže pro každé $x \in M$ existuje okolí U bodu x tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na U.

Věta 7.1(Kritérium stejnoměrné konvergence posloupností)
Definujme $\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in M\}$. Posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině M k funkci f právě tehdy, jestliže $\sigma_n \to 0$.

Věta 7.2(Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupností)
Posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině M k funkci f právě tehdy, jestliže platí

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall m, n \in N, m, n \geq n_0 \quad \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Definice 7.2(Stejnoměrná konvergence řad)
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje **bodově** na množině M k součtu s, jestliže posloupnost částečných součtů (s_n) (kde $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$) konverguje bodově k s na M.
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje **stejnoměrně** na množině M k součtu s, jestliže posloupnost částečných součtů (s_n) konverguje stejnoměrně k s na M.
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje **lokálně stejnoměrně** na množině M k součtu s, jestliže posloupnost částečných součtů (s_n) konverguje lokálně stejnoměrně k s na M.

Poznámka(Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)
Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na množině M bodově (stejnoměrně, lokálně stejnoměrně) pak posloupnost (f_n) konverguje na množině M bodově (stejnoměrně, lokálně stejnoměrně) k nule.

Věta 7.3(Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řad)
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M právě tehdy, když

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n, p \in N, n \geq n_0 \quad \forall x \in M : |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \epsilon.$$

Věta 7.4(Weiestrassovo kritérium)
Buďte $f_n : M \to R(C)$, $\forall n \in N$. Předpokládejme, že existuje číselná posloupnost (a_n) tak, že
(i) $|f_n(x)| \leq a_n; \forall n \in N, \forall x \in M$,
(ii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M.

Poznámka
1. Věta platí za obecnějších předpokladů: stačí aby $|f_n(x)| \leq g_n(x); \forall n \in N, \forall x \in M$, kde řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na M.
2. Z předpokladů kritéria vyplývá silnější tvrzení: řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně na M a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konverguje stejnoměrně na M.

Definice 7.3(Stejně omezená posloupnost)
Řekneme, že posloupnost $f_n : M \to R(C)$ je stejně omezená na M, jestliže existuje konstanta C tak, že pro všechna $x \in M$ a $n \in N$ platí $|f_n(x)| \leq C$.

Věta 7.5 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)
Buďte $f_n : M \to R, g_n : M \to R(C)$ $\forall n \in N$. Nechť pro všechna $x \in M$ je posloupnost $(f_n(x))$ rostoucí (resp. klesající).
Abelovo kritérium: Jestliže navíc $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na M a posloupnost (f_n) je stejně omezená na M, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na M.
Dirichletovo kritérium: Označme $s_n(x) = g_1(x) + ... + g_n(x)$. Je-li posloupnost (s_n) stejně omezená na M a jestliže $(f_n) \rightrightarrows 0$ na M, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na M.

Věta 7.6 (Leibnizovo kritérium)
Buďte $f_n : M \to [0, \infty), \forall n \in N$. Nechť pro všechna $x \in M, n \in N$ platí $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$. Jestliže $(f_n) \rightrightarrows 0$ na M, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ konverguje stejnoměrně na M.

7.2. Hlubší věty o stejnoměrné konvergenci

V tomto odstavci je M interval v R. Ke každému tématu uvedeme vždy (číslovanou) větu zformulovanou pro limity posloupností a (nečíslovanou) větu pro součty řad. V závěru jsou pro informaci zformulovány i Borelova, Diniho a Weierstrassova věta.

Věta 7.7(Záměna limity a spojitosti)
Buď $f_n : M \to R(C)$ posloupnost funkcí spojitých na M, nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M. Pak je f spojitá na M.

Věta(Záměna limity a spojitosti pro řady)
Buď $f_n : M \to R(C)$ posloupnost funkcí spojitých na M, nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M k součtu s. Pak je s spojitá na M.

Věta 7.8 (Moore-Osgoodova o záměně limit)
Buď $(a, b) \subset R, f_n : (a, b) \to R(C)$. Předpokládejme, že
(i) pro každé $n \in N$ existuje vlastní $\lim\limits_{x \to a+} f_n(x) = c_n$,
(ii) $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b).
Pak existuje vlastní $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} c_n$.

