# Les sections coniques chez Philippe de La Hire

Zbyněk ŠÍR

**Thèse en co-tutelle**

Université Paris VI
directeur
Prof. Christian Houzel

Université Charles - Prague
directeur
Prof. Petr Vopěnka

## Remerciements

En premier lieu je voudrais exprimer mes remerciements à mes directeurs, le Professeur Houzel et le Professeur Vopĕnka pour leur direction de mon travail pour leurs conseils et pour leur bienveillant et patient soutien.

Les professeurs du DEA d'Histoire des sciences et de l'équippe RHESEIS m'ont par leurs cours et et des débats orienté dans l'histoire des mathématiques et ils ont beaucoup apporté à ma culture générale en histoire des sciences, ce dont je leur suis très reconnaissant.

A Madame Salber appartient ma gratitude pour ses corrections linguistiques. Les fautes qui restent sont dues aux modifications faites après sa relecture.

A mes amis pour leur grand soutien moral et matériel sans lequel j'aurais été incapable de mener à bien ce travail, je dis un grand merci.

Enfin je veux dédier ce travail avec reconnaissance à mes parents.

# Préface

Le Français Philippe de La Hire (1640-1718), géomètre, astronome, biologiste, artiste-peintre, l'un des premiers membres de l'Académie Royale des sciences, professeur au Collège Royal et à l'Académie d'architecture, a été un chercheur remarquablement fécond dans plusieurs domaines scientifiques. La problématique qui a retenu notre attention, celle des sections coniques, constitue une part essentielle de l'ensemble de son œuvre.

L'objectif principal du travail que nous présentons est de montrer le plus clairement possible quel type de géométrie nous rencontrons dans les écrits de La Hire sur les sections coniques. Quels sont ses moyens de démonstration et de présentation? Quelles notions utilise-t-il dans son discours et comment les conçoit-il? Quelles notions évite-t-il et pour quels motifs? Dans quelle tradition, ou traditions géométriques s'inscrit-il? Nous essayerons de répondre à ces questions au cours des chapitres suivants.

Nous ne souhaitons pas absolument énumérer tous les résultats sur les sections coniques démontrés par La Hire. Ce serait d'ailleurs fort difficile en raison de leur très grand nombre. Nous avons décidé de centrer notre présentation sur les méthodes utilisées par La Hire, puisque ce sont elles qui déterminent l'ensemble des notions, des outils et des points de vue constituant le discours géométrique. Nous mentionnons les résultats les plus importants à propos des méthodes correspondantes.

La première partie, de caractère introductif, permettra de situer rapidement nos analyses concernant les sections coniques par rapport aux événements de la vie de Philippe de La Hire, par rapport à l'ensemble de son œuvre scientifique et par rapport aux recherches sur Philippe de La Hire accomplies jusqu'à présent.

La deuxième partie, la plus importante, présente systématiquement les méthodes que La Hire utilise pour étudier théoriquement les sections coniques. Nous avons inclus dans cette partie également le texte commenté des *Planiconiques* que nous considèrons comme le travail le plus original parmi les écrits de La Hire sur les sections coniques.

La troisième partie concerne les constructions des sections coniques et, par suite, leurs applications pratiques. Cette problématique, très importante chez La Hire, éclaircit certaines de ses notions et méthodes géométriques.

Dans la quatrième partie nous situons La Hire par rapport à quelques géomètres. Nous trouvons le plus grand nombre de points de comparaison avec Apollonius de Perga, Girard Desargues et Jacques-François Le Poivre. Nous leur ajoutons Johannes Werner et Guidobaldo dal Monte chez lesquels nous avons trouvé des éléments de la théorie projective des coniques et de sa réduction au plan.

Nous aurions aimé comparer La Hire avec d'autres géomètres tels que Mydorge, Grégoire de St. Vincent, G. de l'Hôpital et plusieurs géomètres arabes, mais le volume très important de leurs écrits, et le temps limité dont nous disposions, nous ont contraint de réserver cette comparaison pour l'un de nos futurs travaux.

Dans les paragraphes consacrés à la présentation des propositions, des démonstrations et des méthodes géométriques de La Hire nous essayons de suivre le plus exactement sa démarche. En revanche nous raccourcissons son discours en utilisant la notation moderne et en omettant certains détails techniques. Dans les paragraphes consacrés à l'analyse de ses procédés géométrique nous parcourons, au contraire, librement divers aspects de sa géométrie, de son langage, de ses concepts, de ses figures etc.

Les figures qui accompagnent notre texte sont numérotées par une numérotation continue à l'intérieur de chaque chapitre. Le plus souvent il s'agit des fac-similés des figures originales des oeuvres concernées. Exceptionellement nous avons été obligé de refaire la figure nous même, dans ce cas là nous avons essayé de reproduir le plus exactement possible la figure originale.

Toutes les citations du type "[Taton, R. 1951]" renvoient à la bibliographie générale à la fin de notre texte. Cette bibliographie contient tous les écrits modernes et anciens cités et elle est organisées en un tout d'après le nom de l'auteur et l'année de publication.

Nous savons d'expérience que la géométrie des sections coniques, sans poser de difficulté insurmontable, exige une assez grande concentration d'esprit. Nous invitons le lecteur à passer un certain temps à étudier les figures d'après notre texte et à compléter lui-même ce que nous n'avons pas détaillé pour ne pas alourdir le propos. Ainsi certains passages apparemment courts peuvent exiger plus de temps de lecture que d'autres plus longs.

Les sections coniques chez Philippe de La Hire m'ont été proposées en 1997 pour thème de recherche par mon directeur, le Professeur Christian Houzel. En avançant dans mon travail, j'ai peu à peu perçu les grands avantages de ce sujet. D'une part, il s'agit d'un thème suffisamment déterminé pour permettre la présentation d'un résultat cohérent. D'autre part, la théorie des sections coniques au dix-septième siècle est liée à de nombreuses branches des mathématiques anciennes et modernes. Ainsi ce travail m'a permis d'approfondir sensiblement mes connaissances en histoire des mathématiques, et d'obtenir, je l'espère, un point de départ pour mes futures recherches.

Zbyněk ŠÍR

Paris, février 2002

# 1 La vie et l'œuvre de Philippe de La Hire

Cette première partie a pour objectif de permettre de situer notre recherche sur les sections coniques dans le contexte des événements de la vie de Philippe de La Hire (chapitre 1.1), par rapport à l'ensemble de ses activités scientifiques (chapitre 1.2) et dans le contexte des recherches réalisées par les historiens et les historiens des sciences jusqu'à présent (chapitre 1.3).

Nous ne prétendons pas donner dans cette partie des informations essentiellement nouvelles. Pourtant nous réclamons une certaine originalité dans la présentation qui regroupe des informations rassemblées dans des nombreuses sources primaires et secondaires de nature assez variée.

## 1.1 La vie de Philippe de La Hire (1640 – 1718)

Dans ce chapitre nous voulons donner, d'une manière condensée, les éléments bibliographiques concernant la vie de Philippe de La Hire. Notre objectif n'est pas de présenter de nouvelles découvertes, mais plutôt de donner une synthèse des informations trouvées dans plusieurs sources relatives à la vie de La Hire[1].

Ainsi nous voulons préparer notre recherche en donnant une image vivante et humaine du parcours professionnel et personnel de cet homme singulier.

### 1.1.1 L'origine et la jeunesse

La Hire est né à Paris le 18 mars 1640, fils aîné de Laurent de La Hyre et de Marguerite Coquin.[2]

[1] Les sources que nous utilisons sont essentiellement le célèbre et très bel éloge de Fontenelle prononcé à l'Académie des Sciences à la mort de La Hire [Fontenelle, B. 1719], ensuite plusieurs mentions dans les dictionnaires biographiques, qui se basent essentiellement sur l'éloge de Fontenelle mais qui donnent quelques détails supplémentaires, comme [BU 1861], [NBG 1859] etc. dont la meilleure est la notice de R.Taton publiée dans *Dictionary of Scientific Biography* [DSB 1970-90]. En plus de ces sources classiques nous avons pu profiter de deux publications qui donnent des éléments complémentaires sur la vie de la famille Hire à savoir du catalogue de l'exposition des tableaux de Laurent de La Hyre qui a eu lieu à Grenoble [Rosenberg, P. - Thuillier, J. 1988] et d'une recherche faite comme exemple du fonctionnement de l'Académie des Sciences [Sturdy, D.J. 1995]. Le lecteur trouvera d'autres indications sur la littérature secondaire concernant Philippe de La Hire dans le paragraphe 1.3.

[2] Voir l'arbre généalogique à la fin de ce chapitre au paragraphe 1.1.9.


**Philippe de La Hire par lui-même**

Le père de Philippe, Laurent de La Hyre, était peintre. Même s'il n'était pas aussi célèbre que certains de ses contemporains comme, par exemple, Poussin ou Philippe de Champaigne, il a pourtant acquis une importante réputation. Il a eu des commandes de la cour, de la noblesse française et des églises. De nombreux tableaux nous sont parvenus et nous en trouvons au musée du Louvre et à la cathédrale Notre Dame de Paris.[3] Un cycle de tableaux se trouvait autrefois à l'église Saint-Etienne du Mont à Paris.[4]

Il était "peintre ordinaire du roi", fondateur et professeur de l'Académie Royale de Peinture et de Sculpture. Il était remarquable, notamment, par son usage de la perspective et par son intérêt pour les fondements théoriques des arts. Il était ami d'Abraham Bosse, le fameux graveur et éditeur de livres théoriques sur l'art et élève de G. Desargues. Dans le cycle de tableaux sur les arts libéraux nous pouvons remarquer l'allégorie de la géométrie, où

[3] Voir [Rosenberg, P. - Thuillier, J. 1988] pour les reproductions des tableaux ainsi que pour une description et analyse détaillée de l'œuvre de Laurent de La Hyre.
[4] Pour l'analyse de l'usage de la perspective dans ces tableaux voir [Ponault, M. 1994].

Laurent de La Hyre représente la géométrie comme une femme qui tient dans sa main droite une feuille de papier contenant des figures géométriques prises dans les éléments d'Euclide.

**Laurent de La Hyre : L'allégorie de la Géométrie**

Nous ne savons rien sur la mère de Philippe, sinon qu'elle était probablement issue d'un milieu bourgeois de Paris.

Philippe avait quatre frères et sœurs. Nous savons qu'un de ces frères Barthélemy est devenu avocat à la cour. La situation matérielle de la famille a alors dû être assez aisée.[5]

Nous voyons alors que, grâce à son père, Philippe vivait dans une ambiance de curiosité à la fois artistique et scientifique. Cette ambiance a dû être décisive pour sa carrière scientifique. D'autre part, soulignons que dès son enfance La Hire vivait dans une situation matérielle aisée.

[5] Nous consacrerons le paragraphe 1.1.6 à la description de la situation financière de La Hire au cours de sa vie.

### 1.1.2 Instruction de jeune Philippe

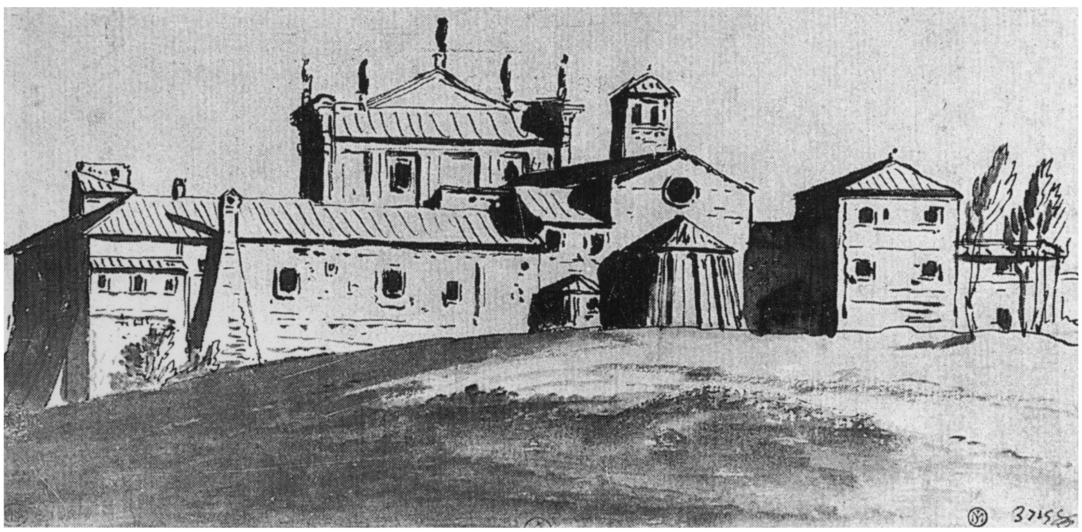
Philippe de La Hire n'a jamais fréquenté des institutions d'éducation. Dans sa jeunesse il a été instruit surtout par son père. Sa formation portait essentiellement sur la peinture et sur le dessin mais il a certainement aussi appris des éléments des sciences. Cette formation a été favorisée par l'ambiance créée par les artistes et savants qui fréquentaient la maison de la famille et par la curiosité naturelle de Philippe. Ainsi Fontenelle nous apprend qu'à cette époque,

> " Il a apprit parfaitement le Dessein, ensuite la Perspective, si necessaire aux Peintres, & cependant très negligée; & quoique les Cadrans n'appartiennent guére à la Peinture, il étudia aussi la Gnomonique, peut-être parce que c'est une espece de Perspective. Le plus leger prétexte lui suffisoit pour étendre se connoissances. Cet assemblage de Cercles qui forment la Sphere, & leurs Projections sur differents plans, s'imprimoient dans son esprit avec une facilité surprenante ..."

Mais son père est mort quand Philippe avait 16 ou 17 ans. Après la mort de son père, La Hire a souffert de maladies, notamment de "palpitations du cœur très violentes" et il a décidé de faire un long voyage en Italie. Il y a passé les années 1660-1664, probablement surtout à Venise. Malheureusement nous ne connaissons pas les détails de ce voyage. Il est pourtant probable, d'après l'affirmation de Fontenelle, que c'est bien dans cette période que La Hire manifeste sa préférence pour les mathématiques par rapport aux arts. Il aurait étudié les mathématiques et surtout les sections coniques pendant son séjour à Venise. À cette époque Venise était encore un lieu d'instruction scientifique par excellence. Les sections coniques ont été très étudiées en Italie au XVII siècle. Rappelons aussi que les livres des coniques d'Apollonius, perdus en grec mais conservés en arabe, ont été édités pour la première fois en Italie par A. Borelli en 1661.[6]

[6] Voir [Apollonius 1661]

Malheureusement nous ne savons pas quelle formation La Hire a suivie à Venise. D'après la conjecture de J.Itard, rapportée par R.Taton,[7] La Hire a pu subir l'influence de Stephano degli Angeli, élève de Cavalieri, qui enseignait à Venise avant d'obtenir un poste à Padoue en 1662. En effet degli Angeli a été ami de Borelli et dans ses œuvres nous remarquons un intérêt répété pour les sections coniques.[8] Mais La Hire ne s'est pas contenté de séjourner à Venise et il a voyagé à travers l'Italie, par exemple à Rome,[9] et donc il a pu étudier la géométrie dans d'autres villes d'Italie.



**Les environs de Rome par Philippe de La Hire**

### 1.1.3 Débuts d'activité scientifique 1664-1678

Après son retour à Paris, en 1664, La Hire jouissait d'une aisance suffisante pour ne point être inquiété par des soucis financiers. En effet, après la mort de sa mère en 1669, il fut capable de payer les parts des biens immobiliers qui revenaient en héritage à ses frères et sœurs et de devenir ainsi, à 29 ans, propriétaire de deux maisons à Paris, dont la valeur totale a été évaluée à 37 000 livres. Il a donc pu se livrer à loisir à ses recherches scientifiques et à la peinture.

[7] [Taton, R. 1953]
[8] Citons à titre d'exemple les deux travaux de ces géomètres: [Angeli, S. degli 1658], [Borelli, G.A. 1679].
[9] Comme en témoignent les dessins de Philippe de La Hire qui représentent les environs de Rome.

En 1670, il se marie avec Catherine le Sage, fille d'un marchand de Paris et ils s'installent dans une des maisons de la rue Montmartre, qui avait 3 étages et un jardin et ils louent l'autre maison. La même année naît le premier enfant de la famille Catherine-Geneviève. En tout, La Hire aura huit enfants.

Dès son retour à Paris, en 1664, Philippe entretint des contacts avec Abraham Bosse, le fameux graveur et un grand ami de Laurent de la Hire et de Desargues. Après la mort de Desargues, Bosse avait besoin de l'aide d'un mathématicien, qui lui fournirait les bases théoriques nécessaires pour ses ouvrages concernant la pratique et la théorie de l'architecture.

C'est ainsi que Philippe de La Hire a composé un petit opuscule *Observations sur les points d'attouchement de trois lignes droites qui touchent la section d'un cône* [La Hire, Ph. de 1672], destiné à accompagner le deuxième tome de la *Coupe des pierres* de Bosse. Or l'ouvrage de Bosse n'a jamais été publié et donc ce mémoire, dans lequel La Hire montre une bonne connaissance d'Apollonius ainsi qu'une aptitude à simplifier les démonstrations planes en se servant des objets à trois dimensions, a été imprimé à part.[10]

Ce mémoire est suivi par sa première importante publication, *Nouvelle méthode,* publiée en 1673 et par quelques mémoires plus petits dans les années suivantes.[11]

En 1673, naît le deuxième enfant, Marie-Anne et en 1677 leur premier fils Gabriel-Philippe qui deviendra plus tard académicien.[12]

Dans cette période La Hire entre probablement en contact avec Picard et ils poursuivent ensemble les observations astronomiques.[13]

### 1.1.4 Les grandes années (1678-1702)

Après ces débuts scientifiques arrive la période où La Hire publie ses plus grands ouvrages et où il reçoit de nombreuses récompenses de son travail.

En 1678, il devient membre de l'Académie des Sciences. C'est probablement, d'une part, grâce à son opuscule de 1673 dédié à Colbert et, d'autre part, grâce à sa coopération déjà

[10] Voir les paragraphes 1.2.1 et 2.1.4 pour le contenu et l'analyse de ce mémoire.
[11] Nous n'allons pas citer toutes les œuvres publiées par La Hire, car nous allons en parler en détail dans le chapitre 1.2.
[12] Il s'appliquera surtout à l'astronomie et continuera les observations astronomiques de son père.
[13] Je remercie monsieur Picolet pour les informations concernant la relation entre La Hire et Picard.

existante avec Picard. En effet sa première tâche à l'Académie fu le travail d'observation astronomique avec Picard, dans diverses villes de France en 1679-1682. Ces observations servaient à établir la nouvelle carte de France. D'ailleurs plus tard La Hire sera considéré comme "académicien astronome" et non comme géomètre.

En 1680 naît son quatrième enfant, Anne-Julie. L'année suivante sa première femme Catherine décède et laisse Philippe seul avec quatre enfants. La Hire se décide rapidement et épouse la même année Catherine Nonnet.

Toute la famille, comptant alors à ce moment six personnes, renonce à habiter dans une des maisons de La Hire, et va habiter à l'Observatoire de Paris, pour que Philippe puisse poursuivre ses observations astronomiques diurnes et nocturnes. Ce fut sans doute une importante dégradation de leur confort puisque La Hire ne disposait alors que de deux chambres, d'une cuisine et du cabinet où il travaillait. D'ailleurs, d'autres enfants devaient naître.

L'installation de La Hire à l'Observatoire avait, par contre, l'avantage de faciliter beaucoup l'accès aux instruments et aux livres nécessaires à son travail scientifique et, d'autre part, le contact fréquent avec d'autres savants. Nous est parvenue, par exemple, la correspondance entre La Hire et Christian Huyghens, concernant les questions très pratiques du logement à l'observatoire.

En 1682, La Hire publie sa *Gnomonique.* En cette même année décède Picard et La Hire est nommé professeur au Collège Royal au poste dit "astronomique" qui était vacant depuis la mort de Roberval en 1675.[14]

En 1683, La Hire coopère au tracé du fameux méridien de Paris. En 1684, il est chargé de superviser les travaux de nivellement nécessaires pour la construction des conduits amenant l'eau au château de Versailles. En cette circonstance il a eu l'occasion de nouer des liens avec la cour royale. Plus tard, il a même pu s'entretenir avec le roi, mais il semble qu'il

[14] Pour des raisons qui restent encore à éclaircir, ce poste n'a pas été pas donné à Picard qui était le candidat par excellence, mais il a resté vacant jusqu'à sa mort.

n'a point essayé de faire une carrière de courtisan et il fuyait la vie de cour, désireux de disposer d'assez de temps pour ses recherches.

En 1685, La Hire publie son grand livre des sections coniques *Sectiones conicae*.

En 1687, il est nommé professeur à l'Académie d'Architecture après Blondel. Ainsi, jusqu'à sa mort en 1718, La Hire a occupé régulièrement trois postes rémunérés. Dans les années suivantes, il s'applique à l'enseignement, aux observations, aux éditions de travaux et à la publication de travaux originaux. En plus des petits mémoires de cette période il publie, en 1694, ses *Mémoires de mathématique et de physique,* en 1695, sa *Mécanique.* Ses observations astronomiques aboutissent à ses fameuses *Tabulae astronomicae* publiées pour la première fois en 1702 et rééditées et traduites souvent depuis.

Dans cette période quatre autres enfants naissent, dont Jean-Nicolas né en 1685 et devenu, plus tard, académicien.[15]

### 1.1.5 Dernières années (1702-1718)

Les tables astronomiques ont été le dernier grand ouvrage de La Hire. Par contre, jusqu'à sa mort il continue à faire des observations astronomiques régulières.[16] Il continue à publier fréquemment des mémoires dans lesquels il met en valeur sa grande culture mathématique. Enfin, il poursuit inlassablement ses tâches d'enseignement et participe régulièrement aux réunions de l'Académie des Sciences.

Sa deuxième femme décède en 1709. Philippe lui-même, jouissant d'une très bonne santé, peut travailler jusqu'à un mois avant sa mort, qui survient le 21 avril 1718, alors qu'il était âgé de 78 ans.

### 1.1.6 Conditions matérielles de La Hire

Comme nous l'avons déjà indiqué, la situation matérielle de La Hire était très bonne.

Nous n'avons pas les détails de la situation de ses parents. Pourtant ils étaient en mesure de permettre à Barthélemy, le frère de Philippe, une formation de juriste et de procurer

[15] Il s'intéressait surtout à la biologie et la médecine.
[16] Son journal d'observations s'arrête un mois avant sa mort et il est immédiatement continué par son fils Gabriel - Philippe.

à ses sœurs des mariages intéressants. De plus, comme nous l'avons dit, Philippe a pu payer les parts d'héritage de ses frères et sœurs et posséder deux maisons en 1669.

Ensuite chacune de ses femmes a apporté une dot de 4 000 livres[17] et, ce qui est plus important, elles ont hérité de leurs parents. Ainsi au moment de la mort de sa deuxième femme La Hire en hérite la somme de 61 570 livres.

De plus, La Hire tenait les trois postes mentionnés,[18] qui lui donnaient un revenu de 3 300 livres par an.[19] Il avait aussi certaines facilités, par exemple, les frais des voyages lui étaient remboursés, etc.

Mais surtout il faut souligner la manière prévoyante avec laquelle il menait ses affaires financières. En 1670, il aménage une de ses maisons et il loue immédiatement l'autre pour 403 livres par an. Quand il déménage en 1680 à l'Observatoire, il loue l'autre maison également. En 1688 sa femme hérite pour une moitié d'une autre maison et, plusieurs semaines plus tard, La Hire achète la deuxième moitié au frère de sa femme pour 10 500 livres et, plus tard, encore une partie de la maison voisine pour 2 000 livres. Pendant de longues années, il a loué cette propriété pour 1 100 livres par an.