Věta (Moore-Osgoodova o záměně limit pro řady)
Buď $(a, b) \subset R, f_n : (a, b) \to R(C)$. Předpokládejme, že
(i) pro každé $n \in N$ existuje vlastní $\lim\limits_{x \to a+} f_n(x) = c_n$,
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b) k součtu s.
Pak existuje vlastní $\lim\limits_{x \to a+} s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Lemma 7.1
Posloupnost $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na M právě tehdy, když pro každou dvojici $a, b \in M, a < b$ platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

Věta 7.9 (O záměně limity a derivace pro posloupnosti)
Buď M interval v $R, c \in M; f_n : M \to R(C)$ takové, že
(i) $f_n(c) \to f(c)$,
(ii) $\forall x \in M \quad \forall n \in N \quad \exists$ vlastní $f_n'(x)$ (v krajních bodech míníme derivaci jednostrannou),
(iii) $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} g$ na M.
Pak existuje $f : M \to R(C)$ tak, že
(i) f_n konverguje lokálně stejnoměrně k f na M,
(ii) $\forall x \in M \quad \exists f'(x) = g(x)$ (v krajních bodech míníme derivaci jednostrannou).

Poznámka
Dokázali jsme, že jsou-li $a, b \in R, a < b$ a $f_n' \rightrightarrows g$ na $[a, b], c \in [a, b]$ a $f_n(c) \to f(c)$, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

Věta (O záměně limity a derivace pro řady)
Buď M interval v $R, c \in M; f_n : M \to R(C)$ takové, že
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) = s(c)$,
(ii) $\forall x \in M \quad \forall n \in N \quad \exists$vlastní$f_n'(x)$ (v krajních bodech míníme derivaci jednostrannou),
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje lokálně stejnoměrně ke g na M.
Pak existuje $s : M \to R(C)$ tak, že
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně k s na M,
(ii) $\forall x \in M \quad \exists s'(x) = g(x)$ (v krajních bodech míníme derivaci jednostrannou).

Věta 7.10(O záměně limity a primitivní funkce pro posloupnosti)

Nechť $f_n : M \to R(C)$ mají na M primitivní funkce F_n a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na M. Pak f má na M primitivní funkci F. Jestliže navíc existuje $c \in M$ tak, že $F_n(c) \to F(c)$, pak F_n konvergují k F lokálně stejnoměrně na M.

Věta (O záměně limity a primitivní funkce pro řady)

Nechť $f_n : M \to R(C)$ mají na M primitivní funkce F_n a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně k s na M. Pak s má na M primitivní funkci S. Jestliže navíc existuje $c \in M$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(c) = S(c)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ konverguje k S lokálně stejnoměrně na M.

Věta 7.11(O záměně limity a integrálu pro posloupnosti)

Buďte $a, b \in R, a < b; f_n \in N(a,b), f_n \rightrightarrows f$ na (a,b). Pak $f \in N(a,b)$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Věta(O záměně limity a integrálu pro řady)

Buďte $a, b \in R, a < b; f_n \in N(a,b), \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k s na (a,b). Pak $s \in N(a,b)$ a platí

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Věta 7.12(Borelova)

Buďte $a, b \in R, \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ systém otevřených intervalů takových, že

$$[a,b] \subset \cup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

Pak existují indexy $\alpha_1, ..., \alpha_k \in I$ tak, že

$$[a,b] \subset \cup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}.$$

Věta 7.13 (Diniho) - nebyla v tomto roce přednášena.

Buďte $a, b, \in R, f_n : [a,b] \to R$ posloupnost spojitých funkcí na $[a,b]$, které na $[a,b]$ monotonně konvergují k funkci f, spojité na $[a,b]$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

Věta 7.14 (Weierstrassova)

Buďte $a, b, \in R, f : [a,b] \to R$ spojitá na $[a,b]$. Pak existuje posloupnost polynomů, která konverguje k f stejnoměrně na $[a,b]$.

7.3 Mocninné řady

Definice 7.4(Mocninná řada)

Buď $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset R$ posloupnost reálných čísel, $s \in R$. Mocninnou řadou (o středu s, s koeficienty (a_n) a v proměnné $x \in R$) nazveme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n$.