En dehors des investissements dans l'immobilier, La Hire investissait dans les titres de l'état. Il était en possession, en 1681 de titres ayant valeur de 10 800 livres, en 1709 de 89 800 livres et en 1718 à sa mort de 63 000[20] livres. Le revenu annuel de ces titres était approximativement de 6 %.

Il évitait aussi tout superflu et tout en vivant d'une manière agréable il n'était pas en possession d'objets de luxe. Font exception les livres, les instruments scientifiques et un certain nombre de tableaux. Mais même dans ce cas le valeur totale de ces objets ne dépassait jamais 2 000 livres.

Ainsi nous voyons que La Hire a prudemment mené ses affaires en investissant l'argent d'une manière sûre, et en évitant des spéculation dangereuses qui lui coûteraient de

[17] Tous les détails concernant la situation matérielle de La Hire sont tirés de [Sturdy, D.J. 1995].
[18] Voir le paragraphe 1.1.4
[19] 1500 livres pour son poste en Académie des Sciences, 600 livres pour le Collège Royal et 1200 livres pour l'Académie d'Architecture.
[20] La baisse de son avoir vers la fin de sa vie est due aux dons qu'il a faits à ses enfants.

l'argent peut-être, et sûrement du temps, du calme et de l'énergie. En agissant ainsi, il a réussi à garder sa bonne situation financière toute sa vie et même à en assurer une à ses enfants en leur léguant une propriété importante.

### 1.1.7 Le caractère de Philippe de La Hire

Nous pouvons percevoir l'image de La Hire à travers ses œuvres et les événements de sa vie.

Tout d'abord, nous sommes frappé par l'étendue de ses intérêts et de ses travaux scientifiques. Joignons à cela le fait qu'il était peintre et dessinateur habile et qu'il dessina toute sa vie. C'était un homme doué d'une grande curiosité et d'une intelligence universelle.

A sa mort il était en possession de 545 volumes qui appartenaient aux domaines suivants :

| **Sujet** | **Nombre de volumes** |
|---|---|
| Géométrie | 261 |
| Astronomie | 103 |
| Architecture | 46 |
| Fortifications | 15 |
| Botanique | 24 |
| Littérature | 68 |
| Religion | 28 |
| **Total** | **545** |

La quantité de ses propres écrits et l'étendue de ses journaux d'observation ainsi que ses nombreuses tâches pédagogiques témoignent d'un énorme travail très suivi. En effet, il n'en peut être que comme le dit Fontenelle,

> "Toutes ses journées étoient d'un bout à l'autre occupées par l'étude, & ses nuits très-souvent interrompuës par les observations astronomiques. Nul

> divertissement que celui de changer de travail ... . Nul autre exercice corporel que d'aller de l'Observatoire à l'Académie des Sciences, à celle d'Architecture, au College Royal ... ."

Nous voyons donc un travailleur menant une vie régulière et ordonnée. D'ailleurs, il a eu le bonheur de partager ses travaux scientifiques avec ses deux fils qui sont devenus académiciens et il était même aidé, dans ses observations, par ses filles.

Ses écrits sont d'une très grande clarté et montrent une bonne capacité pédagogique de présentation de la problématique. En outre, il essaye d'être le plus exact possible et, comme nous le montrerons, d'éviter les notions qui n'étaient pas généralement acceptées, comme, par exemple, les points à l'infini etc.

Nous retrouvons cette caractéristique de l'exactitude proche d'un certain pédantisme dans l'anecdote rapportée par Fontenelle:

> "Le roi payoit les voyages & la dépense des Mathematiciens qu'il employoit; & M. de la Hire exact jusqu'au scrupule & jusqu'à la superstition, presentoit à M. de Louvois des Memoires dressés jour par jour, & où les fractions n'étoient pas négligées. Le Ministre avec un mépris obligeant les déchiroit sans les regarder, & il faisoit expedier des Ordonnances de sommes rondes, où il n'y avoit pas à perdre."

La Hire était catholique et son testament et l'éloge de Fontenelle témoignent d'une piété solide sans être apparemment exceptionnelle. Nous conclurons ce chapitre par un autre détail trouvé dans le testament de La Hire qui nous montre sa préoccupation de père d'une famille nombreuse:

> "Et à l'égard de ma fille ainée du second lit Marie Elisabeth femme de Mr. Bonneau attendu que son peu de conduite et la dissipation entière qu'elle a faite de ses biens maternels provenants pour la plus grande partie de la communauté entre sa defunte mère et moy, désirant comme un bon père conserver du pain à ses enfants et à elle même pendant la vie, je luy donne et

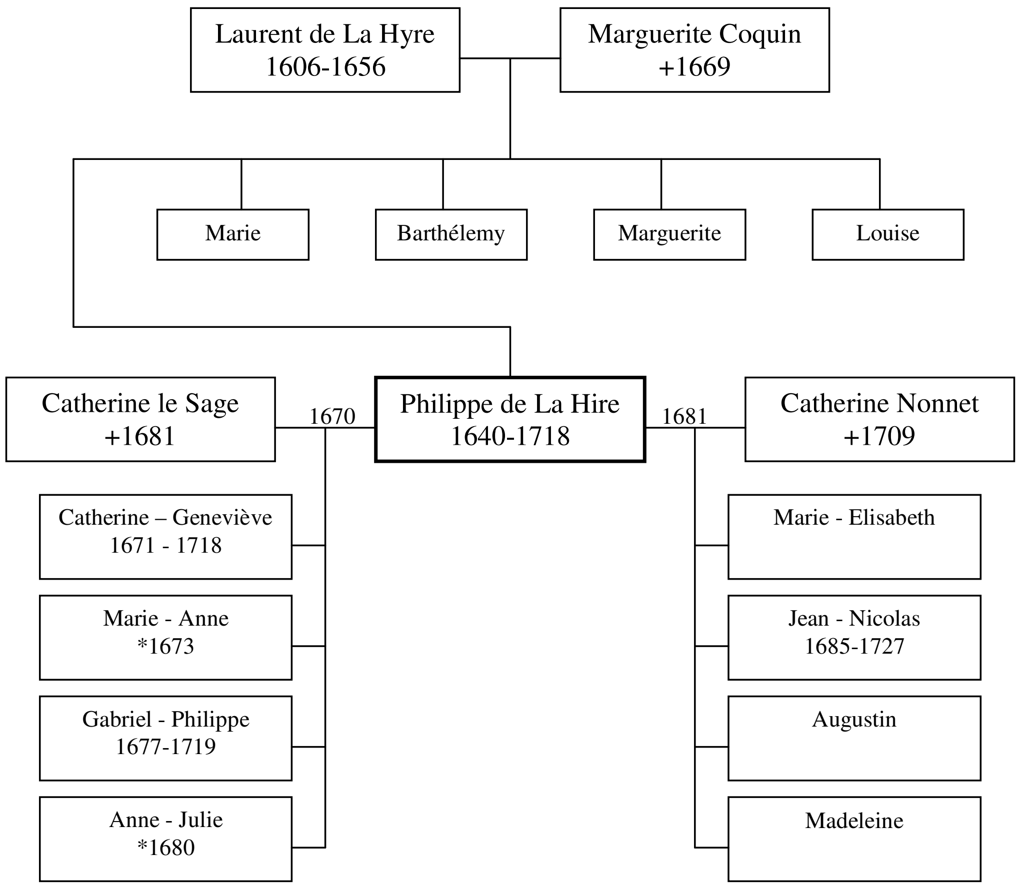
legue l'usufruit ... à prendre dans l'un de mes contrats de rente sur l'hôtel de ville dont la propriété appartiendra à ses enfants nés ou à naître, duquel usufruit elle jouira sa vie durant par forme de pension alimentaire et sans que les arrerages dudit contrat puissent être saisis par aucun de ses créanciers ou par ceux de son mary."

### 1.1.8 Philippe de La Hire - quelques dates importantes

1640 né à Paris le 18 mars, fils aîné de Laurent de La Hyre
1656 mort de son père
1660 voyage en Italie, surtout à Venise, études de la géométrie
1664 retour à Paris, amitié avec Abraham Bosse
1669 mort de sa mère
1670 mariage avec Catherine le Sage
1672 première publication en géométrie
1678 entre à l'Académie des Sciences
1679 observations astronomiques dans plusieurs villes de France avec Picard
1681 mort de sa première femme, mariage avec Catherine Nonnet
1682 professeur au Collège Royal
1685 publication de *Sectiones conicae*
1687 professeur à l'Académie Royale d'Architecture
1702 publication de *Tabulae astronomicae*
1709 mort de sa deuxième femme
1718 mort le 21 avril à Paris

Il a eu huit enfants dont deux fils Gabriel - Philippe et Jean - Nicolas sont devenus membres de l'Académie des Sciences.

### 1.1.9 L'arbre généalogique



## 1.2 Exposé sommaire de l'œuvre de Philippe de La Hire

Dans ce paragraphe nous voulons présenter, d'une manière générale, l'œuvre de Philippe de La Hire. Nous voulons ainsi, d'une part, préparer le terrain pour nos analyses des travaux consacrés aux sections coniques et, d'autre part, faciliter les futures recherches dans les directions qui dépassent notre sujet actuel. Cela nous permettra également de voir la place des travaux concernant les sections coniques dans l'ensemble des publications de La Hire.

Il existe plusieurs présentations sommaires du travail de La Hire. Il s'agit par exemple de l'éloge de Fontenelle [Fontenelle, B. 1719], de certaines notices dans les dictionnaires biographiques - par exemple [DCBH 1872], [BU 1861] etc. et surtout la notice dans le DSB par René Taton, qui nous semble la meilleure. Toutes ces présentations ont le désavantage d'être assez incomplètes (en partie, à cause de leur étendue limitée), ignorant presque complètement les petits mémoires de La Hire et restant trop brèves par rapport au contenu des travaux de La Hire.[21]

Vu notre objectif, nous présenterons, dans un premier temps, tous les travaux où il est question des sections coniques, ensuite nous parlerons d'autres travaux mathématiques de La Hire, et enfin de ses autres travaux scientifiques.

### 1.2.1 Les travaux concernant les sections coniques

Le sujet des sections coniques est présent, comme un fil d'or, tout au long de l'activité scientifique de La Hire. En effet son premier mémoire, "Sur les points d'attouchement" publié en 1672,[22] est entièrement consacré aux sections coniques, et il en est question encore en 1708 dans le mémoire "Méthode pour décrire de grands arcs des Sections coniques, sans avoir leur centre ni la grandeur d'aucun diamètre".[23]

Nous pouvons pourtant remarquer un changement dans ses intérêts concernant les sections coniques. L'instant de ce tournant est à notre avis l'année 1685 - l'année de publication de son œuvre la plus volumineuse *Sectiones conicae*.[24] Jusqu'à cette année nous

[21] Voir le chapitre 1.3 pour plus de détails.
[22] [La Hire, Ph. de 1672]
[23] [La Hire, Ph. de 1708]
[24] [La Hire, Ph. de 1685]

pouvons voir un effort répété de présenter une théorie des sections coniques, une étude unifiée, facile, complète et accessible au lecteur. Cet effort est couronné justement dans les *Sectiones conicae*. A partir de cette année les mémoires consacrés aux sections coniques sont moins fréquents, et il y est question, soit des applications des sections coniques, soit de problèmes particuliers.

### Les sections coniques avant 1685

Le premier mémoire que La Hire a mis à jour consistait en quelques pages publiées en 1672 en latin et en français sous le titre *De punctis contactum* ou *Sur les points d'attouchement*. Il s'agit d'un petit ouvrage formé de 8 pages 25,5 cm x 37,5 cm et de 2 planches gravées.[25] Le texte contient 2 définitions, 7 propositions avec leurs démonstrations, 2 scholies et 1 corollaire - le tout présenté d'abord en latin et ensuite en français. Cet ouvrage a été conçu pour accompagner le deuxième tome de *Traité de la coupe des pierres* d'Abraham Bosse, qui n'a été finalement jamais publié.[26]

Pour les constructions et démonstrations de la plupart de ces cas il se sert des propositions des *Coniques* d'Apollonius. D'un grand intérêt est la proposition 4 avec son corollaire, car La Hire utilise - même si c'est dans une forme faible - une méthode projective. C'est donc ici, que nous trouvons la première trace de sa méthode.[27]

Dans cet ouvrage apparaît encore un élément qui nous intéressera dans la suite. Il s'agit d'une méthode de construction de la parabole point par point. La Hire présente cette méthode sans démonstration, mais il y revient à deux reprises dans ses travaux[28] et nous pouvons dire, que c'est sa méthode préférée de construction de la parabole.[29]

---

[25] Cet ouvrage a été réédité [Taton, R. 1953] accompagné par un essai de R. Taton où il explique brièvement les origines du mémoire et notamment corrige l'erreur de Fontenelle, qui affirme [Fontenelle, B. 1719] que c'était Desargues qui avait sollicité, avec Bosse, La Hire pour composer son ouvrage.

[26] Pour l'histoire de la coupe des pierres et son rapport au dévéloppement de la géométrie voir [Sakarovitch, J. 1998].

[27] Nous reviendrons sur ce mémoire dans notre analyse de la méthode projective de La Hire au paragraphe 2.1.4. Ce mémoire est également une preuve formelle de la relation entre A. Bosse et La Hire, et donc d'une influence, au moins indirecte, des principes de Desargues sur La Hire. Nous reviendrons sur cette question au chapitre 4.4.

[28] *Nouveaux éléments des sections coniques* de 1679 et *Sectiones conicae* de 1685.

[29] Voir le paragraphe 3.1.2.

En 1673 La Hire publie son ouvrage *Nouvelle méthode pour les sections coniques*.[30] Il s'agit d'un opuscule de 72 pages in 4° accompagnées de 23 planches avec 83 figures.

Cet ouvrage contient l'essentiel de la méthode projective de La Hire. Cette méthode est utilisée dans le Théorème 1 qui s'étend sur 23 pages et dans laquelle La Hire réalise le passage projectif des propriétés du cercle à la section conique. Nous analyserons cette méthode en détail au chapitre 2.1. A partir de cette proposition La Hire développe diverses propriétés des sections coniques. Cette étude est complétée par un projet d'étude projective des sections des cônes et cylindres qui ont pour base une section conique quelconque.

Cet ouvrage est plus ancien, plus court et contient la méthode projective de La Hire dans une forme plus immédiate que *Sectiones conicae*. Pour ces raisons nous nous baserons dans notre analyse sur cet ouvrage en considérant *Sectiones conicae* comme un développement plus important de la même méthode.

L'ouvrage intitulé *Les Planiconiques* a paru en 1674 à la suite de la *Nouvelle méthode*. Cet ouvrage se compose de 22 pages in 4°, accompagnées de 2 planches contenant 5 figures. Les pages sont numérotées à la suite de la *Nouvelle méthode*, et portent alors les numéros 73-94. De même les lemmes et les figures sont numérotés à la suite de ceux de la *Nouvelle méthode* (lemmes 21-24, figures 84-89). Dans une remarque à la fin *des Planiconiques* La Hire dit :

> "Le Relieur sera aussi averty de joindre les Planches 24 et 25 à la suite des autres"

De plus La Hire réutilise dans *Les Planiconiques* les lemmes 1-17 et les figures 32-51 de la *Nouvelle méthode.* Nous voyons donc, que *Les Planiconiques* ont été conçues pour être reliées à la *Nouvelle méthode* et former ainsi un seul ouvrage.[31]

---

[30] [La Hire, Ph. de 1673]
[31] Ce qui a été fait pour l'exemplaire que j'ai consulté, celui de la Bibliothèque Nationale de France sous la cote V-6274

*Les Planiconiques* contiennent une étude rigoureuse d'une transformation géométrique plane, qui permet d'obtenir les sections coniques comme transformées du cercle,[32] et d'étudier leurs propriétés de cette manière. Ce procédé est d'une grande originalité et nous l'analyserons dans le paragraphe 2.2. Nous y présenterons également le texte en fac-similé avec nos commentaires.

En 1677 le *Journal des sçavants* publie un article dont le titre est *Extrait d'une lettre de M. de La Hire, touchant le Problème contenu dans la Méthode Géométrique de M. Halley, pour trouver les aphelies, les excentricitez et la proportion des Orbes des Planètes principales*. La Hire y donne la solution d'un problème géométrique inspiré par l'astronomie: Trois points et un foyer d'une ellipse étant donnés, trouver son axe principal et le deuxième foyer. La Hire critique Halley d'avoir utilisé les coniques pour résoudre ce problème plan, et donne sa solution en utilisant uniquement la règle et compas.

En l'année 1678 La Hire annonce dans le *Journal des sçavants* sa découverte d'une certaine généralisation des asymptotes. Par exemple toutes les hyperboles qui ont les mêmes asymptotes ont mutuellement certaines propriétés asymptotiques. Analogiquement La Hire trouve des propriétés asymptotiques entre les paraboles et les ellipses. Cette théorie a été publiée dans *Sectiones conicae*, livre VI, théorèmes 12-17.

En 1679 La Hire publie en un seul volume trois ouvrages - *Nouveaux éléments des sections coniques*, *Les lieux géométriques* et *La construction ou effection des équations*.

Les *Nouveaux éléments des sections coniques* se composent de 178 pages in 8°, avec les figures insérées dans le texte. La Hire y définit et y étudie les propriétés des trois sections en utilisant les propriétés principales des foyers (des deux foyers pour l'ellipse et l'hyperbole et du foyer et de la directrice pour la parabole). La Hire a été le premier qui a utilisé cette méthode et il s'en sert d'une manière très élégante.[33] Après les définitions, La Hire

[32] Le mot transformation n'apparaît nulle part dans le texte de La Hire et nous l'utilisons pour simplifier notre discours. Nous analyserons dans la suite, quels sont les concepts utilisés par La Hire.

[33] Des méthodes de description des sections coniques dans le plan, souvent faites par un instrument (appelées descriptions organiques), ont été utilisées déjà dans [Witt, J. 1661] et [Van Schooten, F. 1646], mais leurs méthodes de description sont plus compliquées et moins élégantes. Plus tard la méthode de La Hire a été reprise dans [L'Hospital, G. de 1707].

démontre dans 15 propositions pour la parabole, 20 propositions pour l'ellipse et 24 propositions pour l'hyperbole, les propriétés principales de ces courbes, en aboutissant au *symptôme*[34] pour un diamètre quelconque. Nous présenterons cette méthode dans le chapitre 2.3.

A la fin des *Nouveaux éléments* La Hire donne, dans le paragraphe "Description des sections coniques sur un plan", cinq méthodes de construction des coniques point par point. Une de ces méthodes est celle déjà publiée en l'année 1672 dans le mémoire *Sur les points d'attouchement*. Toutes ces méthodes sont, avec plusieurs autres, reprises dans le livre IX de *Sectiones conicae* qui est consacré entièrement à la description des coniques point par point. Nous aborderons la problématique des constructions des coniques au chapitre 3.1.

Les deux autres ouvrages *Les lieux géométriques* et *La construction ou effection des équations* n'ont pas pour sujet les sections coniques proprement dites. Ils traitent des méthodes de la géométrie analytique[35] de Descartes et les coniques y apparaissent uniquement comme exemples des courbes du deuxième degré.[36] Soulignons, à cet endroit, que, contrairement à une opinion erronée répandue, La Hire n'a jamais donné une étude analytique des sections coniques. Il se servait de la géométrie analytique assez exceptionnellement. Par exemple, à la fin des *Lieux géométriques* il utilise la méthode analytique, qu'il venait d'expliquer, pour résoudre le problème: "Mener des normales à une conique donnée par un point donné".[37] Nous parlerons de ces utilisations de la géométrie analytique au paragraphe 2.4.

---

[34] Par le mot « symptôme » nous désignons, partout dans notre texte, la propriété caractéristique d'une conique. Il s'agit des propriétés démontrées par Apollonius dans les propositions I.11-14 de ses *Coniques*. Nous utiliserons le mot « symptôme » même dans le cas, que les propriétés d'Apollonius sont légèrement modifiées. Ce mot est la traduction française du mot grecque σύμπτωμα utilisé par Apollonius dans la préface au livre I pour désigner les susdites propriétés :
περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον [βίβλιον] τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ **συμπτώματα** ... Le premier livre concerne la génération des trois sections, ainsi que des sections opposées, ainsi que les principales propriétés ... (traduction par Ver Eecke, [Apollonius 1925]).

[35] Pour la simplicité nous utiliserons le terme « géométrie analytique » pour les méthodes exposées dans la *Géométrie* de Descartes, même si nous sommes conscients que ce terme n'est pas exact.

[36] Nous parlerons davantage de ces deux ouvrages dans le paragraphe 1.2.2.

[37] Le célèbre problème qui est abordé au livre V des *Coniques* d'Apollonius.

En 1682 La Hire publie sa *Gnomonique* annoncée déjà dès 1680 par un article dans le *Journal des Sçavants*.[38] Nous nous intéresserons à cet ouvrage, d'une part, à cause de l'application des sections coniques et, d'autre part, parce que la notion "projection" y est utilisée plus librement que dans les écrits théoriques de La Hire.

### Les *Sectiones conicae* de 1685

Il s'agit de l'œuvre la plus volumineuse que La Hire consacre aux sections coniques. Dans cette imposante "somme", écrite en latin, La Hire développe la théorie des sections coniques sur 250 pages in folio, les figures étant insérées dans le texte. L'objectif de La Hire est formel: en se servant de sa méthode projective, présenter tous ce qu'on peut dire des sections coniques, tout ce qui en est connu de l'Antiquité et des auteurs modernes. Voilà, en traduction, une citation de la préface :

> " Ensuite puisque, le temps étant écoulé, j'avais décidé de disposer dans un ordre sûr, ce qui avait été découvert par moi quelques années avant et j'avais tenté en même temps de réunir ce que j'avais rencontré dans les écrits des anciens et des modernes, qui se tournèrent avec louange vers cette plus grande partie de la Géométrie ... "[39]

Pour montrer la supériorité de sa méthode par rapport à Apollonius, il rajoute à la fin de son livre un Appendice, dans lequel il cite toutes les propositions d'Apollonius et montre de quelle manière ces propositions sont démontrées dans son ouvrage. Il semble donc que La Hire a voulu d'une certaine manière remplacer Apollonius par ses *Sectiones conicae*.[40]

---

[38] *Manière universelle pour faire des Cadrans Solaires*, p.191.

[39] Comme l'a très bien remarqué Chasles, on peut constater au moins deux lacunes très importantes. La Hire ne parle nullement ni du théorème d'involution de Desargues, ni de l'hexagone "mystique" de Pascal. Pourtant il est sûr, qu'à cette époque il a déjà connu au moins le théorème de Desargues, car nous avons sa copie manuscrite de Brouillon project de 1679. Mais nous devons voir que l'intérêt de ces deux théorèmes réside surtout dans le fait qu'ils sont des invariants projectifs. Comme tels, ils engendrent une méthode d'étude des sections par projection. Or La Hire utilise ses propres invariants et, donc, n'a pas besoin de ces théorèmes.

[40] Cet objectif n'a pas été atteint car *Les Coniques* d'Apollonius ont été de nouveau traduites et éditées par Halley en 1710, et les quatre premiers livres aussi par Buti en 1696. Newton cite dans ses *Principia* surtout Apollonius, mais plusieurs fois aussi La Hire.

La méthode utilisée par La Hire dans les *Sectiones conicae* est la même que celle de la *Nouvelle méthode*. Par contre, La Hire tire beaucoup plus de conséquences des propriétés démontrées par projection. Nous n'allons pas donner un récit du contenu de cet ouvrage imposant, mais nous reviendrons sur divers sujets traités par La Hire dans le chapitre 2.1.

### Les sections coniques après 1685

Comme nous l'avons déjà dit, La Hire ne publie pas de traité systématique sur les sections coniques après 1685. De plus parmi ses mémoires publiés après cette date, un seul est consacré à une étude théorique des coniques. Il s'agit du mémoire publié en 1704 qui porte le titre *Construction générale des lieux où sont les sommets de tous les angles égaux droits, aigus ou obtus, qui sont formés par les touchantes des Sections coniques*.

La Hire, par contre, applique la théorie des sections coniques dans plusieurs mémoires. Les propriétés des sections coniques y apparaissent sans démonstration, pour être appliquées ou légèrement développées en vue d'une application. Les théorèmes des *Sectiones conicae* sont souvent cités. Ces applications nous intéresseront, d'une part, comme origine et inspiration possibles des études des coniques par La Hire et, d'autre part, comme témoins de certaines notions et méthodes utilisées par La Hire. Il s'agit de sujets très variés.

En 1700, La Hire publie le mémoire *Méthode générale pour les jets des Bombes*, dans lequel il donne la construction, avec la démonstration, d'un instrument qui permet de déterminer en pratique l'angle de tir du canon. En 1701 dans le mémoire *Construction d'un nouvel astrolabe universel,* La Hire discute des diverses projections qu'on peut utiliser pour la construction d'un astrolabe. Il donne des raisons pour en choisir une et donne la construction des coniques représentant les trajectoires des objets célestes dans cette projection. Sur les applications des coniques dans l'architecture La Hire revient dans deux mémoires: "Remarques sur la forme de quelques Arcs dont on se sert dans l'Architecture", en 1702, "Méthode pour décrire de grands arcs des Sections coniques sans avoir leur centre ni la grandeur d'aucun diamètre", en 1708. Nous reviendrons sur ces sujets dans la partie 3 consacrée aux applications des sections coniques.

### 1.2.2 Les autres travaux mathématiques de La Hire

Pour ce qui concerne les autres intérêts mathématiques de La Hire, il faut mentionner plusieurs domaines. En effet ses occupations sont très larges. Il s'intéressait aux solutions analytiques des problèmes géométriques et aux solutions des équations par intersections des courbes - d'une manière inspirée par Descartes. Il a étudié les courbes mécaniques comme la cycloïde et l'épicycloïde. Il a donné la solution de plusieurs problèmes géométriques spéciaux. Enfin il s'est intéressé à la théorie des nombres, particulièrement aux carrés magiques.

#### La géométrie analytique

La Hire s'intéresse aux méthodes cartésiennes de solution des problèmes géométriques. Il a publié deux ouvrages sur ce sujet en 1679 - *Les lieux géométriques* et *La construction ou effection des équations*. Dans le premier chapitre de l'ouvrage *Les lieux géométriques,* La Hire développe les solutions des problèmes géométriques par leurs réductions aux équations en distinguant les problèmes déterminés et indéterminés. Le deuxième chapitre porte le titre "De la nature des lieux et de la réduction des équations pour la construction des lieux". La Hire y définit ce que c'est qu'un lieu géométrique et quelles équations correspondent à quel type de lieu. Il n'est pas sans intérêt, que La Hire étende la description analytique d'un lieu aux trois dimensions.[41]

> " De même pour connaître le rapport des points LL d'une superficie aux points d'une ligne droite ON, il faut mener par la ligne ON un plan ONB; & de chaque point L de la superficie, les lignes LB parallèles entre elles jusqu'au plan, & des lignes BN aussi parallèles entre elles jusqu'à ON: mais ce n'est pas mon dessein de parler icy de ces sortes de Lieux"

Nous devons remarquer encore un fait. Dans sa description des lieux, La Hire utilise les termes "Origine", "Tige", "Noeuds" et "Rameaux", (Fig. 1.2.1), qui ont été utilisés dans un autre contexte par Desargues dans son *Brouillon project*.

---

[41] Ce fait est indiqué dans [Boyer, C.B. 1956]. La Hire parle de la possibilité d'une telle extension à trois dimensions, mais ne va pas plus loin.

Ce fait n'est pourtant pas d'une grande importance, car La Hire avoue avoir une parfaite connaissance de *Brouillon project* depuis 1679.[42] La question importante est : quelle était sa connaissance du Brouillon project avant la publication de la *Nouvelle méthode* en 1673?

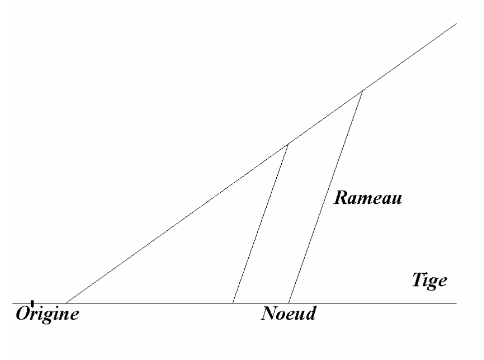



**Fig. 1.2.1**

Dans les autres chapitres des *Lieux géométriques* La Hire développe la technique de simplification algébrique pour obtenir une certaine forme canonique de l'équation. Il donne également la méthode de construction de la courbe correspondant à l'équation pour les degrés un et deux. Les sections coniques sont utilisées, mais elles sont identifiées simplement par leur symptôme et ensuite construites par les méthodes données dans le paragraphe "Description des sections coniques sur un plan" qui fait partie des *Nouveaux éléments* dont nous avons parlé plus haut.[43]

Dans *La construction ou effection des équations* La Hire donne la solution des équations algébriques par l'intersection de deux courbes.

La Hire revient sur le sujet de la géométrie analytique dans deux mémoires publiés en 1710 et 1712, à savoir "Remarques sur la construction des Lieux géométriques et des Equations et Remarques sur la géométrie de M. Descartes".

### Etudes des courbes mécaniques

La Hire s'intéressait également à certaines courbes mécaniques. Ainsi, en 1676, il a publié un petit ouvrage *De cycloide lemma* dans lequel il présente sa méthode de la quadrature de cette courbe. Son livre *Traité des épicycloïdes* publié en 1694 est assez connu. Il y étudie, le premier, en détail, les propriétés des épicycloïdes et il applique ces courbes pour la construction des dents des roues dentées.[44] Cette étude est suivie, en 1704, de l'article intitulé

---

[42] Année de sa copie manuscrite de *Brouillon project*
[43] Nous les présenterons aux chapitre 3.1.
[44] Pour les origines de l'invention de cette forme de dents des roues dentées voir [Woodsbury, R.S. 1958] *The First Epicycloidal Teeth*.

*Description d'un lieu géométrique ou sont les sommets des angles égaux formés par deux touchantes d'une cycloide* et en 1706 par le mémoire *Traité des Roulettes, où on démontre la manière universelle de trouver leurs Touchantes, leurs points de recourbement, ou d'inflexion etc.* En 1708 La Hire publie son ouvrage *Des conchoïdes en général.*

### Problèmes géométriques

La Hire a consacré plusieurs mémoires à divers problèmes géométriques. En 1692 il a publié son mémoire *Nouvelle méthode pour démontrer le rapport de la superficie de la Sphère avec la superficie de son plus grand cercle et avec la superficie du cylindre qui a pour base ce même cercle*. En 1700, il donne une solution analytique d'un vieux problème géométrique dans le mémoire *Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant donnés, trouver la superficie ou l'aire*. En 1710, La Hire publie le mémoire *Méthode générale pour la division des arcs de cercle ou des angles en autant parties égales qu'on voudra*, où il se sert de l'hyperbole pour sa solution. Mentionnons, enfin, encore son mémoire *Propriétés des trapèzes* où La Hire étudie les propriétés des quadrilatères généraux.

### Théorie des nombres

La Hire s'intéressait, à titre exceptionnel, à la théorie des nombres.[45] Ainsi en 1704 il a publié une étude très élémentaire "Remarques sur les nombres quarrés, cubiques, quarré-quarrés, quarré-cubiques et des autres degrés à l'infini". D'un plus grand intérêt sont ses deux mémoires sur les carrés magiques. Il s'agit de "Remarques sur les nombres quarrés, cubiques, quarré-quarrés, quarré-cubiques et des autres degrés à l'infini" de 1704 et de "Nouvelle Construction et consideration sur les Quarrés Magiques, avec les Démonstrations" de 1705. La Hire y donne la construction, séparément, pour les carrés magiques avec côté pair et impair.[46]

Nous voyons donc que La Hire s'intéressait à presque tous les domaines des mathématiques de son époque, même si ce n'était pas toujours avec la même intensité. Nous pouvons constater qu'au niveau de la quantité et de l'étendue des traités, c'est la théorie des

[45] Ces intérêts ont été probablement incités par son édition de l'œuvre de Frenicle en 1692-3.
[46] Voir [Descombres, R. 2000] pour une histoire de construction des carrées magiques.

sections coniques qui reste le domaine le plus important dans l'œuvre mathématique de La Hire.

### 1.2.3 D'autres activités scientifiques

L'étendue des activités de La Hire était très large et ne se limitait nullement aux mathématiques. Comme le dit Fontenelle dans son éloge « La Hire devint un Mathématicien universel » - mathématicien dans le sens large – un savant, ou encore « On eût pu de même avoir en M. de La Hire seul une Académie entière des sciences ». En effet La Hire s'est appliqué à un travail de recherche dans de nombreuses disciplines telles que l'astronomie, les observations météorologiques, la théorie et à la pratique du nivellement et de la mesure de la terre, à la mécanique, à l'optique physiologique, à la biologie, à la théorie de la peinture etc.

#### Astronomie

La Hire a consacré un effort très suivi aux observations astronomiques. Aussi au moment de la réorganisation de l'Académie des sciences il a été nommé *pensionnaire astronome*.

Dans les années 1679-1682 il a participé avec Picard aux observations astronomiques faites dans diverses villes de France en vue de la nouvelle carte de France. Leurs observations avec la carte corrigée d'après ces observations ont été publiées, par exemple, dans le Tome VII des *Mémoires de l'Académie des sciences*.

A partir de l'année 1682, La Hire déménage à l'Observatoire de Paris et poursuit diverses observations astronomiques diurnes et nocturnes jusqu'à l'année de sa mort. Ses observations, couvrant alors 35 ans de travail très suivi, sont conservées dans 12 tomes du journal des observations aux archives de l'Observatoire de Paris. Les observations les plus intéressantes comme, par exemple, les observations des conjonctions, éclipses, passages de comètes, taches sur le Soleil etc. ont été publiées dans les *Mémoires de l'Académie des sciences*. Nous pouvons mentionner, au titre d'exemple, "Observation de la Planète de Venus faite à l'Observatoire Royal au mois de Novembre 1691" publiée dans *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*, tome 10, page 20.

Ses observations très régulières ont amené La Hire à composer les tables astronomiques qui, comme l'annonce La Hire lui même, se basent uniquement sur les observations et non pas sur une théorie. Dans un premier temps il a publié en 1687 les tables du Soleil et de la Lune *Tabularum astronomicarum pars prior*. Ces tables ont été complétées plus tard par d'autres observations et publiées la première fois en 1702 sous le titre *Tabulae astronomicae Ludovici Magni jussu et munificentia exaratae*.[47] Ces tables ont eu un grand écho et ont été réimprimées plusieurs fois et même traduites en plusieurs langues.

Un autre résultat de synthèse fondé sur le travail d'observation de La Hire a été sa machine qui montrait les dates et les heures des éclipses. Elle a été décrite dans un court mémoire *Machina ad eclipses notandas* publié à Paris en 1689. Cette machine qu'on associait à une pendule pour la faire mouvoir a été, selon Fontenelle, fabriquée en plusieurs exemplaires, dont l'un a été envoyé, avec d'autres curiosités, à l'empereur de Chine.

La Hire a également fait graver deux planisphères avec des constellations célestes, qui ont paru à Paris en 1702 sous le titre *Les Constellations Célestes, avec les Etoiles qui y sont comprises, divisées en deux Planisphères*.[48]

Dans la bibliothèque Sainte-Geneviève, une grande carte de La lune, faite par La Hire, nous a été conservée. Remarquons à cette occasion qu'un des monts de la Lune porte le nom de Philippe de La Hire.

Enfin, nous pouvons mentionner un petit ouvrage de vulgarisation, composé probablement d'après le désir du roi et imprimée sous le titre *Description et explication des globes qui sont placés dans les pavillons du château de Marly*.

Nous voyons ainsi que l'œuvre astronomique de La Hire est si étendu qu'elle mériterait un ouvrage particulier. Pour d'autres détails sur La Hire astronome le lecteur peut consulter, par exemple, [Delambre, J.B. 1821], pages 661-685.

---

[47] [La Hire, Ph. de 1672a]

[48] La Hire s'est servi, dans la construction de ces planisphéres, d'une nouvelle projection de son invention. Cette projection a été décrite dans son mémoire sur l'astrolabe [La Hire, Ph. de 1701]. Voir le chapitre 3.3 pour la description de cette construction.

### D'autres observations et mesures

En plus de ses observations astronomiques, La Hire s'appliquait à d'autres observations et mesures des phénomènes les plus variés. Déjà pendant ses voyages, qu'il a faits dans le cadre des travaux sur la nouvelle carte de France, il faisait des observations de la marée et du magnétisme terrestre. Il a publié ses résultats dans les travaux cités plus haut.

En 1683 La Hire a travaillé sur le tracé du méridien commencé par Picard déjà en l'année 1669.[49]

En 1684 La Hire se voit inviter par Louvois à superviser les travaux de nivellement qui avaient pour but d'amener l'eau au château de Versailles. Ces travaux se poursuivirent jusqu'à l'année 1685.[50] Plus tard en l'année 1689, il imprime son *Ecole des arpenteurs* dans laquelle il explique d'une manière très claire les connaissances nécessaires pour un arpenteur.

La Hire faisait aussi des observations météorologiques à l'Observatoire de Paris. Chaque année il publiait ses observations de pluie tombée[51] ainsi que les mesures barométriques et de la température. Ces observations sont citées même dans certains articles contemporains qui ont pour sujet les tendances météorologiques à long terme.[52]

### Méthodologie des observation et expériences, appareils d'observation

Nous remarquons chez La Hire un grand intérêt pour les procédés d'observation et pour les appareils scientifiques. Cet intérêt est, bien sûr, naturellement lié à son travail très suivi d'observation. Nous n'allons pas analyser en détail ce chapitre de son travail et le lecteur peut se rapporter à la bibliographie des travaux de La Hire pour lire les titres de ses articles traitant de ce sujet.

---

[49] Sur Picard et le projet du méridien de Paris voir [Picolet, G. 1987].

[50] En 1684 La Hire édite *Traité du nivellement et abrégé de la mesure de la terre* qui a été trouvé dans les notes de Picard après sa mort. Il est probable que l'édition de cet ouvrage et son travail pratique de nivellement aient un rapport.

[51] Voir par exemple "Observation du Baromètre, du Thermomètre & de la quantité d'Eau de Pluie & de Neige fondue qui est tombée à Paris dans l'Observatoire Royal pendant l'année 1699"; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences,* Paris 1700 ; p.6

[52] Par exemple [Legrand, J.-P. 1990].

### Mécanique

La Hire a publié aussi plusieurs travaux concernant la mécanique. En 1678 il publie un court article dans le « Journal des Sçavants » dans lequel il donne des éléments pour montrer l'impossibilité du mouvement perpétuel. L'argument principal est que par un mouvement perpétuel le principe du levier serait contredit.

C'est ce principe du levier qui est à la base de son livre sur la mécanique le plus important – *La mécanique* de 1695. A partir de ce principe il essaie d'expliquer toutes les autres situations et machines.

En 1694, La Hire publie son traité sur les épicycloïdes où, après l'avoir étudiée les épicycloïdes théoriquement, il les applique pour obtenir la forme idéale des dents des roues dentées.[53]

La Hire a donné aussi la solution de nombreux problèmes pratiques. Nous pouvons citer, par exemple, son mémoire "Examen de la Force de l'Homme pour mouvoir des Fardeaux, tant en levant, en portant qu'en tirant ..."; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 1699; p. 153 ou "Examen de la Force nécessaire pour faire mouvoir le Bateaux, tant dans l'Eau dormante que courante ..."; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 1702; p. 261 etc.[54]

### D'autres travaux de physique

Parmi d'autres intérêts de La Hire dans le domaine de la physique il faut mentionner surtout deux travaux - Explication des principaux effets de la glace et du froid; *Mémoires de mathématique et de physique*, Paris 1694 où La Hire développe logiquement une théorie à partir de simples principes qu'il a posés au début et "Dissertation des différences des sons de la corde de la trompe marine"; *Mémoires de mathématique et de physique*, Paris 1694, où il étudie quelques propriétés du son.

### Observations biologiques

[53] Voir [Woodsbury, R.S. 1958] pour une brève histoire de la forme des dents des roues dentées.
[54] Plusieurs remarques sur cet aspect pratique et ergonomique de la mécanique de La Hire peuvent être trouvées dans [Daffos-Dioge 1987].

Les intérêts de La Hire se sont portés jusqu'aux travaux de la biologie descriptive. Déjà, pendant ses voyages à travers la France en 1679-82 il réalisa un certain nombre de dissections de poissons. Plus tard, il a publié dans les mémoires de l'Académie plusieurs petits travaux comme, par exemple, "Description d'un Insecte qui s'attache aux Mouches"; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T 10; p. 425. La Hire utilise ses capacités de dessinateur pour faire des dessins qui accompagnent les descriptions de ses observations. (Fir. 1.2.2)

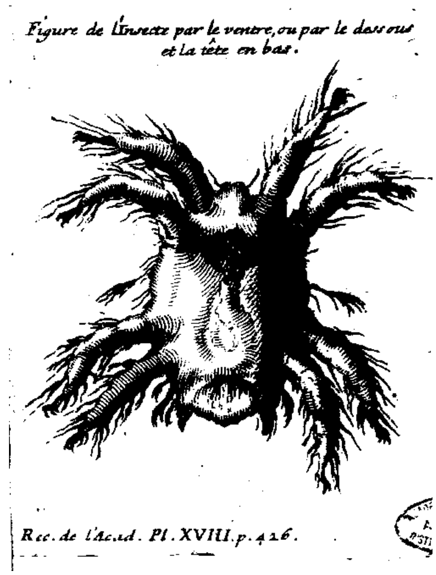



**Fig. 1.2.2**

Nous pouvons aussi mentionner dans ce paragraphe les travaux de La Hire sur les yeux et la problématique physiologique de la vue. Le plus important parmi eux est le Traité des différents accidents de la Vue; *Mémoires de mathématique et de physique*, Paris.

### Les arts et l'architecture

La Hire enseigna à l'Académie d'Architecture à partir de 1684 et il a donc dû s'intéresser profondement aux divers problèmes liés à l'architecture. Nous trouvons plusieurs mémoires qui traitent de certaines de ces questions. Nous avons déjà cité à propos des applications des sections coniques deux de ces mémoires auquels nous reviendrons en détail au chapitre 3.4. Un autre mémoire très intéressant de 1712 "Sur la construction des voûtes dans les édifices"[55] traite de la question de la statique des voûtes:

> "C'est un Probleme des plus difficiles qu'il y ait dans l'Architecture, que de connoître la force que doivent avoir les pieds droits des Voutes pour en soutenir la poussée, & les Architectes n'ont pas trouvé jusqu'à présent aucune regle certaine pour la déterminer".

[55] [La Hire, Ph. de 1712]

La Hire donne une solution pour la voûte de la forme d'un demi cercle en supposant que le quart de cercle supérieur de la voûte peut être considéré comme absolument monolithique. Il se sert du principe du levier et du calcul algébrique pour déterminer la largeur des deux pieds droits. Cette solution est en rapport avec les principes de sa *Mécanique.*

La Hire a probablement peint "en amateur" toute sa vie. Il a rédigé un *Traité de la peinture* qui n'a été imprimé qu'en 1730, après sa mort. Il s'agit d'un travail assez descriptif et très pratique et La Hire n'y parle, par exemple, pas de la perspective.

### Le travail d'édition

En plus de sa propre production scientifique, La Hire a édité plusieurs travaux d'autres auteurs. Picard, pendant sa maladie, a remis à La Hire le manuscrit de son *Traité du nivellement,* qui a été complété et édité par La Hire en 1684. Il en a été de même pour *Traité du mouvement des eaux* de Mariotte.

Plus tard La Hire a été sollicité par l'Académie des Sciences pour préparer pour l'édition les écrits inédits de Frenicle et Roberval, ce qui a été fait et imprimé en 1692 et 1693.

En 1693 La Hire édite un grand in-folio en latin avec le titre *Veterum mathematicorum Athenaei, Apollodori, Philonis, Bitonis, Heronis et aliorum opera* qui contient une traduction des écrits anciens sur le machines de guerre.

Nous donnons dans le paragraphe suivant une première version de la bibliographie des oeuvres de Philippe de La Hire. Nous avons adopté une structure en fonction de notre sujet des sections coniques. Certains travaux, en particulier dans la section "Applications des sections coniques" pourraient être classés également dans d'autres sections. Nous avons exclu de la bibliographie les mémoires astronomiques qui rendent compte de ses observations. Il est probable que certains mémoires ont échappé à notre attention, mais il nous semble que cette bibliographie montre déjà assez bien la quantité impressionnante des écrits de La Hire ainsi que l'importance relative des divers domaines de sa recherche.