Věta 7.15 (O existenci poloměru konvergence)

Buď $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n$ mocninná řada. Pak existuje právě jedno číslo $\mathcal{R} \in [0,\infty]$ (nazveme jej poloměr konvergence mocninné řady) takové, že

$\forall x \in R, |x-s| < \mathcal{R}$ řada konverguje,

$\forall x \in R, |z-s| > \mathcal{R}$ řada diverguje.

Dále na kruhu konvergence $U(s,\mathcal{R}) = \{x \in R; |x-s| < \mathcal{R}\}$ řada koverguje absolutně, lokálně stejnoměrně a řada absolutních hodnot konverguje lokálně stejnoměrně.

Věta 7.16 (O výpočtu poloměru konvergence)

Buď $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n$ mocninná řada a označme $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Pak je-li $L \in (0,\infty)$, je poloměr konvergence $\mathcal{R} = \frac{1}{L}$. Je-li $L = 0$, je $\mathcal{R} = \infty$ a je-li $L = \infty$, je $\mathcal{R} = 0$.

Věta 7.17 (O derivaci a integraci mocninné řady)

Má-li řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n$ poloměr konvergence $\mathcal{R} > 0$, mají řady $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-s)^{n-1}$ a $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-s)^{n+1}$ stejný poloměr konvergence a na $U(s,\mathcal{R})$ jsou funkce f, g, G jsou spojité a platí $f'(x) = g(x), G'(x) = f(x)$.

Důkaz: Protože $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1$, je i $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ a podle věty 7.15 je poloměr konvergence řad f, g a G stejný. Podle věty 7.14 jsou splněny předpoklady vět o záměně limity a spojitosti, limity a derivace resp. limity a primitivní funkce pro řady.

Důsledek (Koeficienty mocninné řady)

Má-li řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n$ poloměr konvergence $\mathcal{R} > 0$, pak má funkce f na $U(s,\mathcal{R})$ derivace všech řádů a platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(s)}{k!}.$$

Mocninná řada je pak Taylorovou řadou svého součtu.

Věta 7.18 (Abelova)

Má-li řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n$ poloměr konvergence $\mathcal{R} > 0$ a konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\mathcal{R}^n$ (resp. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\mathcal{R})^n$), je funkce f spojitá na intervalu $(s-\mathcal{R}, s+\mathcal{R}]$ (resp. na intervalu $[s-\mathcal{R}, s+\mathcal{R})$) a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n$ konverguje na intervalu $[s, s+R]$ resp. na intervalu $[s-R, s]$ stejnoměrně.

Důkaz: Proveďme důkaz pro případ, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n$ konverguje v bodě $x = s+\mathcal{R}$. Přepíšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\mathcal{R}^n \left(\frac{(x-s)}{\mathcal{R}}\right)^n$$

a položíme

$$f_n(x) = \left(\frac{(x-s)}{\mathcal{R}}\right)^n, g_n(x) = a_n\mathcal{R}^n.$$

Pak je pro $x \in [s, s+\mathcal{R}]$ posloupnost $(f_n(x))$ nerostoucí a stejně omezená a řada konstant $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ konverguje na $[s, s+\mathcal{R}]$ stejnoměrně. Z Abelova kritéria plyne stejnoměrná konvergence řady $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-s)^n$ na $[s, s+\mathcal{R}]$. Z věty o záměně limity a spojitosti pro řady pak plyne spojitost funkce f na $[s, s+\mathcal{R}]$ a z věty 7.16 spojitost na $(s-\mathcal{R}, s+\mathcal{R}]$. Důkaz v případě druhého krajního bodu je analogický.

7.4 Fourierovy řady

Definice 7.4(po částech spojité funkce)
Řekneme, že f je po částech spojitá na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje konečný počet bodů $t_0, ..., t_p \in [a, b]$ tak, že $a = t_0 < t_1 < ... < t_{p-1} < t_p = b$, pro všechna $i = 1, ..., p$ je f spojitá na (t_{i-1}, t_i) a existují vlastní jednostranné limity

$$\lim_{t \to t_{i-1}+} f(t) = f(t_{i-1}+),$$
$$\lim_{t \to t_i-} f(t) = f(t_i-).$$

(V bodě a předpokládáme pouze existenci vlastních limit zprava, v bodě b předpokládáme pouze existenci vlastních limit zleva.)