### 1.2.4 Bibliographie structurée de Philippe de La Hire

#### Etudes théoriques des sections coniques

**1672**
*Observations sur les points d'attouchement de trois lignes droites qui touchent la section d'un cône*; Paris

**1673**
*Nouvelle méthode en géometrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*; Paris

**1674**
*Les Planiconiques*; Paris

**1676**
*De cycloide lemma*[56]; Paris

**1678**
Nouvelle decouverte dans les Sections Coniques pour leurs asymptotes; *Journal des sçavants*; p. 159

**1679**
*Nouveaux éléments des sections coniques*; Paris

**1685**
*Sectiones conicae in novem libros distributae*; Paris

**1704**
Construction generale des lieux ou sont les sommets de tous les angles égaux droits, aigus ou obtus, qui sont formés par les touchantes des Sections Coniques*; Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 2. août, p. 220

[56] Cet ouvrage contient deux propositions sur les sections coniques

### Applications des sections coniques

**1677**
Extrait d'une lettre de M. de la Hire, touchant le Problème contenu dans la Méthode Géometrique de M. Halley, pour trouver les aphelies, les excentricitez et la proportion des Orbes des Planetes principales; *Journal des sçavants*; p. 93

**1680**
Maniere universelle pour faire des Cadrans Solaires; *Journal des sçavants*; p. 191

**1682**
*La gnomonique, ou méthodes universelles pour tracer des horloges solaires ou cadrans sur toutes sortes de surfaces*.; Paris

**1700**
Méthode generale pour les jets des Bombes dans toutes sortes de cas proposés avec un instrument universel qui sert à cet usage; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 24. juillet, p. 199

**1701**
Construction d'un nouvel astrolabe universel; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 3. decembre, p. 257

**1702**
Remarques sur la forme de quelques Arcs dont on se sert dans l'Architecture*; Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 24. mars, p. 100

**1707**
Quadratures de superficies Cylindriques sur des bases Paraboliques, Elliptiques et Hyperboliques; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 20. juillet, p. 330

**1708**
Méthode pour décrire de grands arcs des Sections coniques, sans avoir leur centre ni la grandeur d'aucun diametre; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 4. aout, p. 289

### Les autres travaux mathématiques

**1676**
*De cycloide lemma*, Paris

**1679**
*Les lieux géometriques*; Paris

**1679**
*La construction ou effection des équations*; Paris

**1692**
Nouvelle méthode pour démontrer le rapport de la superficie de la Sphère avec la superficie de son plus grand cercle, et avec la superficie du cylindre qui a pour base ce même cercle; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; Tome 10, p. 104

**1694**
Traité des épicycloïdes*; Mémoires de mathématique et de physique*; Paris

**1700**
Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant données, trouver la superficie ou l'aire; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 6. mars, p. 74

**1704**
Description d'un lieu geometrique où sont les sommets des angles égaux formés par deux Touchantes d'une Cyloïde; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 26. juillet, p. 209

**1704**
Remarques sur les nombres quarrés, cubiques, quarré-quarrés, quarré-cubiques et des autres degrés à l'infini; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 358

**1705**
Nouvelle Construction et consideration sur les Quarrés Magiques, avec les Démonstrations.; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 13. juin, p. 127

**1705**
Construction des Quarrés Magiques, dont la Racine est un nombre pair; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 364

**1706**
Traité des Roulettes, où on démontre la manière universelle de trouver leurs Touchantes, leur points de recourbement, ou d'inflexion etc.; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 11. juillet, p. 340

**1707**
Quadratures de superficies Cylindriques sur des bases Paraboliques, Elliptiques et Hyperboliques; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 20. juillet, p. 330

**1708**
Des Conchoides en géneral; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 10. decembre, p. 32

**1710**
Remarques sur la construction des Lieux Geometriques et des Equations; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 7. decembre, p. 7

**1710**
Méthode générale pour la division des arcs de cercle ou des Angles, en autant de parties égales qu'on voudra; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 15. mars, p. 100

**1712**
Remarques sur la geometrie de M. Descartes; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 23. juillet, p. 258

**1713**
Propriétés des trapèzes; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 23. août, p. 222

## Les travaux de physique

**1678**
Demonstration de l'impossibilité du Mouvement perpétuel; *Journal des sçavants*; p. 304;

**1692**
Nouvelles expériences sur l'Aimant; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 10; p.164

**1692**
Expériences sur la réfraction de la Glace; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T 10; p. 252

**1692**
Expérience touchant la régularité du mouvement des Ondes qui se forment dans l'Eau, lorsqu'on y jette quelque chose; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 10; p. 425

**1692**
Descripion de l'Aimant qui s'est trouvé dans le Clocher neuf de Notre-Dame de Chartres; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 10; p.743

**1694**
Explication des principaux effets de la glace et du froid*; Mémoires de mathématique et de physique*, Paris

**1694**
Dissertation des différences des sons de la corde de la trompe marine*; Mémoires de mathématique et de physique*, Paris

**1695**
*Mécanique*; Paris

**1699**
Explication de quelques effets singuliers qui arrivent aux Verres plans, comme sont les Glaces de Miroir; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 75

**1699**
Examen de la Force de l'Homme pour mouvoir des Fardeaux, tant en levant, en portant qu'en tirant ...; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 153

**1701**
Remarques sur la Mesure & sur la Pesanteur de l'Eau; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 170

**1702**
Examen de la ligne courbe, formée par un rayon de la lumiere qui traverse l'Atmosphere; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 25. février, p. 52

**1702**
Suite de l'examen de la ligne courbe, formée par un rayon de la lumière qui traverse l'Atmosphère; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 5. août, p. 188

**1702**
Examen de la Force nécessaire pour faire mouvoir le Bateaux, tant dans l'Eau dormante que courante ...; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 261

**1708**
Experiences & Remarques sur la dilatation de l'Air par l'Eau bouillante; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 264

**1709**
Explication de quelques Faits d'Optique & de la maniere dont se fait la Vision; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 95

**1711**
De la mesure des degres de force de la pénombre des Corps, & de quelques uns de ses effets particuliers; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 5. aout, p. 157;

**1713**
Sur la Hauteur de L'Atmosphère; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 54

**1714**
Remarques sur la Chute des Corps dans l'Air; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 333

**1716**
Experiences sur le son; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 262

**1716**
Continuation d'Expériences sur le Son; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 264

**1717**
Remarques sur l'Aimant; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 275

### Les outils et procedés d'observation, machines etc.

**1687**
*Lettre de M. de La Hire, ... sur une nouvelle forme de boussole*; Paris

**1687**
*Réponse de M. de La Hire à l'article de "la République des lettres", où il est parlé de sa nouvelle boussole*; Paris

**1692**
Extrait d'une Lettre de M. de La Hire, sur une nouvelle invention d'Horloges à Sable pour les voyages de Mer; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 10; p. 672

**1692**
Reflexions sur la Machine qui consume la fumée inventée par M. Dalesme; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; t. 10; p. 692

**1689**
*Trouver la correction des observations correspondantes devant et après midi, pour déterminer le vray midi*; Paris

**1699**
Moien d'empecher que l'Humidité de l'Air de la nuit ne s'attache aux Objectifs des grandes Lunettes; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 91

**1699**
Méthode pour centrer les Verres des Lunettes d'Approche en les travaillant; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 139

**1700**
Remarques sur la construction des horloges à pendule; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 22. mai, p. 161

**1701**
Méthode génerale pour trouver la difference en déclinaison & en Ascension droite de deux Astres qui sont peu éloignés l'un de l'autre en se servant du Micrometre ordinaire; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 101

**1701**
Construction & Usage d'un nouveau Réticule pour les Observations des Eclipses de Solail & de Lune, & pour servir de Micrometre; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 119

**1703**
Remarques sur les inégalités du mouvement des Horloges à Pendules; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 285

**1703**
Moien pour monter un grand Vaisseau sur la Calle, telle qu'elle est construite dans le Port de Toulon, sans se servir d'aucunes Machines; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 299

**1704**
Description & usage d'un Niveau d'une nouvelle construction; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 251

**1707**
Machine pour retenir la roue qui sert à élever le Mouton pour battre le Pilotis dans la construction des Ponts ...; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 188

**1707**
Nouvelle Construction des Pertuis; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 549

**1715**
Méthode pour se servir des grands Verres de Lunette sans Tuyau pendant la nuit; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 4

**1715**
Sur le pendule à secondes; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 130

**1716**
De la construction des Boussoles dont on se sert pour observer la déclinaison de l'Aiguille Aimantée; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 6

**1717**
Construction d'un micromètre universel pour toutes les Eclipses de Soleil & se Lune, & pour l'Observation des Angles; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 57

**1717**
Construction d'une Horloge qui marque le Tems vrai avec le moien; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 238

## Astronomie

Dans *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences* nous trouvons plusieurs dizaines de mémoires de La Hire dans lesquels il parle de ses observations astronomiques et météorologiques faites à l'Observatoire de Paris. Nous ne donnons pas ces mémoires dans notre bibliographie.

**1680**
*Observations astronomiques faites en France les années 1680, 1681, 1682; Voyage d'Uranibourg, ou Observations astronomiques ..., par Picard, Jean*; Paris

**1687**
*Tabularum astronomicarum pars prior, de motibus solis et lunae, ...;* Paris

**1689**
*Machina ad eclipses notandas, composita a Domino de La Hire, ...;* Paris

**1692**
Observations astronomiques faites à Brest & à Nantes en 1679; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 7, p. 377;

**1692**
Observations astronomiques faites à Bayonne, Bordeaux & Royan en 1680; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 7, p. 391

**1692**
Observations astronomiques faites aux Côtes Septentrionales de France pendant l'année 1681; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 7, p. 399

**1692**
Observations astronomiques faites Provence & à Lyon en 1682; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 7, p. 413

**1692**
Reflexions sur les Observations Astronomiques faites aux Indes par le PP. de la Compagnie de Jesus; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 7, p. 643

**1692**
Remarques sur le sentiment de M.Vossius touchant les Longitudes; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 7, p. 711

**1702**
*Les constellations Celestes, avec les Etoiles qui y sont comprises, divisées en deux Planisphères*; Paris

**1702**
*Tabulae astronomicae Ludovici Magni jussu et munificentia exratae et in lucem editae etc.*; Paris

**1704**
Description et explication des globes qui sont placés dans les pavillons du château de Marly; Paris

**1706**
Réflexions sur les apparences du Corps de la Lune; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 107

**1716**
Explication de l'Anneau Lumineux qui paroit autour du Disque de la Lune dans les Eclipses de Soleil qui sont totales; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 161

### Mémoires de biologie

**[La Hire, Ph. de - Sedileau 1692]**
Description d'un Insecte qui s'attache à quelques Plantes étrangères, & principalement aux Orangers; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T.10; p. 10

**1692**
Description d'un Tronc de Palmier pétrifié, & quelques réflexions sur cette pétrification; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 10; p.140

**1692**
Expériences servant d'éclaircissement à l'élévation du suc nourricier dans les Plantes; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T 10; p. 317

**1692**
Description d'un Insecte qui s'attache aux Mouches; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T 10; p. 425

**1692**
Nouvelle découverte des yeux de la Mouche, & des autres Insectes volants, faite à la faveur du Microscope; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 10; p. 609

**1692**
Dissertation sur la conformation de l'Oeil; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 10; p.680

**1694**
Traité des différens accidens de la Vue*; Mémoires de mathématique et de physique*, Paris

**1704**
Nouvelles Remarques sur les Insectes des Orangers; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 45

**1706**
Remarques & Réflexions sur la nature des Cataractes qui se forment dans l'Oeil; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 20

**1708**
Explication Physique de la direction verticale & naturelle des Tiges des Plantes & des Branches des Arbres, & leurs Racine; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 231

**1710**
Observation sur une espece de Tale qu'on trouve communément proche de Paris, au dessus des Bancs de Pierre de Platre; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 341

## Varia

**1689**
*L'école des arpenteurs, où l'on enseigne toutes les pratiques de géométrie qui sont nécessaires à un arpenteur*; Paris

**1702**
Remarques sur la forme de quelques Arcs dont on se sert dans l'Architecture*; Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 24. mars, p. 100

**1703**
Remarques sur l'Eau de la Pluie, & sur l'origine des Fontaines, avec quelques Particularités sur la construction des Citernes; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 56

**1711**
Remarques sur quelques Couleurs; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 79

**1712**
Sur la construction des voutes dans les edifices; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 27. fevrier, p. 70

**1714**
Comparaison du Pied Antique Romain à celui du Châtelet de Paris, avec quelques Remarques sur d'autres Mesures; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 394

**1717**
Recherches des dates de l'Invention du Micrometre, des Horloges à Pendule, & des Lunettes d'Approche; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; p. 78

**1730**
Traité de la pratique de la Peinture; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; T. 9, p. 630;

## Editions de travaux d'autres auteurs

**[Picard, Jean 1684]**
*Traité du nivellement et abrégé de la mesure de la terre, mis en lumière par M. de La Hire.;* Paris

**[Mariotte, Edme 1686]**
*Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1693]**
*Veterum mathematicorum Athenaei, Apollodori, Philonis, Bitonis, Heronis et aliorum opera*; Paris

**Mémoires 1692, 1693**
*Mémoires de mathématique et de physique*; contenant les travaux de Frénicle et de Roberval, éd. La Hire, Académie des sciences ; Paris

## 1.3 Les travaux sur la vie et l'œuvre Philippe de La Hire

Dans ce chapitre nous voulons donner une liste aussi complète que possible des sources secondaires concernant la vie et l'œuvre de La Hire. Nous allons également en résumer brièvement le contenu, en particulier en ce qui concerne celles qui traitent de la géométrie de La Hire.

De cette manière nous voulons, premièrement, présenter une bibliographie secondaire structurée et commentée pour permettre au lecteur de trouver des informations supplémentaires sur Philippe de La Hire.[57]

Deuxièmement, nous voulons résumer les recherches accomplies jusqu'à maintenant afin de délimiter les points de départ de notre recherche et de montrer dans quelle mesure elle est originale.

Les articles et livres qui mentionnent Philippe de la Hire sont assez nombreux. En effet son nom est cité dans la plupart des manuels et monographies d'histoire des sciences en général et d'histoire des mathématiques, astronomie ou mécanique en particulier. Nous ne donnons pas la liste de ces travaux, car ils sont trop nombreux et n'apportent pas d'informations suffisamment approfondies. Nous nous contentons de résumer une certaine "opinion commune" qu'ils donnent de la personne de La Hire.

Par contre, nous développerons davantage les références des ouvrages qui décrivent plus en détail certains aspects de la vie ou de la création de La Hire. Ils diffèrent énormément l'un de l'autre au niveau de leur originalité, de leur étendue et de leur qualité.

Nous divisons ces livres et articles en trois groupes. Il s'agit premièrement des sources et descriptions biographiques et bibliographiques, ensuite des travaux concernant les aspects mathématiques de l'œuvre de La Hire et enfin des travaux qui présentent ses autres activités comme l'astronomie, la mécanique, les activités artistiques etc. Cette division, certes, n'est pas toujours très nette,[58] mais permet de donner une idée de l'ensemble de la littérature secondaire concernant La Hire.

[57] Voir la bibliographie à la fin de ce chapitre au paragraphe 1.3.6.
[58] Ainsi certains ouvrages pourraient appartenir à plusieurs sections.

### 1.3.1 "Opinion commune" de l'œuvre de La Hire

Comme pour d'autres savants de l'histoire des mathématiques, il s'est crée une certaine "opinion commune" sur Philippe de La Hire. Par ce terme nous entendons l'ensemble des jugements présentés dans divers manuels d'histoire des sciences. Il est clair que, vu le caractère général de ces manuels, ces opinions sont répétées d'une manière assez peu critique.

Les mathématiciens et historiens des sciences, ont habituellement certaines connaissances sur La Hire. Le plus souvent ces connaissances sont justement dues aux manuels et concernent des points particuliers de l'œuvre de La Hire. De plus, il y a plusieurs théorèmes qui portent le nom de Philippe de La Hire et qui sont parfois enseignés au lycée. Il s'agit notamment du théorème selon lequel, si nous glissons un segment sur les lignes droites formant un angle, alors le centre du segment décrit une ellipse.[59] L'autre théorème qui porte le nom de La Hire, est celui selon lequel, si nous roulons un cercle à l'intérieur d'un autre cercle au diamètre double, alors n'importe quel point du cercle décrit un segment et un point en dehors de ce cercle décrit une ellipse.[60]

D'une manière sommaire nous pouvons résumer "l'opinion commune" sur La Hire comme suit:

Il fut l'un des premiers académiciens. Le champ de ses intérêts a été très varié. Il faisait beaucoup d'observations astronomiques et a composé des tables astronomiques. Son père était peintre, et lui même était un bon dessinateur. Comme géomètre, il était élève de Desargues et sa méthode pour les sections coniques est essentiellement celle de Desargues. Il s'intéressait aussi aux méthodes cartésiennes. Son mérite principal consiste dans le fait qu'il a fait connaître la méthode projective de Desargues. Ses apports originaux sont assez réduits: un certain nombre de propriétés nouvelles dont celles qui concernent la relation pôle-polaire.[61]

Il n'est pas difficile de voir les origines de ces opinions et jugements sur le travail de La Hire. Sans entrer dans les détails qui seraient inutiles pour nos objectifs nous pouvons

[59] Ce theorème a été démontré déjà par Mydorge [Mydorge, C. 1631-39].
[60] Ce théorème est appelé aussi "couple de Tusi", car il se trouve déjà dans l'œuvre de Nasir al-Din al-Tusi voir [Rashed, R. – Morelon, R. 1997], tome I. Pour l'ensemble de l'oeuvre mathématique de al-Tusi voir [Rashed 1986].
[61] Voir par exemple les manuels suivants: [Bourbaki, N. 1984], [Boyer, C.B. 1989], [Loria, G. 1929], [CEHPMS 1994], [Kline, M. 1972].

dire qu'elles se basent, dans un premier temps, essentiellement sur l'éloge de Fontenelle pour ce qui concerne les donnés biographiques et la carrière scientifique, sur l'opinion des géomètres du début du XIX siècle et notamment sur Chasles[62] pour ce qui concerne la géométrie de La Hire et sur l'ouvrage de Delambre [Delambre, J.B. 1821] pour son astronomie; dans un deuxième temps sur un remaniement de ces sources, enrichies de recherches personnelles, présenté par René Taton en diverses occasions.[63]

### 1.3.2 **Les sources et présentations biographiques et bibliographiques**

Nous avons donné, au chapitre 1.1, une synthèse tirée des sources concernant la vie de Philippe de La Hire. Au chapitre 2.1 nous avons présenté une vue d'ensemble des œuvres de La Hire. Pour cette raison nous n'entrerons pas dans les détails pour ce qui concerne les sources biographiques et bibliographiques concernant La Hire. Nous nous limiterons à commenter la bibliographie que nous avons insérée à la fin de ce chapitre au paragraphe 1.3.6.

#### Les sources anciennes

Parmi les écrits antérieurs à 1800 qui donnent les éléments biographiques et bibliographiques sur La Hire nous devons mentionner surtout l'éloge de Fontenelle [Fontenelle, B. 1719], la table des mémoires de La Hire [Godin, M. 1729-1734], et quelques précisions dans [Goujet, C.P. 1758].

#### Les notices dans les dictionnaires

Diverses notices sur La Hire ont été rédigées dans les dictionnaires biographiques tels que [BU 1861], [DCBH 1872], [DB 1958], [NBG 1859]. Elles se basent essentiellement sur les sources citées plus haut. Nous recommandons au lecteur surtout la notice de René Taton dans [DSB 1970-90] qui présente la synthèse de toutes les sources et notices citées.

#### Les sources récentes complémentaires

Récemment ont paru plusieurs publications dans lesquelles on peut trouver des informations complémentaires sur La Hire. Il s'agit notamment de [Rosenberg, P. - Thuillier, J.

[62] Voir plus loin.
[63] Voir la bibliographie pour les articles de René Taton ainsi que notre analyse de ces ouvrages plus loin.

1988] et [Ponault, M. 1994] où les auteurs présentent et analysent les peintures de Laurent de La Hyre et de [Sturdy, D.J. 1995] et de [Brian, E. - Demeulenaere-Dauyère, C. 1996] où on traite de Philippe de La Hire dans le contexte de l'Académie des sciences.

### 1.3.3 Les présentations et analyses des écrits mathématiques de La Hire

Parmi les auteurs qui se sont intéressés à certains aspects des écrits mathématiques[64] de La Hire, citons d'abord l'excellent *Aperçu historique* de Michel Chasles [Chasles, M. 1837]. Dans cet ouvrage bien connu, Michel Chasles parle plusieurs fois de Philippe de la Hire. Il lui consacre les pages 118-130 dans un récit continu et y ajoute quelques remarques à diverses occasions et donc lui prête une attention assez soutenue, vu la généralité de son *Aperçu*. Cette attention est due à sa proximité mathématique avec La Hire.

Aux pages 69, 87, 161 et 553 il mentionne l'ouvrage de La Hire sur les épicycloïdes *Traité des épicycloïdes* [La Hire, Ph. de 1694] sans parler du contenu de cet ouvrage. Il cite néanmoins la préface, où La Hire nous apprend, qu'il a fait au château de Beaulieu, près de Paris, une roue à dents épicycloïdales, à la place d'une semblable qui y avait été autrefois construite par Desargues.

Le deuxième point auquel Chasles s'intéresse est la transformation du cercle en une conique présentée dans les *Planiconiques*, qui suivent la *Nouvelle méthode* de 1673. Chasles en parle aux pages 90, 195, 346 et surtout 128-133. Tout d'abord, il constate que les *Planiconiques* sont très rares et qu'elles méritent une description plus détaillée. Ensuite il donne en détail la définition de cette transformation et résume brièvement le contenu des Planiconiques. Enfin il rapproche brièvement la méthode de La Hire de la méthode géométrique de Le Poivre et de Newton et il fait allusion aux méthodes de perspective. Il souligne le mérite de cette étude théoriquement correcte de La Hire:

> "De la Hire a le mérite très grand d'avoir le premier conçu l'idée de se servir d'une telle déformation de figure comme méthode de Géométrie rationnelle, pour transporter directement à une courbe les diverses propriétés d'une autre courbe décrite sur le même plan".

[64] Voir la deuxième partie de la bibliographie au paragraphe 1.3.6.

Aux pages 126-127 Chasles parle de *Nouveaux éléments* 1679. Il se borne à présenter de quelle manière La Hire définit les sections coniques en se servant des foyers pour l'ellipse et l'hyperbole et du foyer et la directrice pour la parabole. Chasles remarque ensuite que dans son traité sur la construction des équations[65] qui est attaché aux *Nouveaux éléments*, La Hire donne la construction, en n'employant que la ligne droite et le cercle, du problème qui consiste à mener une normale par un point pris au dehors de la courbe, ce qui

> "suffisait pour prouver toute sagacité de La Hire dans l'analyse de Descartes".

Komentář [ZŠ1]:

Aux pages 118-125 Chasles présente (et il y revient en plusieurs autres endroits) le traité le plus étendu - *Sectiones conicae*. Il nous apprend que, tout en suivant la méthode synthétique, il s'écarte pourtant essentiellement du procédé des anciens. La différence consiste essentiellement dans le fait que La Hire étudie d'abord les propriétés du cercle, particulièrement celles qui tiennent à la division harmonique, et ensuite il en fait usage pour découvrir et démontrer dans les sections du cône les propriétés analogues. Comme Chasles le dit,

> "cette méthode eut cela de remarquable alors qu'elle ne faisait point usage du triangle par l'axe, et qu'elle s'appliquait indistinctement à toutes les sections de cône"

Ensuite Chasles présente très brièvement la démarche de La Hire, en soulignant les théorèmes II.24, 27, 23, 26, 30 qui sont déduits directement des lemmes du premier livre et qui à leur tour servent de base à toute la suite des *Sectiones conicae*.

> "Ainsi cette proposition joue dans le grand traité de La Hire le même rôle que la proposition du latus rectum dans Apollonius, que le théorème de l'involution de six points dans le *Brouillon project des Coniques* de Desargues et que l'hexagramme mystique dans l'ouvrage de Pascal."

[65] *La construction ou effection des équations*, 1679

Ensuite il cite les propositions VIII 26, 27 et 28 comme particulièrement remarquables et, plus tard, généralisées par Monge.

En somme, nous pouvons dire que Chasles, en excellent mathématicien, voit bien l'importance de divers résultats de La Hire. Par contre, il donne peu d'analyse des méthodes de La Hire, ce qui est compréhensible vu l'étendue de son ouvrage. Plus étonnant est le fait que dans son livre sur la géométrie nous ne trouvons pas une seule figure.

De plus Chasles parle, pour ce qui concerne la géométrie de La Hire, uniquement des *Sectiones conicae*, des *Planiconiques* et des *Nouveaux éléments.* Il ne traite, par exemple, presque pas de la *Nouvelle méthode* et d'*Observations sur les points d'attouchement* qui nous semblent pourtant essentiels pour la compréhension de l'origine de la méthode de La Hire. Il ne parle pas non plus des articles de La Hire.

Il commet également certaines inexactitudes, comme, par exemple, pour les figures des *Planiconiques* qu'il croit être faites dans une projection conique, tandis qu'elles sont faites dans la projection cylindrique.[66] Surprenante est l'erreur de Chasles, qui pensait qu'Apollonius coupait le cône uniquement par les plans perpendiculaires au triangle par l'axe et que La Hire le surpasse par le fait qu'il étudie toutes les sections du cône.[67]

Malgré ces remarques, nous le répétons, l'ouvrage de Chasles nous semble excellent, notamment pour la partie qui traite de la géométrie moderne et il nous semble qu'il n'a pas été encore dépassé. C'est pourquoi nous avons parlé plus longuement de cet ouvrage, qui est en plus à l'origine de presque toutes les autres analyses de la géométrie de La Hire.

Dans [Poudra 1864] nous trouvons l'édition de la copie manuscrite du *Brouillon project* faite par La Hire. Cette copie contient une postface de La Hire que nous citerons plus loin.

Deux articles en allemand ont été publiés sur les travaux de La Hire. [Lehman, R. 1887-88] concerne les *Sectiones conicae* et [Wieleitner, H. 1913] concerne les *Planiconiques.* Les deux articles donnent essentiellement le contenu de ces ouvrages. Si pour le résumé de ces

---

[66] Voir notre analyse dans le chapitre 2.2

[67] Voir [Chasles, M. 1837] page 18 et l'article [Hogendijk, J.P. 1991] qui remarque également cette erreur.

ouvrages ces deux articles peuvent être très utiles, pour ce qui concerne l'analyse des concepts ils ne surpassent pas, à ce qu'il nous semble, celle de Chasles.

En 1945 J.L. Coolidge publie deux livres sur la géométrie et sur les sections coniques en particulier.[68] Notamment dans *A History of the conic sections and quadric surfaces* il consacre un paragraphe à La Hire (p. 40-44). Malheureusement ce livre offre plutôt des notes de lecture qu'un exposé systématique. Pour ce qui concerne la méthode synthétique de La Hire, on voit une influence de Chasles. Coolidge avoue ne pas avoir lu la *Nouvelle méthode*. Ensuite il donne un résumé du contenu de *Sectiones conicae*. Il souligne un certain nombre de propositions, notamment les propositions 23, 26 et 28 du livre VIII qui traitent des foyers. En outre Coolidge mentionne les *Nouveaux éléments* qu'il recommande surtout pour leur facilité et leur apport pédagogique.

De plus Coolidge parle, ainsi que [Boyer, C.B. 1956] de la géométrie analytique de La Hire. Il retient surtout trois points de ses ouvrages *Les lieux géométriques* et *La construction ou effection des équations* publiés en 1679. Premièrement c'est l'allusion que fait La Hire à la possibilité d'élargir l'idée de la géométrie analytique à trois dimensions.[69] Deuxièmement l'équivalence qu'il constate entre les deux "axes". Et troisièmement, son application des méthodes analytiques pour déterminer la normale à une conique.[70] Mais ni Coolidge ni Boyer n'analysent la géométrie cartésienne chez La Hire comme telle.

A la personne de La Hire s'intéressait aussi René Taton. Bien connu est son livre sur Desargues [Taton, R. 1951] où il parle, bien sûr, de Philippe de La Hire sans analyser en détail son travail mathématique. D'un grand intérêt est son article [Taton, R. 1953] où il édite le mémoire *Observations sur les points d'attouchement* de La Hire de 1672. René Taton trouve dans ce mémoire, inconnu jusqu'à alors, l'origine de la méthode de La Hire. De plus, il cite La Hire dans au moins deux de ses articles récapitulatifs sur la géométrie, à savoir [Taton, R.

[68] [Coolidge, J.L. 1945] *History of Geometrical Methods*, [Coolidge, J.L. 1945a] *A History of the conic sections and quadric surfaces*.

[69] La Hire mentionne juste cette possibilité mais ne la développe pas. Voir le paragraphe 1.2.2 pour un bref résumé de la géométrie analytique de La Hire.

[70] Pour ce qui concerne l'application des méthodes analytiques aux sections coniques voir le chapitre 2.4.

1949] et [Taton, R. 1951a]. En somme il voit en La Hire un élève direct de Desargues. Il a également apporté divers détails sur la vie de La Hire.

Les pages 61-78 de l'article [Lanier, D. - Le Goff, J.P. 1989], qui traite des influences de Desargues, sont consacrées à Philippe de La Hire. Aux pages 61-70 l'éloge de Fontenelle est souvent cité et, dans ce contexte, sont presentées la vie et l'oeuvre de Philippe de La Hire. La proximité de La Hire avec Desargues y est soulignée. Aux pages 71-78 plusieurs oeuvres de La Hire concernant les sections coniques sont citées: y sont donnés certaines définitions et certains résultats, sans le détail des démonstrations. Les auteurs sont convaincus d'une influence directe de Desargues sur La Hire pour ce qui concerne sa méthode projective spatiale, car

> " ... La Hire donne dans ce traité une sorte de synthèse des méthodes de Desargues, puisqu'il utilise à la fois la démonstration par le relief, et un cas particulier d'involution, la division harmonique de 4 points sur une droite ..."

A notre avis seule l'utilisation des projections et de le division harmonique n'est pas une preuve suffisante de la dépendance directe de La Hire par rapport à Desargues. Nous analyserons cette question en détail au chapitre 4.4.

Les chercheurs anglais se sont intéressés à La Hire dans deux publications. Dans [Field, J.V. - Gray, J.J. 1987], qui est une excellente présentation de l'œuvre mathématique de Desargues, La Hire est mentionné. D'après les auteurs, sa méthode est trop différente de celle de Desargues et, donc, n'est pas copiée directement. Dans [Field, J.V. 1987] La Hire est présenté non seulement comme mathématicien mais encore comme artiste et fils d'un grand artiste. Sa géométrie est mentionnée dans le contexte de la pratique de la perspective et de l'architecture.

Nous voyons donc que il n'y a pas de livre consacré à La Hire. Bien plus, il n'y a pas un seul article qui analyserait l'œuvre mathématique de La Hire comme telle. La seule exception est représentée par les deux articles mentionnés plus haut,[71] très rares aujourd'hui,

[71] [Lehman, R. 1887-88] et [Wieleitner, H. 1913].

qui résument chacun un ouvrage de La Hire. Ainsi, pour ce qui concerne l'analyse de l'ensemble des mathématiques de La Hire, le meilleur reste toujours l'ouvrage de Chasles complété par les articles de René Taton.

### 1.3.4 La littérature sur d'autres activités scientifiques de La Hire

Vu notre intérêt, qui se limite essentiellement aux mathématiques, nous n'avons pas fait de recherches exhaustives sur les livres et articles portant sur d'autres activités de La Hire. Il semble pourtant que la situation dans ce domaine est aussi très faible.

Dans les publications [Montaiglon A. 1875] et [Lemonnier, H. 1911-15] nous trouvons des sources d'information sur les activités de La Hire dans l'Académie d'architecture. D'une question d'architecture de La Hire traite aussi l'article [Butt, A. - Corradi, M. 1982].

L'œuvre astronomique de La Hire est décrite dans les monographies sur l'histoire de l'astronomie comme [Delambre, J.B. 1821] ou [Bouquet, F. 1925]. La construction d'astrolabe par La Hire est décrite dans [D'Hollander, R. 1999]. De ses tables astronomiques il est, en partie, question dans l'article [Sharma, V.N. 1990].

La mécanique de La Hire est assez brièvement mentionnée dans [Daumas, M. 1964] dans le tome II aux pages 285-286, 540-541. Son travail sur les roues dentées est discuté pour ce qui concerne sa priorité dans le court article bibliographique [Woodsbury, R.S. 1958]. Enfin dans l'article [Daffos-Diogo, H. 1987] est remarqué l'intérêt de La Hire pour les question de l'ergonomie du travail manuel des ouvriers.

### 1.3.5 L'état de la recherche

On peut dire que La Hire est un "connu - inconnu". Son nom est assez connu, diverses particularités de sa vie et de son œuvre sont citées en diverses occasions. Par contre, divers points de son œuvre ont été toujours étudiés dans le cadre de recherches bien plus générales, et son œuvre mathématique n'a jamais fait l'objet d'une étude systématique.

Pour ce qui concerne notre sujet des sections coniques il faut constater ce qui suit:

- Une étude systématique de ce sujet n'a jamais été présentée.
- Diverses questions ont été abordées dans un contexte bien plus général et, le plus souvent, sans une analyse détaillée.

- L'ensemble des travaux de La Hire sur les coniques n'a jamais été considéré.[72]
- L'analyse de M. Chasles dans son *Aperçu* reste, avec le données complémentaires de R. Taton, la plus valable.

Ainsi nous voulons voir en détail les méthodes que La Hire utilise dans son étude des sections coniques. Pour cela nous allons examiner l'ensemble des travaux de La Hire sur les sections coniques et également certains points intéressants pour ce qui concerne les applications des sections coniques qu'il propose. Nous aborderons aussi la question du rapport des méthodes et des résultats de La Hire avec les autres auteurs. Particulièrement important nous semble le rapport de sa méthode à la méthode de Desargues, rapport qui a été souvent évoqué, et aussi le rapport aux méthodes classiques d'Apollonius, qui n'a pas été particulièrement remarqué chez La Hire jusqu'à présent.

[72] Voir la bibliographie à la fin de chapitre 1.2

### 1.3.6 Bibliographie secondaire concernant Philippe de La Hire

#### Biographie

**[Brian, E. - Demeulenaere-Dauyère, C. 1996]**
Brian, E.; Demeulenaere-Dauyère, C.; *Histoire et mémoire de l'Académie des Sciences*; Technique et documentation 1996

**[BU 1861]**
*Biographie universelle*; ed. Michaud; Paris 1861

**[DB 1958]**
*Dictionnaire des biographies*; ed.Grimal, P.; Paris 1958

**[DCBH 1872]**
*Dictionnaire critique de biographie et d'histoire*; pp. 730-731; ed.Jal, A.; Paris 1872

**[DSB 1970-90]**
*Dictionary of scientific biography*; ed.Gillispie, C.H.C.; New York 1970-90

**[Fontenelle, B. 1719]**
Fontenelle, B.; Histoire de l'Accademie Royale des sciences pour l'année 1718; Paris 1719

**[Godin, M. 1729-1734]**
Godin, M.; Table alphabétique des matières contenues dans l'histoire et les mémoires de l'Académie royale des sciences; vol. I-III; 1729-1734

**[Goujet, C.P. 1758]**
Goujet, C.P.; Mémoire Historique et Littéraire sur le Collège Royal de France; Paris 1758

**[Guiffrey, J. 1881-1901]**
Guiffrey, J.; Comptes des bâtiments du roi sous le règne de Louis XIV; Paris 1881-1901

**[NBG 1859]**
*Nouvelle biographie générale*; ed.Hoefer, F.; Paris 1859

**[Nielsen, N. 1953]**
Nielsen, N.; Géomètres français du XVIII siècle; Paris 1953

**[Ponault, M. 1994]**
Ponault, M.; L'Etude de la perspective dans l'Histoire de Saint Etien par Laurent de la Hyre"; in *Actes du colloque Girard Desargues*; Paris 1994

**[Rosenberg, P. - Thuillier, J. 1988]**
Rosenberg, P.; Thuillier, J.; Laurent de La Hyre, 1606-1656, L'homme et l'oeuvre; Genève 1988

**[Sédillot, L.A. 1869]**
Sédillot, L.A.; Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France; in *Bullettino di bibliographia e di storia delle scienze matematiche et fisiche*; 2, pp. 198; 1869

**[Sturdy, D.J. 1995]**
Sturdy, D.J.; Science and social status, the members of the academie des sciences, 1666-1750; The Boydell Press, Woodbridge 1995

**[Wolf, C. 1902]**
Wolf, C.; Histoire de l'Observatoire de Paris; Paris 1902

### Mathématiques

**[Boyer, C.B. 1956]**
Boyer, C.B.; *A History of Analytic Geometry*; New York 1956

**[Cassino, V. 1957]**
Cassino, V.; Sur l'histoire des concepts fondamentaux de la géométrie projective; in *Conferences du Palais de la Découverte*; D, n°50, 8; Paris 1957

**[Chasles, M. 1837]**
Chasles, M.; Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie; Bruxelles 1837

**[Coolidge, J.L. 1945]**
Coolidge, J.L.; *A History of the conic sections and quadric surfaces*; 1945

**[Coolidge, J.L. 1945a]**
Coolidge, J.L.; *History of Geometrical Methods*; 1945

**[Field, J.V. 1987]**
Field, J.V.; *The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*; Oxford University Press, Oxford 1987

**[Field, J.V. - Gray, J.J. 1987]**
Field, J.V.; Gray, J.J.; *The geometrical work of Girard Desargues*; Springer Verlag, New York 1987

**[Köter, E. 1901]**
Köter, E.; *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie*; Leipzig 1901

**[Lanier, D. - Le Goff, J.P. 1989]**
Lanier, D.; Le Goff, J.P.; L'heritage Arguesien; in *Cahiers de la perspective, Mars 89*; 1989

**[Lehman, R. 1887-88]**
Lehman, R.; De La Hire und seine Sectiones Conicae; in *Jahresberichte des königlichen Gymnasiums zu Leipzig*; pp. 1-28; 1887-88

**[Poudra 1864]**
Poudra; Oeuvres de Desargues réunies et analysées; Paris 1864

**[Singal, M.K. 1989]**
Singal, M.K.; Magic figures in ancient Hindu mathematics; in *Mathematical Education*; 5, n° 2, pp.73-77; 1989

**[Taton, R. 1949]**
Taton, R.; La préhistoire de la géométrie moderne; in *Revue d'histoire des sciences*; t. 2, pp.197-224; 1949

**[Taton, R. 1951]**
Taton, R.; *L'oeuvre mathématique de Desargues*; Presse universitaires de France, Paris 1951

**[Taton, R. 1951a]**
Taton, R.; La géométrie projective en France de Dsargues à Poncelet; in *Les conférences du Palais de la Découverte*; 1951

**[Taton, R. 1953]**
Taton, R.; La première oeuvre géométrique de Philippe de La Hire; in *Revue d'histoire des sciences*; 6, p. 93-111; 1953

**[Taton, R. 1978]**
Taton, R.; Initiation de Leibnitz à la géométrie (1672-1676); in *Studia leibnitiana supplementa*; vol. XVII, pp. 103-129; 1978

**[Wieleitner, H. 1913]**
Wieleitner, H.; Über die Plani-Coniques von de la Hire; in *Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik*; 5, pp. 49-55; 1913

## Autres sciences et activités

**[Bouquet, F. 1925]**
Bouquet, F.; *Histoire de l'astronomie*; pp. 381-383; Paris 1925

**[Butt, A. - Corradi, M. 1982]**
Butt, A.; Corradi, M.; The contribution of a 17th century mathematician to an architectural problem: Philippe de la Hire and statics of arches; in *Atti-della-Accademia-di-Scienze-e-lettere*; 38, pp.303-323; 1982

**[D'Hollander, R. 1999]**
D'Hollander, R.; *L'astrolabe - Histoire, théorie et pratique*; 383 p.; Paris 1999

**[Daffos-Diogo, H. 1987]**
Daffos-Diogo, H.; Philippe de La Hire (1640-1718) précurseur de l'ergonomie; in *Histoire des Sciences Médicales*; Vol. 21, No. 2 pp. 37-43; 1987

**[Daumas, M. 1964]**
Daumas, M.; *Histoire générale des techniques*; II, 285-286, 540-541; Paris 1964

**[Delambre, J.B. 1821]**
Delambre, J.B.; *Histoire de l'astronomie moderne*; pp. 661-685; Paris 1821

**[Khan-Ghari, S.A. 1980]**
Khan-Ghari, S.A.; The impact of modern European astronomy on Raja Jai Singh; in *Indian Journal of History of Science*; 15, no° 1, pp. 50-57; 1980

**[Legrand, J.P. - Le Goff, M. 1990]**
Legrand, J.P.; Le Goff, M.; On the climatic changes and the sunspot activity during the XVIIth century; in *Anales Geophysicae*; Vol.8 N 10 pp. 637; 1990

**[Lemonnier, H. 1911-15]**
Procès-verbaux de l'Académie royale d'architecture; II-IV; ed.Lemonnier, H.; Paris 1911-15

**[Montaiglon A. 1875]**
Montaiglon A.; Procès-verbaux de l'Académie royale de peinture et de sculpture, 1648-1792; Paris 1875

**[Sharma, V.N. 1990]**
Sharma, V.N.; Zij-i Muhamad Shahi and the tables of de la Hire; in *Indian Journal of History of Science*; 25, pp.34-44; 1990

**[Woodsbury, R.S. 1958]**
Woodsbury, R.S.; The First Epicycloidal Gear Teeth; in *ISIS*; vol.49 pp. 375-377; 1958

# 2 Méthodes utilisées pour étudier les sections coniques

Comme nous l'avons expliqué dans la préface et au chapitre 1.2, nous voulons dans cette partie présenter et analyser les méthodes utilisées par La Hire pour étudier les sections coniques, ainsi que les notions qui y sont liées.

A trois reprises il étudie les sections coniques dès le début - en donnant leurs définitions de manière variée et en développant leurs propriétés principales à partir de ces définitions par des méthodes différentes. Nous consacrerons les paragraphes 2.1, 2.2 et 2.3 chacun à une de ces méthodes. Pour compléter cette partie, nous ajoutons le chapitre 2.4 sur l'utilisation de la méthode analytique par La Hire. Il ne s'en est jamais servi pour donner une étude systématique des sections coniques mais il l'a utilisée exceptionnellement pour résoudre des problèmes géométriques.

Parce que la méthode projective plane que nous présentons au chapitre 2.2 est, à notre avis, la plus remarquable parmi les méthodes de La Hire, nous avons décidé de présenter le texte des *Planiconiques* avec notre commentaire à la fin du chapitre 2.2.

## 2.1 Méthode projective spatiale

La méthode projective spatiale est celle qui est la plus connue parmi les méthodes de La Hire. En effet c'est bien cette méthode qui est le fondement des *Sectiones conicae,* le livre le plus volumineux de La Hire, qui a été publié en 1685.

Mais cette méthode a été utilisée et présentée par La Hire dans trois autres écrits. Il faut surtout mentionner sa *Nouvelle méthode* de 1673 qui est une espèce de préparation pour les *Sectiones conicae* et qui est moins souvent citée par les historiens des sciences.[73]

Ensuite cette méthode apparaît dans deux mémoires plus courts. Il s'agit de *Observations sur les points d'attouchement* de 1672, où La Hire utilise surtout les méthodes d'Apollonius, mais un "germe" de la méthode projective est utilisé dans la démonstration de la proposition 4.

[73] Voir le chapitre 2.1

Pour la dernière fois cette méthode apparaît dans un mémoire assez tardif de La Hire "Construction generale des lieux où sont les sommets de tous les angles égaux droits, aigus ou obtus, qui sont formés par les touchantes des Sections Coniques" publié en 1704.

Dans notre analyse de cette méthode nous suivrons la *Nouvelle méthode*. Nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe 1.2.1, dans cet ouvrage nous pouvons étudier la méthode projective dans sa forme la plus immédiate et la plus concise. Dans les *Sectiones conicae* La Hire utilise tout à fait les mêmes procédés et les résultats obtenus directement par cette méthode, sont presque les mêmes. Par contre, la présentation est plus soignée[74] et La Hire développe un nombre beaucoup plus important de conséquences.[75]

Ainsi nous présenterons la méthode en suivant l'ordre de la *Nouvelle méthode*. Nous donnerons, cependant, en même temps un certain nombre de figures tirées des propositions correspondantes dans les *Sectiones conicae* pour observer le changement de présentation par La Hire.

Dans un deuxième temps, nous montrerons les origines de cette méthode dans la proposition 4 des *Observations sur les points d'attouchement.*

Ensuite nous présenterons les généralisations que fait La Hire de sa méthode dans les *Sectiones conicae*.

Enfin nous analyserons certains aspects de cette méthode et de sa présentation par La Hire.

Nous repportons à la section 4 l'analyse de la relation qu’il a entre cette méthode et les méthodes analogues d’autres mathématiciens, surtout de Desargues (chapitre 4.4).

### 2.1.1 Principe de la méthode

La Hire nous indique, aussi bien dans sa *Nouvelle méthode* que dans ses *Sectiones conicae,* avec une grande clarté le principe de sa méthode. Par exemple dans la *Nouvelle méthode* il écrit à la page 15:

[74] Nous parlerons plus loin de cet effort rendre la présentation plus compréhensible.
[75] En se basant sur les mêmes resultats obtenus par la méthode projective La Hire multiplie les conséquences qu'il démontre par les méthodes planes classiques.

> "Tout ce qui a esté demontré dans les Lemmes précédens, n'est rien autre chose que les divers accidents de la ligne couppée en 3 parties, harmoniquement, tant à l'égard des lignes qui passant par les points de sa division sont parallèles entr'elles, ou aboutissent en un point, qu'à l'égard du cercle: & tout ce qui suit est une simple application de ces Lemmes, & principalement du 3 du 5 & du 6 dans toutes les sections Coniques & Cylindriques."[76]

L'élément clé de la méthode est donc *ligne coupée en 3 parties harmoniquement* ou simplement *division harmonique*.[77] On démontre d'abord l'invariance de cette division par rapport à la projection. Ensuite on démontre certaines propriétés du cercle formulées en termes de division harmonique. Et comme les sections coniques sont les projections du cercle, les mêmes propriétés seront valables pour les coniques. A partir de ces propriétés toute la théorie des sections coniques est développée.

### 2.1.2 <u>Présentation de la méthode</u>

#### Définition de la division harmonique

La *Nouvelle méthode* commence par la définition de la *division harmonique* d'un segment $AD$. Le segment $AD$ est dit divisé harmoniquement aux points $A, B, C, D$ si la condition suivante est satisfaite (Fig. 2.1.1):

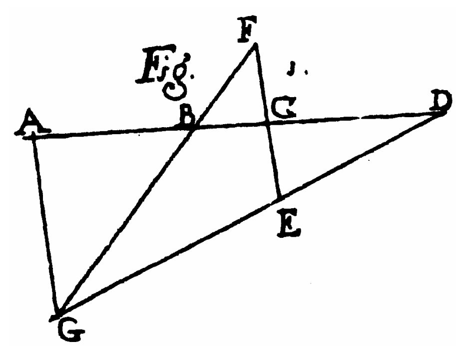



**Fig. 2.1.1**

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} \Leftrightarrow AD \times BC = AB \times CD$$ [78]

Dans la suite nous noterons la division harmonique par $Harm(ABCD)$.

---

[76] Les lemmes 3,5 et 6 montrent l'invariance de la division harmonique par rapport à la projection. Nous trouvons un avertissement semblable à la fin de la proposition 6 du livre II de *Sectiones conicae*.

[77] Il semble que La Hire soi le premier à utiliser ce terme. Voir par exemple la ressource internet: *Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics,* http://members.aol.com/jeff570/.

[78] Nous verrons au paragraphe 2.1.7 la généralisation que fait La Hire en définissant une sorte de birapport de quatre points.

Tout de suite après la définition La Hire donne une construction de la division harmonique (Lemme 1, Fig. 2.1.1). Cette construction n'est pas projective, comme on pourrait l'espérer mais La Hire trouve simplement, les points $A, C, D$ étant donnés, le point $B$ qui satisfait à la condition supra. La même définition et construction est reprise dans les *Sectiones conicae.*[79]

### Invariance projective de la division harmonique

Ensuite La Hire étudie dans les lemmes 1-7 de la *Nouvelle méthode* l'invariance projective de la division harmonique. Cette étude est réalisée par des moyens tout à fait classiques et nous ne présentons donc que les résultats. La Hire distingue plusieurs cas, mais on peut résumer son résultat de la manière suivante (Fig. 2.1.2.) Soit $EH$ un segment divisé harmoniquement aux points $F, G$ et $ME, RF, TG, IH$ des lignes droites passant par les points $E, F, G, H$ concourantes ou parallèles entre elles. Si le lignes $ME, RF, TG, IH$ sont coupées par une ligne droite $p$ en 4 points, alors ces points forment de nouveau une division harmonique. De plus, pour le cas où les lignes $ME, RF, TG, IH$ sont concourantes, si la ligne droite $p$ est parallèle à une de ces lignes, alors les trois autres coupent la ligne $p$ en trois points dont l'un est au milieu des deux autres. Notons que La Hire n'essaie d'aucune manière de faire un rapprochement entre le cas des lignes droites concourantes et le cas des parallèles en considérant les points à l'infini.[80]

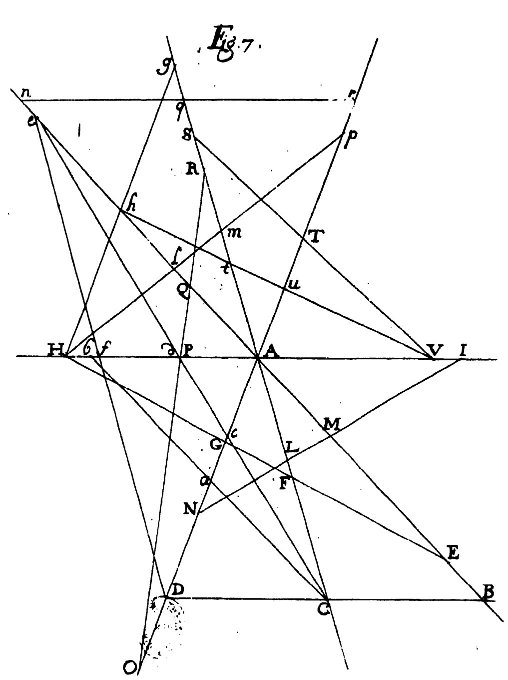


Fig. 2.1.2

[79] Les figures qui accompagnent les lemmes sont pratiquement les mêmes dans la *Nouvelle méthode* et dans les *Sectiones conicae.* C'est pourquoi nous donnons uniquement celles de la *Nouvelle méthode*.
[80] Nous analyserons plus loin cette question au paragraphe 2.1.8.