Definice 7.5(po částech regulární funkce)
Řekneme, že f je po částech regulární na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje konečný počet bodů $t_0, ..., t_p \in [a, b]$ tak, že $a = t_0 < t_1 < ... < t_{p-1} < t_p = b$, pro všechna $i = 1, ..., p$ má f spojitou derivaci na (t_{i-1}, t_i) a existují vlastní jednostranné limity

$$\lim_{t \to t_{i-1}+} f(t) = f(t_{i-1}+),$$
$$\lim_{t \to t_i-} f(t) = f(t_i-),$$
$$\lim_{t \to t_{i-1}+} f'(t) = f'(t_{i-1}+),$$
$$\lim_{t \to t_i-} f'(t) = f'(t_i-).$$

(V bodě a předpokládáme pouze existenci vlastních limit zprava, v bodě b předpokládáme pouze existenci vlastních limit zleva.)

Definice 7.6(Prostor $P_{2\pi}$)
Symbolem $P_{2\pi}$ označíme prostor všech 2π-periodických funkcí definovaných na R, které jsou po částech regulární na každém intervalu konečné délky.

Poznámky:
1. Po částech spojité funkce mají Riemannův integrál na každém intervalu konečné délky.
2. Derivace po částech regulární funkce je funkce po částech spojitá.

Definice 7.7(Fourierova řada a Fourierovy koeficienty funkce f)
Buď f po částech spojitá. Fourierovou řadou funkce f nazveme řadu

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, ...$$

Posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ (resp. $(b_n)_{n=1}^{\infty}$) nazveme kosinovými (resp. sinovými) Fourierovými koeficienty funkce f.

Poznámka: K tomu, aby byly definovány Fourierovy koeficienty funkce f stačí, aby $f \in R(0, 2\pi)$ resp. aby měla konvergentní Lebesgueův integrál.

Pozorování: Pro všechna $n \in N, y \in (0, 2\pi)$ platí

$$\frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + ... + \cos ny = \frac{\sin(n + 1/2)y}{2 \sin y/2}.$$

Věta 7.19 (Besselova nerovnost)

Buď g 2π periodická a po částech spojitá. Buďte $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ Fourierovy koeficienty funkce g. Pak platí Besselova nerovnost

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx.$$

Poznámky

1. Lze dokázat, že v předcházejí větě platí Parsevalova rovnost, tj.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx.$$

2. Pro každou posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ pro níž konverguje řada

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

existuje funkce g tak, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou její Fourierovy koeficienty. Funkce g ovšem nemusí být po částech spojitá ani riemannovsky integrovatelná.

Věta 7.20 (Fourierovy koeficienty derivace)

Buď $f \in P_{2\pi}$ spojitá na R a $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ její Fourierovy koeficienty. Pak pro Fourierovy koeficienty $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ funkce f' platí

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \\ \alpha_n &= nb_n \ \forall n \in N, \\ \beta_n &= -na_n \ \forall n \in N. \end{aligned}$$

Věta 7.21 (Bodová konvergence Fourierovy řady)

Buď $f \in P_{2\pi}$. Pak její Fourierova řada F_f konverguje v každém bodě $x \in R$ k aritmetickému průměru jednostranných limit funkce f v bodě x, tj.

$$F_f(x) = 1/2(f(x+) + f(x-)).$$

Věta 7.22 (Stejnoměrná konvergence Fourierovy řady spojité funkce $f \in P_{2\pi}$)

Nechť $f \in P_{2\pi}$ je spojitá na R. Pak její Fourierova řada F_f konverguje stejnoměrně k f na R.

Poznámka: Spojitost funkce f nestačí k tomu, aby její Fourierova řada F_f konvergovala!

Věta 7.23(Lokálně stejnoměrná konvergence Fourierovy řady funkce $f \in P_{2\pi}$ spojité na intervalu)

Nechť $f \in P_{2\pi}$ je spojitá na $(a, b) \subset R$. Pak její Fourierova řada F_f konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a, b).