Il démontre aussi l'inverse de ce théorème. Si nous avons deux segments $BE$ et $BH$ (Fig. 2.1.3 et 2.1.4) qui ont une des extrémités $B$ en commun, et que chacun d'eux est divisé harmoniquement ($Harm(B,C,D,E)$ et $Harm(B,F,L,H)$), alors les lignes droites $CF, DL, EH$ sont, soit concourantes en un point $A$, soit parallèles entre elles.[81]

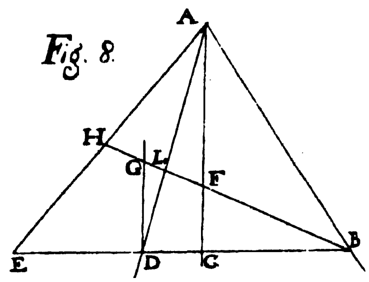


**Fig. 2.1.3**

Dans les *Sectiones conicae* La Hire consacre la deuxième partie du premier livre à l'étude de l'invariance de la division harmonique par rapport à la projection. Sa démarche est identique à celle de la *Nouvelle méthode*. Sur le plan de la présentation il définit tout de suite la notion des lignes droites *harmonicales* et *harmonicales parallèles*[82] ce qui simplifie le langage de ses démonstrations. Par contre, ni dans la *Nouvelle méthode* ni dans les *Sectiones conicae* La Hire n'utilise le mot *projection.*

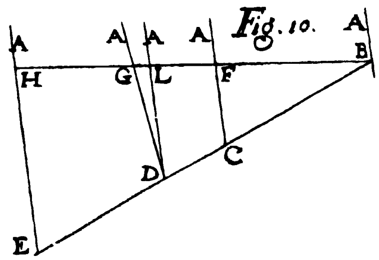


**Fig. 2.1.4**

### Propriétés du cercle exprimées par la division harmonique

Dans les Lemmes 8-16 La Hire étudie les propriétés du cercle par rapport aux lignes droites. Nous pouvons interpréter ses résultats comme la théorie de la correspondance pôle-polaire par rapport au cercle.[83] Nous pouvons énoncer les deux résultats principaux d'une manière concise dans une seule figure (Fig. 2.1.5).

---

[81] Nous rencontrons la division harmonique déjà chez Pappus d'Alexandrie. Dans le livre VII de sa *Collection mathématique* ([Pappus 1982], [Pappus 1986]) il présente des lemmes pour des diverses œuvres des auteurs anciens dont plusieurs sont perdus aujourd'hui. Parmi les lemmes pour le livre des *Porismes* d'Euclide nous trouvons plusieurs propositions qui concernent la division harmonique et même plus généralement le birapport. Par exemple les proposition 131 et 132 du livre VII sont équivalentes au le fait que le birapport est un invariant projectif. Pappus par contre ne parle pas des coniques dans ce contexte.

[82] Il s'agit du faisceau des quatre droites passant par les points de la division harmonique.

[83] Cette interpretation est adoptée par exemple par Chasles dans son *Aperçu*.

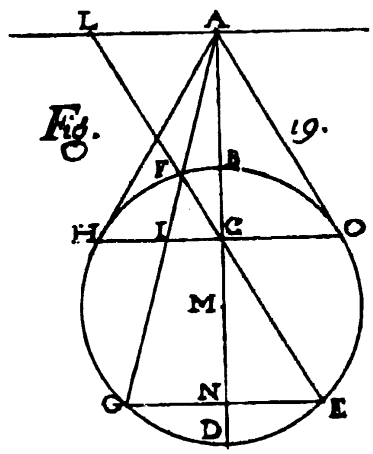


Fig. 2.1.5

Considérons un point A à l'extérieur du cercle, on trace les deux tangentes $AH, OH$, la droite $AM$ joignant le point $A$ et le centre $M$ du cercle, le milieu $C$ de $HO$ et la droite $AL$ perpendiculaire à $AM$. Alors (Lemme 9) si on mène une droite quelconque $AG$ passant par $A$, qui coupe le cercle aux points $F, G$ et la droite $HO$ au point $I$, nous aurons $Harm(AFIG)$.

D'autre part (Lemme 13) si on mène une droite quelconque passant par $C$, qui coupe le cercle aux points $F, E$ et la droite $AL$ au point $L$, alors nous aurons $Harm(LFCE)$. Autrement dit, La Hire étudie la relation entre le point et sa polaire.[84]

Par contre, non seulement il n'utilise pas ces termes, mais même il ne parle pas explicitement d'une correspondance "droite - point". Il se limite à exprimer les diverses propriétés géométriques de la manière que nous avons indiquée plus haut.

Il obtient ces résultats par des méthodes tout à fait élémentaires.[85] A partir de ces deux lemmes il lui est facile de démontrer les résultats que nous pouvons, en termes modernes, résumer comme ceci. Soit un point pris sur une droite, sa polaire va passer par le pôle de la droite et vice versa. Sans avoir une théorie des polaires vraiment exprimée de façon générale, La Hire a tout de même une certaine vision systématique des divers cas.

[84] Ces propostions sont équivalentes aux la propositions VII.154 et VII.161 de la *Collection* de Pappus.
[85] Il invente pourtant une astuce dans la démonstration de *Harm(AFIG)*. Il le démontre d'abord pour le cas où cette droite passe par le centre du cercle, ce qui est très facile (dans la figure 2.1.5 c'est *Harm(ABCD)*. Ensuite pour la position générale de la droite *AG* il imagine une sphère au dessus du cercle et il construit le plan perpendiculaire au plan du cercle et contenant la droite *AG*. Ce plan coupe la sphère dans un petit cercle et la droite *AG* passe par son centre et on retrouve donc le premier cas. Il s'agit d'une utilisation intéressante d'un objet à trois dimensions (la sphère) pour faciliter la démonstration d'une proposition tout à fait plane.

Dans le Lemme 17 La Hire démontre une propriété des tangentes au cercle. Il considère (Fig. 2.1.6) deux points $A, G$ à l'extérieur du cercle dont chacun est sur la polaire de l'autre. Alors chacune des quatre tangentes est divisée harmoniquement aux points d'intersection avec les trois autres tangentes et à son point de contact avec le cercle:

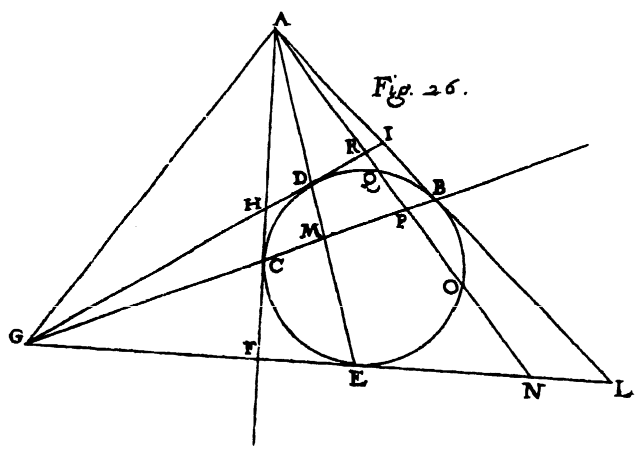



**Fig. 2.1.6**

$Harm(A, H, C, F)$, $Harm(A, I, B, L)$, $Harm(G, F, E, L)$ et $Harm(G, H, D, I)$. La démonstration est faite par la projection des lignes droites $AE$ et $GB$ qui sont divisées harmoniquement ($Harm(A, D, M, E)$ et $Harm(G, C, M, B)$), d'après les lemmes précedents.

### Définition du cône et des coniques

Ensuite La Hire passe, après l'avertissement que nous avons cité plus haut,[86] à une étude des coniques.

Il définit, d'une manière assez standard, le cône, son sommet et sa base. Ensuite il constate qu'une section du cône par un plan par le sommet sera une ou deux lignes droites ou un seul point et que la section par un plan parallèle à la base est un cercle.

Ensuite vient une notion très importante chez La Hire. Il considère un plan sécant et le plan qui lui est parallèle et qui passe par le sommet du cône. Ce qui est important pour déterminer la nature de la courbe, c'est la position mutuelle de l'intersection de ce plan par le sommet avec la base et du cercle de base.

[86] Voir le paragraphe 2.1.1.

Dans la *Nouvelle méthode* ces objets n'ont pas de nom, mais dans les *Sectiones conicae* La Hire appelle le plan par le sommet "le plan vertical" et son intersection avec la base "la ligne directrice".

D'après la position de la directrice et du cercle, La Hire définit la section comme étant "parabole" si la directrice touche le cercle, "hyperbole" si elle le coupe et "ellipse" si elle ne le rencontre pas.[87]

### Préparation de l'étude spatiale

La Hire juge nécessaire, avant d'étudier les coniques dans l'espace, d'aider l'imagination du lecteur par plusieurs considérations spatiales (Lemmes 18-20).

D'abord il constate (Fig. 2.1.7) que si nous avons deux plans $ABD$ et $ACD$ qui contiennent tous les deux les points $A, D$, alors leur intersection sera la ligne droite $AD$.

Si ces deux plans sont coupés par un troisième plan (Fig. 2.1.8), alors leurs intersections $cd$, $bd$ avec ce plan se couperont au point $d$ qui est l'intersection de la ligne $AD$ avec ce troisième plan.

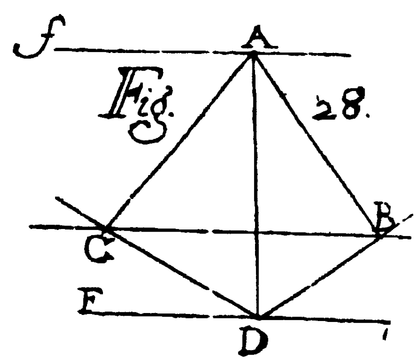



**Fig. 2.1.7**

A ce moment La Hire introduit une des notions fondamentales de sa méthode, la *formation* des objets. Nous citons son avertissement (Fig. 2.1.8):

> "Je dis que la ligne droite $bc$ sur le plan coupant donne ou forme la ligne $BC$ sur un autre plan lors que le plan qui passe par le point $A$ & par la ligne $bc$ coupe cet autre plan en la ligne $BC$. Ou au contraire.
>
> Je dis aussi que le point $b$ donne ou forme le point $B$ sur un autre plan, lorsque la ligne qui passe par le point $A$ et par le point $b$ coupe cet autre plan au point $B$."

[87] Dans ce cas, comme La Hire le remarque, la section peut aussi être un cercle.

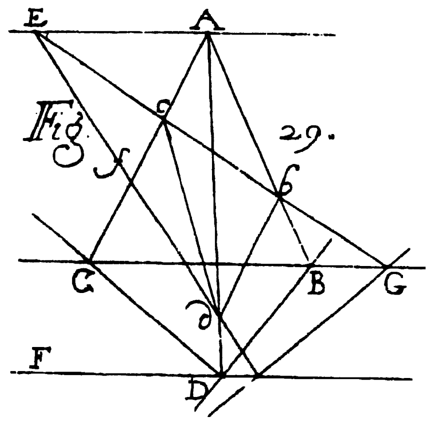



**Fig. 2.1.8**

Il précise son point de vue un peu plus loin dès qu'il traite de la situation dans le cône:

"Il faut remarquer que les Sections sont formées par tous les points qui sont Sections des lignes menées par le sommet & par les points de la circonférence du cercle qui en est la base, avec le plan coupant. Mais lorsque la ligne ainsi menée ne rencontre point le plan coupant, ce point de la circonférence du cercle ne donnera aucun point dans la Section, ce qui arrivera seulement à la parabole en un point & à l'hyperbole & aux sections opposées en deux points comme on peut voir par génération de ces Sections.

Dans l'Ellipse tous les points de la circonference du cercle donnent des points dans la Section.

Dans la Parabole tous les points de la circonference du cercle donnent des points dans la Section hormis le point où le plan par le sommet parallele au plan couppant rencontre le cercle.

Dans les Sections opposées tous les points d'une partie du cercle faite par le plan par le sommet donnent les points d'une Section, & les points de l'autre partie de la circonference du cercle donnent les points de l'autre au plan couppant."

Dans l'optique de La Hire il est également important de constater que les tangentes au cercle de la base forment les tangentes aux sections dans le plan de la section.

Enfin La Hire démontre (Fig. 2.1.9), que si les plans qui ont en commun une ligne droite $AB$ sont coupés par un plan parallèle à $AB$, alors les sections seront les lignes parallèles.

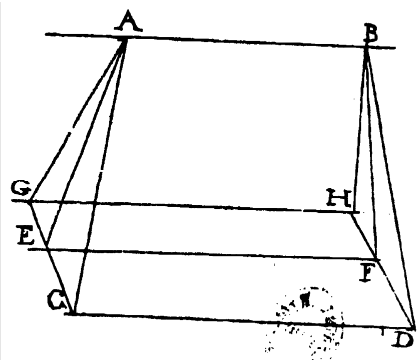



**Fig. 2.1.9**

Dans les *Sectiones conicae* La Hire va encore plus loin dans les lemmes qui doivent préparer l'imagination du lecteur et il ajoute, par rapport à la *Nouvelle méthode*, un paragraphe intitulé "Considérations sur les générations de certaines droites" à la page 18.

La Hire y affirme que

- toute ligne droite harmoniquement divisée ou coupée en deux dans le plan de base, formera dans le plan de section des lignes harmoniquement divisées ou coupées en deux
- les lignes droites dans le plan de la base concourant au point $D$ (Fig. 2.1.10) sur la directrice forment, dans le plan de la section, des parallèles avec $AD$, $A$ étant le sommet du cône.

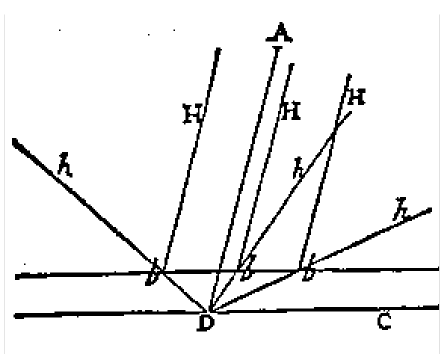



**Fig. 2.1.10**

- deux droites $Dh$ et $Ch$ (Fig. 2.1.11) dans le plan de la base qui se rencontrent au point $h$ et coupent la directrice aux points $D, C$ forment dans le plan de la section deux lignes droites $bH$ et $eH$ qui ont entre elles l'angle $bHe$ égal à l'angle $DAC$.

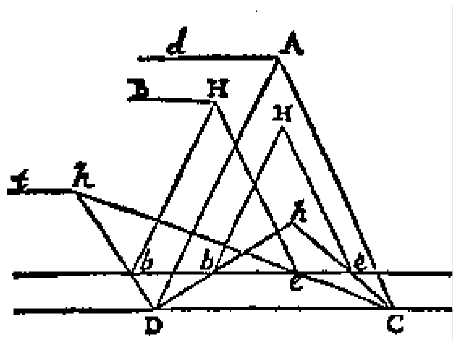


**Fig. 2.1.11**

Les démonstrations de ces faits sont faciles et il faut les regarder en effet comme les outils qui aideront le lecteur à voir la même configuration spatiale dans les figures avec un cône.

### Proposition 1

Tout le passage projectif des propriétés du cercle vers les coniques est, dans la *Nouvelle méthode*, décrit dans la proposition 1. Cette proposition a cinq parties, s'étend sur 22 pages et est accompagnée de 20 figures. La Hire a sans doute voulu, en réunissant toute la démarche dans une seule proposition, insister sur l'unité de la méthode utilisée.

Chacune des cinq parties de cette proposition traite des trois sections coniques. S'il est possible que la propriété soit énoncée et démontrée de la même manière pour les trois courbes, La Hire en use ainsi. Par contre, certaines propriétés sont énoncées différemment pour les trois coniques, essentiellement à cause de la distinction systématique que La Hire fait entre les droites parallèles et les concourantes et du fait que pour lui une division harmonique est strictement distinguée du cas particulier où un des points est à l'infini.

Les asymptotes de l'hyperbole sont étudiées à part, car La Hire ne les considère pas comme des tangentes de l'hyperbole.

### Première partie de la Proposition 1

Regardons d'abord en détail la situation pour la parabole. Nous présentons les deux figures Fig. 2.1.12 et Fig. 2.1.13 qui décrivent la même situation géométrique. La figure 2.1.12 est de la *Nouvelle méthode* et elle est réalisée dans la projection cylindrique sur un plan parallèle avec la base. De cette manière le cercle de la base n'est pas déformé et le cône est vu "du haut".[88]

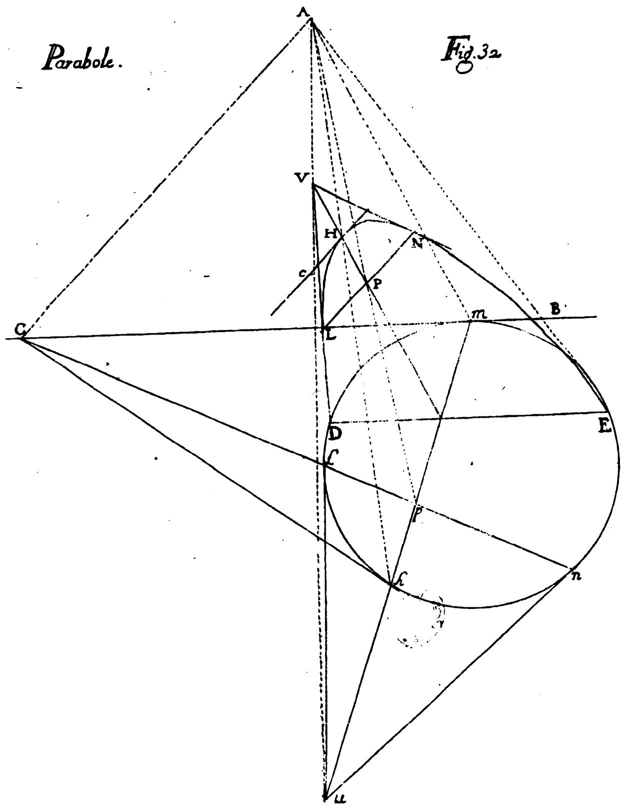



**Fig. 2.1.12**

La figure Fig. 2.1.13 est prise dans les *Sectiones conicae* et elle est faite dans la projection cylindrique et le cône est vu "de côté". Il s'agit d'un cône de base circulaire $EDh$ et de sommet $A$. Ce cône est coupé par le plan $DEH$. Nous menons par le sommet le plan $ACm$ parallèle à $DEH$ et nous supposons que son intersection $Cm$ avec la base (la directrice de la section) touche le cercle. La section $DEH$ est alors une parabole.

Nous prenons un point quelconque $C$ sur la directrice et nous considérons le
$Cn$

faisceau des droites comme ___, qui passent par $C$ et coupent ou touchent le cercle. Une des tangentes est la directrice qui touche le cercle au point $m$. L'autre tangente touche le cercle au

[88] Elle ne peut pas être faite dans une perspective conique parce que les deux lignes droites $LN, cH$ qui sont parallèles restent parallèles sur la figure. Si la figure était en perspective conique, ces deux lignes droites seraient representées par des concourantes.

point

$h$. Nous

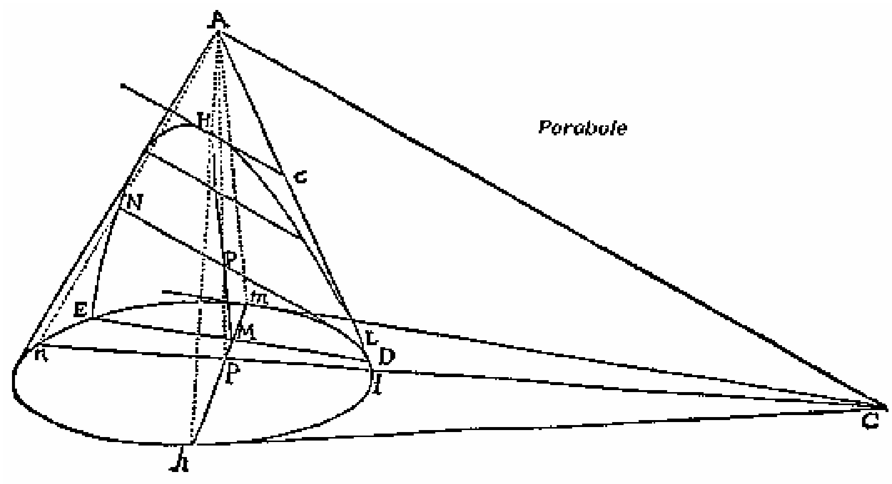



**Fig. 2.1.13**

menons la droite $hm$ qui joint les points de contact. D'après le lemme 9 nous avons $Harm(Clpn)$.

Ensuite La Hire considère les objets qui sont formés dans le plan $DEH$ par les objets de la base. Les concourantes au point $C$ forment les parallèles à la ligne $CA$. La parabole délimite des segments (comme $LN$) sur ces parallèles et ces segments sont divisés en deux parties égales par la ligne droite $HP$ formée par la ligne droite $hm$. La ligne droite $cH$ formée par la tangente au cercle sera tangente de la conique.

La droite $HP$ est alors en diamètre de la parabole, les lignes parallèles à $HL$ qui coupent la parabole sont ses ordonnées. Il est évident que la tangente à l'extrémité $H$ du diamètre est parallèle à ces ordonnées, car elle est formé par $Ch$.

Ensuite La Hire constate, qu'en choisissant une direction des ordonnées nous trouvons toujours un point $C$ sur la directrice tel que ces ordonnées soient formées par les droites concourantes au $C$. Uniquement pour le cas des ordonnées parallèles à la directrice, ces ordonnées sont formées par les parallèles à la directrice dans le plan de la base.[89] Les diamètres sont formés tous par les droites concourantes au point $m$ et donc ils sont tous parallèles entre eux.

[89] Le point $C$ serait à l'infini, mais La Hire ne le dit pas et fait de cette situation un cas à part.

Le cas de l'ellipse est très semblable. La Hire considère, en outre, dès le départ, les deux directions conjuguées des ordonnées simultanément. Pour un point $C$ de la directrice (Fig. 2.1.14 et Fig. 2.1.15) il trouve un autre point $B$ de la directrice qui est sur la polaire $ho$ du point $C$. Ainsi les droites qui passent par $B$ et par $C$ forment, dans le plan de la section, deux faisceaux des parallèles ayant les directions conjuguées.

De plus, il est clair que les parallèles d'un faisceau sont divisées en deux par la droite $LF$[90] formée par la droite $lf$ et les parallèles de l'autre faisceau sont divisées en deux parties égales par la droite $HN$ formée par la droite $hn$.

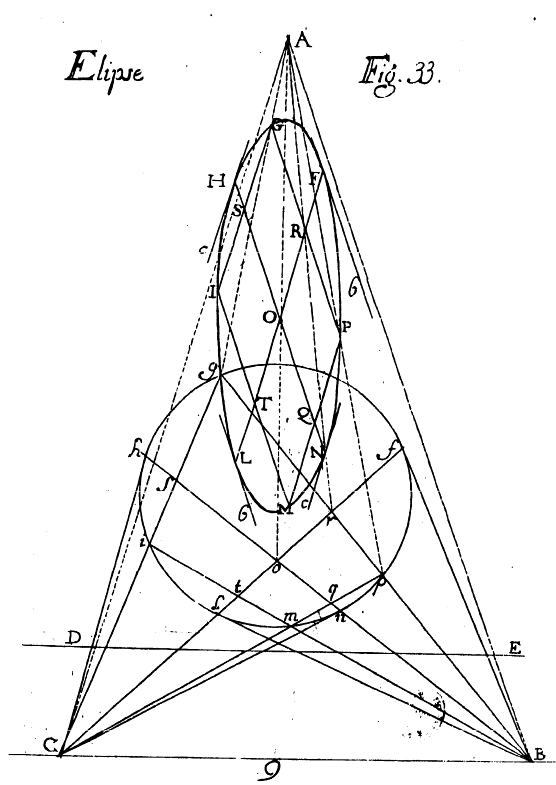



Fig. 2.1.14

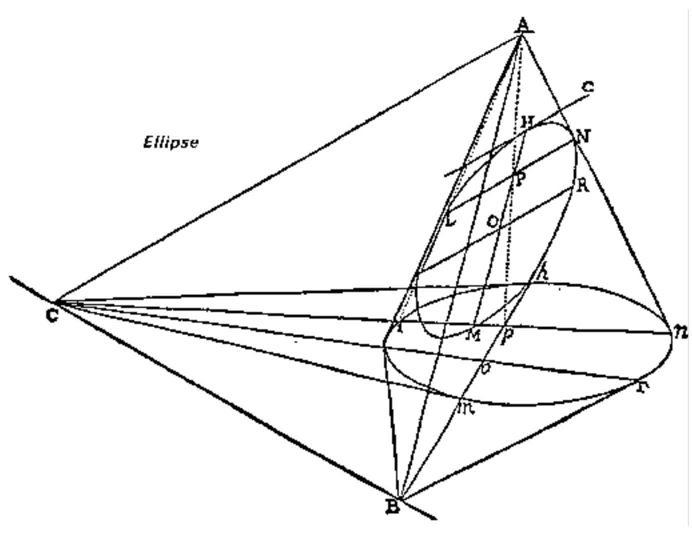



Fig. 2.1.15

Les deux diamètres $LF, HN$ sont formés par les polaires des points $B, C$. Pour n'importe quel point de la directrice comme $C$, sa polaire passe par le point $o$ qui est le

[90] La Hire n'utilise pas les mêmes lettres dans la figure de la *Nouvelle méthode* et les *Sectiones conicae*. Nous allons alors utiliser la figure de la *Nouvelle méthode* (Fig. 2.1.14) en gardant la figure Fig. 2.1.15 tirée des *Sectiones conicae* uniquement comme un complément. La même chose est valable pour les figures 2.1.16 et 2.1.17.

pôle de la directrice. Ce point $o$ forme le centre $O$ de l'ellipse.

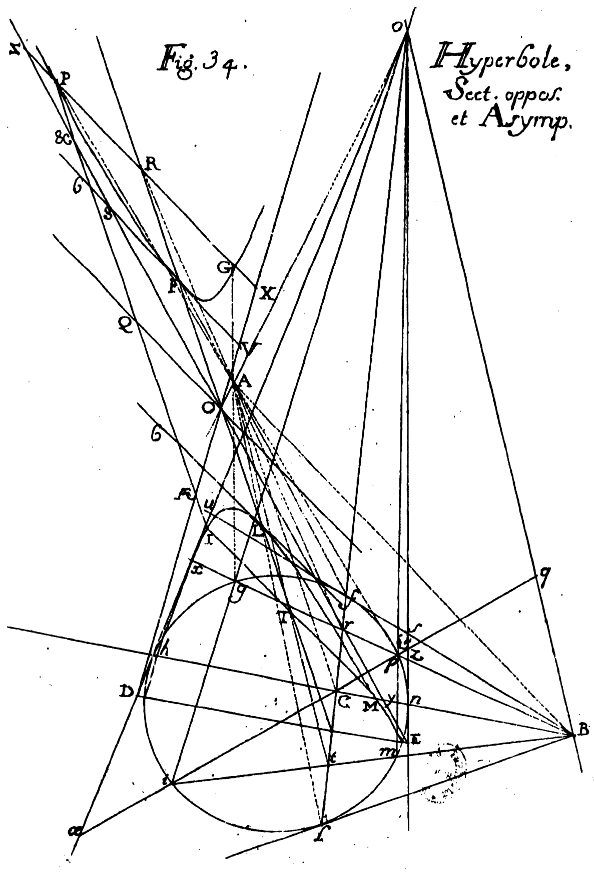



**Fig. 2.1.16**

Le cas de l'hyperbole présente, le principe restant toujours le même, quelques particularités.

La directrice $CB$ (Fig. 2.1.16 et Fig. 2.1.17) coupe le cercle. Les lignes qui concourent au point $B$ sur la directrice à l'extérieur du cercle forment dans le plan de la section les parallèles ($PG, QO, IM$) qui coupent, chacune, au plus, une branche de l'hyperbole. Par contre, les concourantes au point $C$ sur la directrice à l'intérieur du cercle forment les parallèles comme $PI, FL$ qui coupent les deux branches de l'hyperbole.

Bien sûr, les parallèles dans chaque direction sont divisées en deux par un diamètre qui est formé par une ligne droite passant par le point $o$, le pôle de la directrice. Ce point $o$ forme le centre $O$ de l'hyperbole.

Il semble que La Hire fasse une légère différence entre les diamètres qui, comme $FL$, rencontrent la section et sont appelés "diamètres de (chacune) des sections opposées" et les diamètres qui ne rencontrent pas l'hyperbole et sont appelés "diamètre des Sections opposées" et leurs ordonnées sont appelées "ordonnées <u>entre</u> les sections opposées".

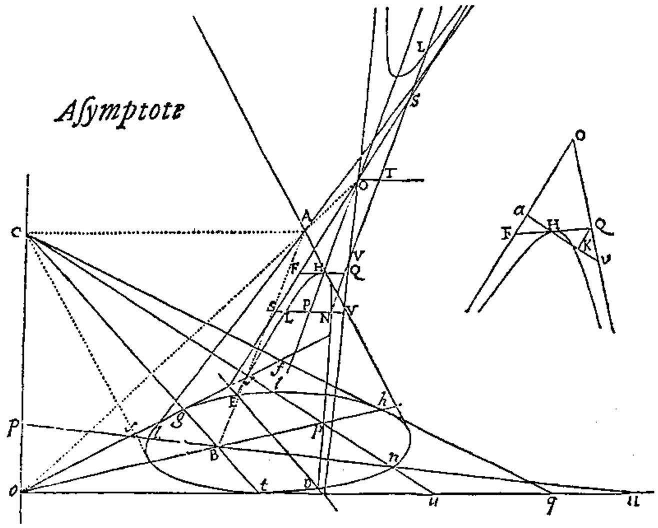



**Fig. 2.1.17**

Le point vraiment intéressant est la définition projective des asymptotes comme les lignes droites formées par les tangentes au points $h, n$ où la directrice coupe le cercle. Deux propriétés sont évidentes tout de suite par projection.

- Une tangente à l'hyperbole comme $SFV$ qui coupe les asymptotes en $S, V$ est divisée en deux par le point de contact $F$. Pour la démonstration il suffit d'utiliser le fait $Harm(ufsB)$ qui est démontré dans le lemme 17.
- Sur une sécante comme $ZX$ qui coupe les asymptotes aux points $Z, X$ et l'hyperbole aux points $P, G$ les deux segments entre l'hyperbole et les asymptotes sont égaux $ZP = GX$. Pour la démonstration La Hire utilise le fait $Harm(xrzB)$ (lemme 17) et $Harm(grpB)$ (lemme 9) et le point $R$ sera donc le centre de $ZX$ et de $PG$. La même chose est valable pour une sécante qui coupe les deux branches de l'hyperbole.

### Les autres parties de la Proposition 1

Les autres parties de cette proposition centrale sont énoncées et démontrées de la même manière pour les trois sections. Nous nous contenterons de les formuler pour la parabole et nous donnerons uniquement les figures de la *Nouvelle méthode* car celles des *Sectiones conicae* sont les mêmes, sauf qu'elles sont faites dans une autre projection.

Dans chacune des parties La Hire démontre les propriétés de la conique en projetant les propriétés du cercle démontrées dans les lemmes. En réalité il ne parle pas des "projections" mais toujours des objets dans la base qui "forment" les objets dans le plan de la section. Ainsi il distingue toujours le cas où les lignes sont parallèles entre elles ou avec la directrice, du cas où elles sont concourantes ou coupent la directrice.

Dans la deuxième partie (Fig. 2.1.12) La Hire démontre que si nous menons deux tangentes aux points $L, N$ de la conique et si elles se coupent au point $V$, alors la ligne droite $VP$ par le milieu du segment $LN$ est un diamètre de la section. Dans la démonstration le lemme 11 est utilisé, qui dit que le pôle $u$ de la ligne $nl$ est sur la ligne $hm$.

Dans la troisième partie (Fig. 2.1.18) La Hire montre que si nous menons n'importe quelle ligne droite $VH$ par le point d'intersection $V$ des tangentes $VL$, $VN$, alors ses intersections avec la parabole et avec le segment $LN$ divisent cette ligne harmoniquement ($Harm(VHPM)$ ou $VH = HP$ s'il a une seule intersection avec la parabole). Dans la démonstration est utilisé le lemme 9 d'après lequel nous avons $Harm(uhpm)$.

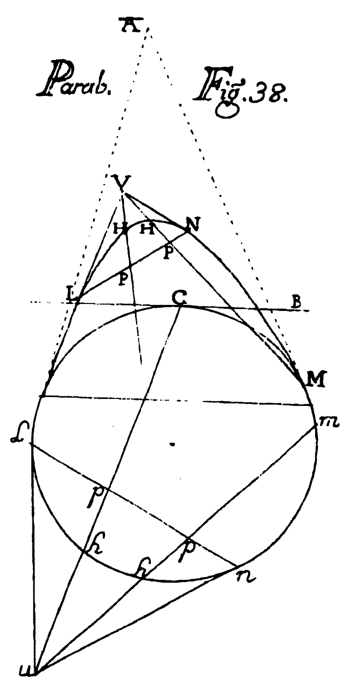



**Fig. 2.1.18**

Dans la quatrième partie, La Hire démontre que si nous menons les tangentes à la conique aux extrémités des segments qui passent par un point $P$ à l'intérieur de la conique, alors les deux tangentes se coupent sur la polaire du point $P$. La démonstration est faite par la projection du même résultat pour le cercle, qui a été obtenu dans le lemme 14.

Dans la cinquième partie (Fig. 2.1.19) on démontre la même propriété pour les segments qui passent par un point $V$ à l'extérieur de la conique et le lemme 16 est appliqué.

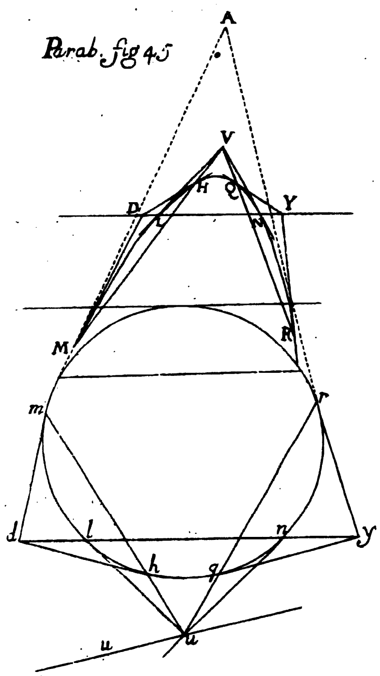



**Fig. 2.1.19**

Enfin dans la sixième partie (2.1.20) La Hire applique le lemme 17 pour démontrer les propriétés des trois tangentes. Dans la situation de la figure on a $Harm(HSTK)$, $Harm(SLRD)$ et $Harm(NRVK)$.

C'est bien cette dernière partie qui a été conçue dans le mémoire de 1672, comme le dit La Hire lui même à cet endroit:

> "Je donnay l'année passée les démonstrations de ces touchantes selon la méthode des anciens avec plusieurs autres particularités sur la pratique."

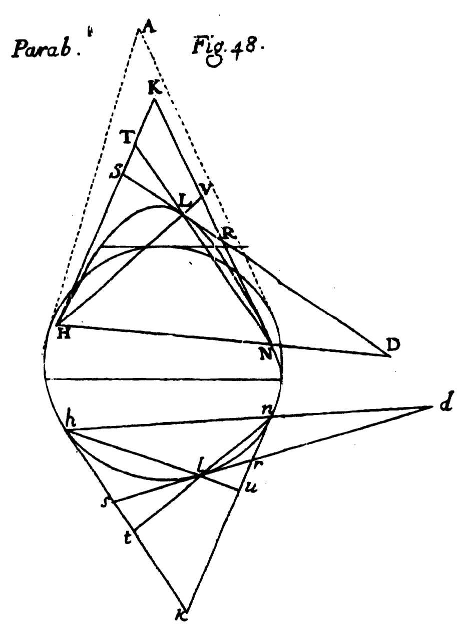



**Fig. 2.1.20**

### 2.1.3 Correspondances entre la Nouvelle méthode et Sectiones conicae

Les résultats contenus dans la proposition 1 de la *Nouvelle méthode* sont démontrés également dans le deuxième livre des *Sectiones conicae*. La différence consiste uniquement dans le changement de la perspective des figures (les objets représentés restant les mêmes) et dans une plus grande précision dans le détail du discours de La Hire. Quelques ajouts par rapport à la proposition 1 de la *Nouvelle méthode* sont tout à fait mineurs.

Nous présentons, dans la table suivante, les correspondances entre la Proposition 1 de la *Nouvelle méthode* et les propositions du deuxième livre des *Sectiones conicae*.

| *Nouvelle méthode* | *Sectiones conicae*<br>propositions du livre II |
|---|---|
| Prop 1, partie 1 | 6,7,8,9,10,11,12 |
| asymptotes | 13 |
| Prop 1, partie 2 | 19 |
| Prop 1, partie 3 | 20,21,22 |
| Prop 1, partie 4 | 23,24 |
| Prop. 1, partie 5 | 26,27,28 |
| Prop. 6 | 29 |

### 2.1.4 Mémoire *Observations sur les points d'attouchement* de 1672

La *Nouvelle méthode* est précédée d'une année par ce mémoire qui est tout à fait essentiel pour comprendre l'origine de la méthode projective de La Hire. Il se propose, dans sept propositions, de résoudre le problème suivant:

> ” Ayant donnés 3 segments formant une ligne brisée et un point sur deux des segments, trouver les diamètres passant par les points de jonction des segments, de la conique qui touche les trois ségments et les deux aux points donnés. En plus déterminer le point d’attouchement sur le troisième segment et le centre de la conique, s’il existe.”[91]

La Hire divise le problème en plusieurs cas, selon que les points sont donnés sur les segments extrêmes ou sur le moyen et un extrême, et selon que les deux extrêmes sont parallèles et que le moyen est parallèle à la ligne joignant les points d’attouchements des extrêmes.

Dans la proposition 1 La Hire montre que, si le troisième point de contact est trouvé alors les diamètres et le centre de la section peuvent être construits déjà facilement. Dans la proposition 2 La Hire se propose de résoudre le cas particulier où la troisième tangente est parallèle à la ligne qui joint les points de contact donnés. Dans la proposition 3 le cas où les deux tangentes sont parallèles. Dans ces trois premières propositions La Hire n'utilise que les propositions des *Coniques* d'Apollonius, qu'il applique presque directement.[92]

Dans la proposition 4 La Hire utilise la méthode projective pour démontrer le cas général. C'est justement cette proposition qui nous intéressera.

Les Propositions 5-7 sont des développements triviaux des propositions précédentes.

La Hire ajoute sur une des planches qui accompagnent son mémoire la note suivante:

> "Ces Propositions comprennent les Demonstrations qui font voir que toutes les Sections des Pyramides qui ont pour Bases des Ellipses, des Hyperboles et des Paraboles sont des Sections coniques; et plusieurs problèmes et

---

[91] Géométriquement considéré, il est maladroit de parler d’une ligne brisée et il serait plus simple et plus général de considérer trois lignes droites avec deux points sur deux d’elles. Mais La Hire est ici influencé dans sa formulation par un problème pratique. Nous reverrons dans la partie 3 cet aspect très important de son travail.

[92] Nous parlerons dans le chapitre 4.1 de la connaissance qu'a eue La Hire de l’œuvre d'Apollonius.

theoremes fort curieux qui avec le temps et l'occasion pourront estre mis au jour."

Alors La Hire annonce sa *Nouvelle méthode* et nous voyons que c'est dans le contexte de son mémoire de 1672 qu'il a mis au point sa méthode. Mais la seule démonstration projective est justement celle de la proposition 4.

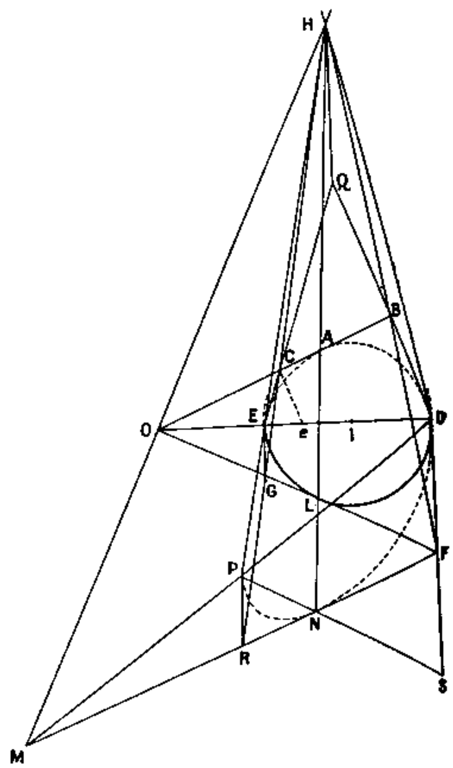



**Fig. 2.1.21**

Dans la proposition 4 (Fig. 2.1.21) on suppose que les trois tangentes sont $BO$, $BD$ et $CE$. Les points de contact $E, D$ sont donnés et il faut trouver le troisième point de contact $A$. La Hire affirme, que le point $A$ est tel que les points $O, C, A, B$ forment une division harmonique.[93]

Pour le démontrer, La Hire construit un cône dont la base est le cercle $ELD$ qui est dans le plan perpendiculaire au plan de la section conique cherchée.[94] Le diamètre du cercle est le segment $ED$. Le sommet $H$ du cône est trouvé de telle sorte que les trois tangentes du cercle $FO, FD, GE$ se projettent sur les trois tangentes proposées pour la conique. Par conséquent la conique qui est coupée du cône par le plan $OBD$ satisfera aux conditions de la proposition et donc le point $A$ sera l'image du point $L$ où la ligne $OF$ touche le cercle.[95]

---

[93] La Hire n'utilise pas encore le terme "division harmonique" qu'il n'introduira que dans la *Nouvelle méthode.* Il exprime la même proprieté en donnant l'égalité des rapports $\frac{OB}{AB} = \frac{CO}{CA}$.

[94] La figure est assez difficile à comprendre, car elle est spatiale sans en avoir l'air. Dans le plan de la section sont les points *O, E, I, D, A, B, C, Q,*. Ensuite nous avons deux plans perpendiculaires au plan de la section: le plan *O, D, F, L, G* qui contient la base circulaire du cône et la plan *M, P, D, R, N, F* qui coupe le cône selon une section conique auxiliaire *PND.* Le sommet du cône est le point *H* qui est de l'autre côté du plan *OBD* et la ligne droite *QH* lui est perpendiculaire.

[95] La Hire ne démontre nulle part qu'on a une seule section conique qui satisfait aux conditions de la proposition.

Maintenant nous arrivons à un point très intéressant. La Hire aurait pu constater que le segment $OF$ est divisé harmoniquement aux points $O, G, L, F$ car les deux tangentes sont parallèles et il peut utiliser la proposition 3, et ensuite démontrer que la division harmonique est un invariant projectif et donc que le segment $O, C, A, B$ est divisé harmoniquement. C'est ce qu'il fait dans la *Nouvelle méthode* comme nous l'avons vu supra.

Mais dans *Sur les points d'attouchement* La Hire procède d'une manière différente. Il coupe le cône par un troisième plan $MDF$ qui est, lui aussi, perpendiculaire au plan $OBD$, mais en plus parallèle à la ligne droite $OB$. De cette manière il obtient la section $PND$ qui a pour tangentes les deux parallèles $PR, DF$ et la ligne $MF$. Les deux points de contact $P, D$ sont connus et nous obtenons alors la situation de la proposition 3 qui concerne le cas où deux des tangentes sont parallèles et qui peut être résolu facilement. Par la Proposition 3 le segment $MF$ est donc divisée harmoniquement aux points $M, R, N, F$. La ligne $OB$ est sa projection et donc divisée harmoniquement aux points correspondants. Cette fois ci le passage projectif est trivial, car les deux lignes $MF, OB$ sont parallèles.

Nous voyons, donc, qu'à ce moment La Hire utilise uniquement l'invariance triviale de la division harmonique par rapport à la projection entre deux lignes parallèles.[96] Ainsi nous voyons un développement de la compréhension de La Hire de l'invariance de la division harmonique.

Nous devons souligner encore un fait. La Hire n'hésite pas à faire des constructions en trois dimensions pour résoudre un problème plan, même s'il s'agit de constructions assez compliquées. De plus, la figure 2.1.21, dans laquelle le cercle de base n'est pas déformé, ressemble aux figures de la *Nouvelle méthode*. Ainsi pour La Hire était importante sa représentation personnelle des objets en trois dimensions.

[96] Ce fait n'a pas été remarqué par René Taton qui a le mérite d'avoir édité ce mémoire [Taton, R. 1953]. Les auteurs de l'article [Lanier, D. - Le Goff, J.P. 1989] commettent même une inexactitude en affirmant que La Hire se sert de la division harmonique de $O, G, L, F$ pour démontrer par projection que $O, C, A, B$ forment une division harmonique – voir [Lanier, D. - Le Goff, J.P. 1989], note 42 à la page 71.

### 2.1.5 Force de la méthode

Les résultats obtenus par la projection sont suffisamment forts pour obtenir toute la théorie des coniques contenue, par exemple, dans les *Coniques* d'Apollonius. Ces résultats sont même obtenus d'une manière beaucoup plus courte.

C'est l'apport principal de la méthode de La Hire. Il ne s'agit pas tellement pour lui d'obtenir de nouveaux résultats mais plutôt de changer l'ordre dans la structure déductive. Les résultats qui sont chez Apollonius des conséquences démontrées assez tard dans son traité, sont chez La Hire démontrés en premier et servent de base de toute la théorie. Cette manière de procéder facilite sensiblement la théorie des sections coniques.

Dans les *Sectiones conicae* La Hire met en lumière la puissance de sa méthode dans son appendice où il cite toutes les propositions d'Apollonius et montre comment elles sont contenues dans les propositions de ses *Sectiones conicae.*

Nous n'allons pas analyser comment La Hire obtient tous les théorèmes mais nous montrerons uniquement comment il démontre le symptôme des trois courbes.

#### Symptôme pour la parabole

Pour la parabole La Hire procède dans la proposition 11 de la *Nouvelle méthode* de la manière suivante. Dans la situation de la figure (Fig. 2.1.22) il suppose qu'on a deux ordonnées $PS, DC$ au diamètre $BC$ et il veut démontrer que $\frac{DC^2}{PS^2} = \frac{BC}{BS}$. D'abord il construit les diamètres aux points $P, D$, les tangentes aux points $D, P, B$ et divers points d'intersection. Par la proposition 1 nous savons que les ordonnées sont parallèles à la tangente à l'extrémité du diamètre correspondant et que la sous-tangente est divisée en deux par son intersection avec la conique. Nous obtenons alors les égalités suivantes.

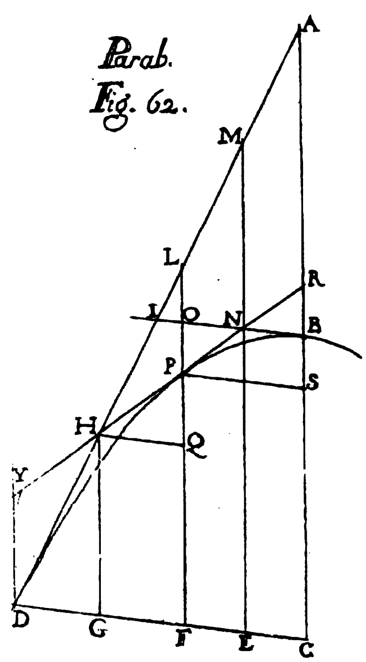



Fig. 2.1.22

$RB = BS = OP$, $PN = NR$, $PH = HY$, $DG = GF$ et

$$FE = EC$$

En utilisant ces égalités et les similitudes des triangles nous obtenons :

$$\frac{DC}{FC} = \frac{DC}{PS} = \frac{GE}{FE} = \frac{HM}{ML} = \frac{HN}{PN} = \frac{QO}{OP}.$$

Ensuite $HM = DI$ car les deux sont égaux au moitié de $DA$ et $HI = ML$ car $HI = DI - DH = HM - HL = LM$. Alors le même rapport est égal au

$$\frac{HM}{ML} = \frac{DI}{HI} = \frac{FO}{QO}.$$

Maintenent nous pouvons déjà calculer

$$\frac{BC}{BS} = \frac{FO}{OP} = \frac{FO}{QO} \cdot \frac{QO}{OP} = \frac{QO^2}{OP^2} = \frac{DC^2}{PS^2}.$$

Nous voyons, donc, que le symptôme est simplement démontré de la seule propriété des tangentes et sous-tangentes.

### Symptôme pour l'ellipse

Pour l'ellipse La Hire procède dans la proposition 13 d'une autre manière qui est tout à fait intéressante. Il suppose une ellipse $BLN$ (Fig. 2.1.23), son diamètre $BN$ et deux ordonnées à ce diamètre $MP, EO$. Il veut démontrer que

$$\frac{MP^2}{EO^2} = \frac{NP \times PB}{NO \times OB}.$$

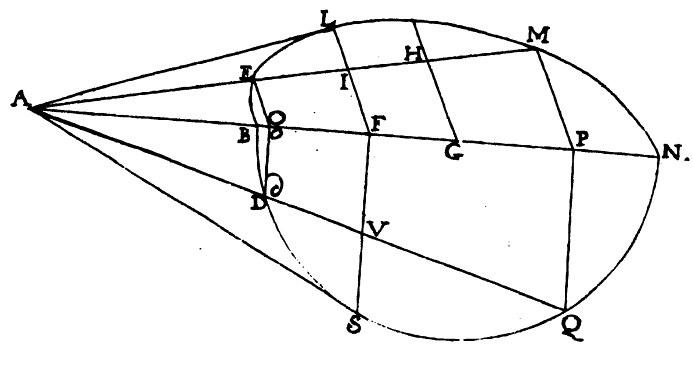



**Fig. 2.1.23**

Dans la démonstration, il joint les points $EM$ et cette droite coupe le diamètre au point

$A$.[97] Menons une tangente à l'ellipse par le point $A$ et par le point de contact $L$ menons l'ordonnée $LF$. Alors, d'après la proposition 1 nous avons $Harm(AEIM)$ et donc $Harm(AOFP)$. En plus, de la propriété de la tangente nous avons $Harm(ABFN)$.

Maintenant La Hire construit un demi-cercle de diamètre $BN$ et par le point $A$ il mène la tangente $AS$ au cercle. La perpendiculaire à $BN$ par le point $S$ doit passer par le point $F$ car c'est la polaire du point $A$ et nous avons $Harm(ABFN)$. Ensuite La Hire mène la perpendiculaire $PQ$ et la ligne droite $AQ$ qui coupe le cercle en un autre point $D$ et la droite $SF$ au point $V$. Par le lemme 9 nous avons $Harm(ADVQ)$ et donc, la droite $OD$ doit être parallèle aux droites $FS, PQ$ et donc perpendiculaire à $BN$.

Dans le cercle nous avons $PQ^2 = NP \times PB$ et $DO^2 = NO \times OB$ et à cause des triangles semblables $\Delta AMP \approx \Delta AEO$ et $\Delta AQP \approx \Delta ADO$ nous obtenons

$$\frac{MP^2}{OE^2} = \frac{AP^2}{AO^2} = \frac{PQ^2}{DO^2} = \frac{NP \times PB}{NO \times OB}.$$

Ainsi la propriété harmonique de la sécante se montre suffisante pour réaliser une correspondance entre le cercle et une ellipse ou en général entre deux sections coniques. Le symptôme pour l'ellipse est ici obtenu à partir de la propriété du cercle.

Soulignons cette intéressante correspondance entre les points du demi-cercle et les points de la demi-ellipse qui évoque une transformation affine.

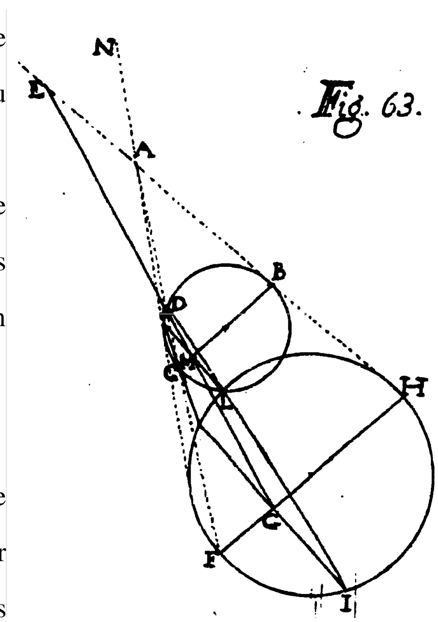


**Fig. 2.1.24**

### Symptôme pour l'hyperbole

Dans le cas de l'hyperbole La Hire donne deux démonstrations différentes du symptôme pour l'hyperbole. Dans la même proposition 13, dans laquelle il démontre le symptôme pour l'ellipse, il le

[97] Le cas où $ME$ est parallèle à $BN$ est resolu à part.

démontre aussi pour l'hyperbole en réalisant une correspondance point par point entre une hyperbole quelconque et une hyperbole choisie coupée d'un cône. Pour cette hyperbole La Hire démontre le symptôme par rapport à l'axe en utilisant les méthodes d'Apollonius (Fig. 2.1.24).[98] Ensuite il démontre cette propriété pour une hyperbole quelconque de la même manière qu'il l'a fait auparavant pour l'ellipse (Fig. 2.1.25).

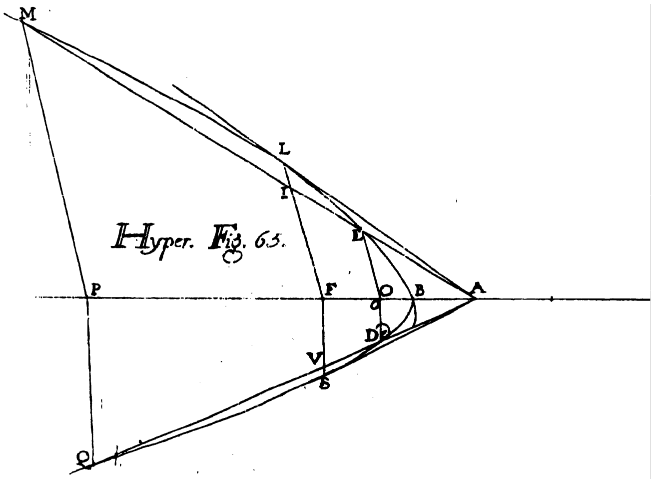



**Fig. 2.1.25**

Mais cette démonstration est précédée par une autre démonstration indépendante dans les propositions 3-8. Dans cette démonstration La Hire se sert des propriétés des asymptotes et procède de la manière suivante.

D'après la proposition 1 nous avons (Fig. 2.1.26) $BC = DE$. Si nous menons aux deux points $C, D$ de l'hyperbole les segments vers deux asymptotes dans les deux directions données nous avons à cause des triangles semblables l'égalité

$$CG \times CH = DF \times DI .$$

Autrement dit, le produit des segments menés d'un point de l'hyperbole vers les asymptotes dans les directions données est constant.

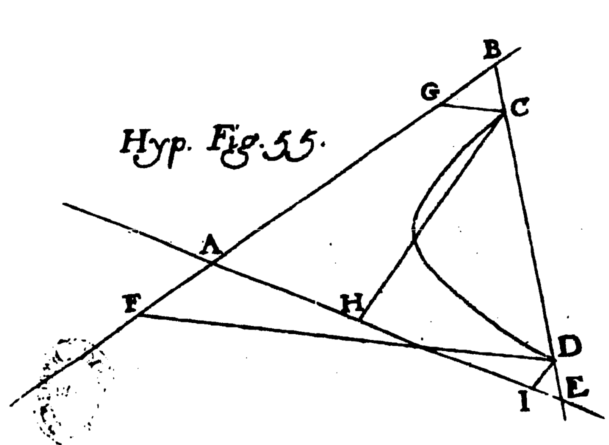



**Fig. 2.1.26**

[98] Un des exemples de combinaison des méthodes classiques avec les méthodes projectives.

Particulièrement pour la tangente (Fig. 2.1.27) nous obtenons $FE \times HE = CD^2$. Si point $G$ est le milieu du segment $HF$, nous avons les triangles semblables $\Delta ADC, \Delta AGE$ et en se servant de cette similitude il facile de démontrer le symptôme de l'hyperbole dans la forme

$$\frac{FG^2}{BG \times GD} = \frac{CD^2}{AD^2}$$

où $A, B$ sont les deux sommets du diamètre $AD$.

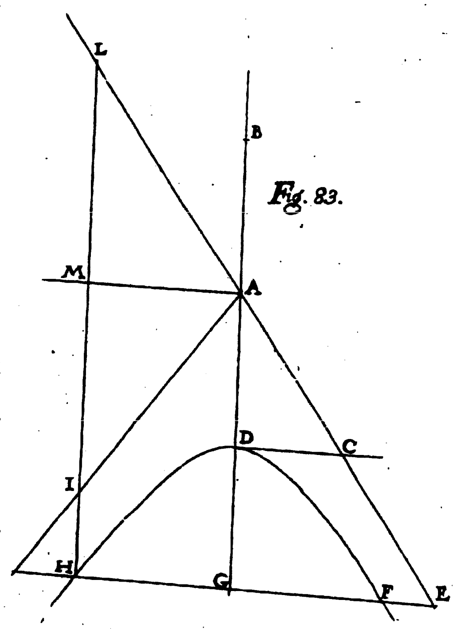


Fig. 2.1.27

Nous voyons, donc, que cette seule propriété des segments qui coupent l'hyperbole et les deux asymptotes, caractérise déjà la courbe. En effet il s'agit d'une espèce de l'équation de l'hyperbole par rapport aux asymptotes.

Cette propriété sera utilisée plus tard par La Hire dans ses *Nouveaux éléments des sections coniques* pour réaliser le passage entre le symptôme par rapport à l'axe et par rapport à un diamètre quelconque.[99]

### 2.1.6 <u>Généralisation aux cônes qui ont pour bases les sections coniques</u>

La Hire, d'une manière très naturelle, généralise sa méthode d'une part aux sections du cylindre qui a pour base un cercle, et d'autre part aux sections des cônes et cylindres qui ont pour bases les sections coniques.

Cette généralisation est uniquement indiquée par La Hire et il n'en élabore pas les détails. Dans la *Nouvelle méthode* il y consacre trois pages et dans les *Sectiones conicae* un appendice de quatre pages.

Cette généralisation consiste dans la constatation que les propriétés que nous avons démontrées pour le cercle dans le lemme ont été démontrées (par projection) pour les coniques. Alors rien ne nous empêche de construire un cône ou cylindre qui a pour base une

[99] Voir le chapitre 2.3.

conique et démontrer les mêmes propriétés (par une deuxième projection) pour les sections de ces cônes et cylindres. Mais ces propriétés sont suffisantes pour démontrer le symptôme de la conique et il s'agira donc de nouveau d'une section conique.

La Hire ne démontre pas qu'un cône qui a pour base une section conique contient une section circulaire et qu'il s'agit donc d'un cône ordinaire.

### 2.1.7 Généralisation de la méthode aux courbes du degré supérieur

La Hire a présenté une tentative de généraliser sa méthode à l'étude des courbes du degré supérieur à deux.[100] Il décrit sa méthode dans un appendice à ses *Sectiones conicae*.

La Hire généralise, d'abord, la notion de la division harmonique en une notion qui est assez proche de la notion du birapport. La Hire démontre dans les propositions 1-4 de son appendice que si on a 4 droites passant par le point $P$ (Fig. 2.1.28) et si on les coupe par une ligne droite qui, soit, est parallèle, comme $FE$, avec une de ces droites, soit, les coupe, comme $AB$, alors l'égalité suivante des rapports sera obtenue:

$$\frac{AB \times CD}{AC \times DB} = \frac{FD}{DE} = const .$$

Autrement dit, ce rapport est un invariant projectif et il caractérise le faisceau des concourantes au point $P$.

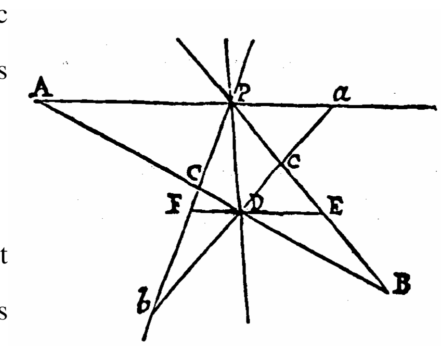



**Fig. 2.1.28**

Ensuite La Hire définit ce qu'il appelle "cercle généralisé". La généralisation concerne la propriété du théorème des éléments d'Euclide II.14[101]. Il suppose un diamètre $AD$ (Fig. 2.1.29) et une direction des ordonnées comme $BE$ non nécessairement perpendiculaire au diamètre. Les points $E$ du "cercle "sont caractérisés par la condition

$$BE^{k+l} = AB^k \times BD^l$$

[100] A notre connaissance personne n'a remarqué ce point.
[101] Voir [Euclid 1956]

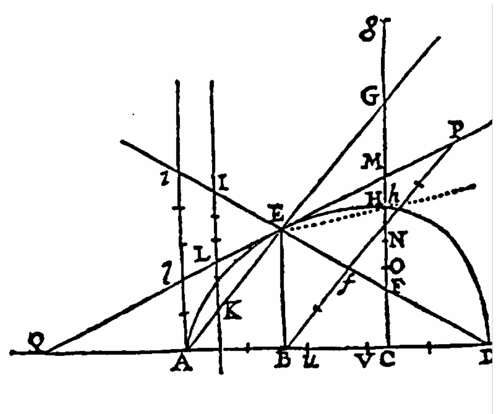



Fig. 2.1.29

où $k, l$ sont des entiers positifs quelconques. L'exemple que La Hire donne constamment et que nous adopterons dans la suite est $k = 2, l = 3$.[102] Il est aisé de voir que le "cercle" ne sera pas symétrique et qu'il a une direction du diamètre qui est privilégiée.

Dans le cercle généralisé La Hire démontre une seule propriété projective. Si on prend un point $E$ sur le cercle et si on mène la tangente $QE$ qui coupe le diamètre au point $Q$, alors le birapport des points $QABD$ sera $-\frac{k}{l}$.

Ensuite La Hire essaie d'étudier les propriétés des sections des cônes avec les cercles généralisés pour base. Mais le caractère privilégié du diamètre l'oblige de couper le cône uniquement par les plans qui sont parallèles aux ordonnées à ce diamètre.

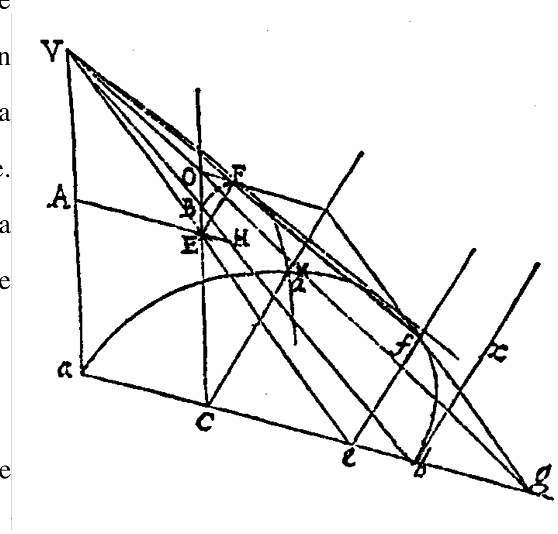



Fig. 2.1.30

Il est très surprenant que l'étude de La Hire ne soit pas projective. La position du plan de la section lui permet d'utiliser la méthode apollonienne du triangle par l'axe. Alors, par exemple, pour le cas de la "parabole généralisée" (Fig. 2.1.30) La Hire montre pour la parabole $BFd$ que

$$\frac{EF^{k+l}}{cd^{k+l}} = \frac{BE^l}{Bc^l}.$$

C'est démontré facilement grâce aux triangles semblables. Nous avons

$$\frac{EF^{k+l}}{AE^k \times EH^l} = \frac{ef^{k+l}}{ae^k \times eb^l} = \frac{cd^{k+l}}{ac^k \times cb^l}.$$

[102] Pour $k = l = 1$ et l'angle droit entre le diamètre et les ordonnées nous obtenons le cercle habituel. Remarquons que le cercle généralisé n'a en général qu'un axe de symetrie et, pour ceci, nous devons encore supposer que les angles entre le diamètre et ses ordonnées sont droits.

Parce que il s'agit d'une "parabole" nous pouvons substituer $AE = ac$, et nous obtenons le résultat.

Dans la proposition 15 La Hire constate que les tangentes auront par projection une propriété analogue à celle que nous avons citée plus haut. Mais cette propriété n'a pas été utilisée pour démontrer une propriété caractéristique de la conique généralisée. Cela a été fait par la méthode essentiellement apollonienne.

Nous voyons alors que La Hire a essayé de donner une étude des courbes de degré supérieur à 2. Mais cette étude reste très limitée. La Hire essaie de le faire en utilisant le diamètre qui divise en deux parties égales les ordonnées. Il ne s'est pas rendu compte que pour avoir une étude projective des courbes d'un degré supérieur il faut considérer les "centres de gravité" de tous les intersections des ordonnées avec la courbe.[103]

### 2.1.8 Analyse des notions utilisées par La Hire dans sa méthode

La première chose qui attire notre intérêt est la forme très correcte de la méthode de La Hire. Presque aucune objection ne peut être faite à ses raisonnements, même du point de vue des mathématiques actuelles. Ce désir de rester très correct, qui se manifeste à travers de toute œuvre de La Hire, lui interdit d'utiliser certaines notions, considérées comme trop vagues à son époque.

#### Les points à l'infini

La Hire est notamment obligé d'évacuer de son discours les notions qui concernent les points à l'infini. Ainsi, en opposition à Desargues, La Hire ne parle pas des points à l'infini. Rappelons que ce sont justement ces notions qui ont attiré des critiques violentes contre Desargues.[104]

Or ces notions, même si elles n'étaient pas acceptées au XVII$^{e}$ siècle, sont tout à fait efficaces pour exprimer les propriétés projectives des sections coniques, comme l'a montré le développement de la géométrie projective au XIX$^{e}$ siècle.[105]

---

[103] Ce qu'a fait Newton en combinant les méthodes analytiques et projectives - voir [Newton, I. 1711].
[104] Voir par exemple [Taton, R. 1951] *L'oeuvre mathématique de Desargues*; Presse universitaires de France, Paris 1951
[105] Par exemple *Traité des propriétés projectives des figures* [Poncelet, J.V. 1822].

La Hire est alors obligé de remplacer ces notions par des considérations plus compliquées. Ainsi chaque fois qu'un faisceau de lignes droites apparaît, La Hire distingue, avec patience, le cas des parallèles et le cas des concourantes. Pour chacun de ces cas La Hire donne une démonstration à part.

Par exemple dans le lemme 15 de la *Nouvelle méthode* La Hire considère les points $A$ (Fig. 2.1.31) de la ligne droite $NM$ et il mène les deux tangentes du point $A$ au cercle. Ce lemme est complété dans un corollaire par le cas des deux tangentes parallèles à la droite $NM$ (Fig. 2.1.32). La même propriété (le fait que la droite qui joint les deux contacts passe par le pôle $C$) est démontrée indépendamment dans ce cas.

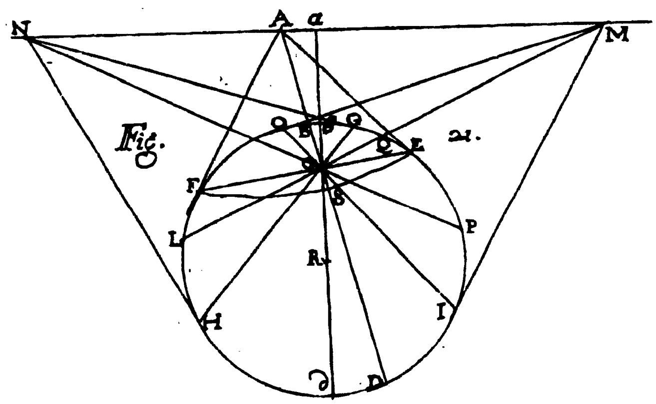



**Fig. 2.1.31**

Remarquons un détail important. Il s'agit de la lettre $A$ qui apparaît sur les deux tangentes dans la figure 2.1.32. Si le "$A$" doit nommer dans les deux cas le même point, il doit être à l'infini sur les deux droites Alors ceci montrerait que La Hire, d'une certaine manière, raisonnait en considérant les points à l'infini. Or La Hire n'utilise ce "$A$" que pour donner le nom aux deux parallèles $AN, AM$ et ne travaille absolument pas avec la position du point $A$.[106] De plus au XVII[e] siècle il était possible d'avoir dans la même figure plusieurs points portant la même lettre. Par contre, chez La Hire nous ne trouvons cet usage que dans les cas qui évoquent le point à l'infini. Ainsi nous pouvons constater que, si dans la présentation de La

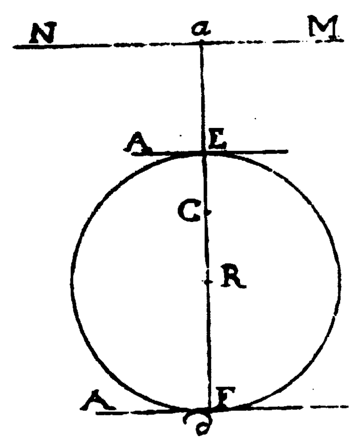



**Fig. 2.1.32**

[106] Voir aussi la note 167.

Hire les points a l'infini sont soigneusement évités, il en reste certaines traces et il est probable que La Hire a utilisé ces concepts dans ses recherches.

### Projections

A la question des points à l'infini est étroitement liée la notion des projections. En effet en considérant une projection d'un plan sur un autre, certains points se projettent à l'infini. La Hire, qui évite les points à l'infini, se contente de dire que ces points "ne forment rien."[107]

De plus il y a des points qui sont images des points à l'infini dans la projection. Ces points ne sont formés par aucun point. Ce fait a une conséquence assez grave. La projection d'une droite n'est pas, en général, une ligne droite, mais une ligne droite à laquelle manque un point.

C'est, à notre avis, une des raisons pour lesquelles La Hire ne parle pas des projections mais introduit ses notions des points et droites "formés". La droite ne se projette pas, mais elle "forme" une autre droite qui est obtenue comme intersection des plans. De cette manière les problèmes avec les points à l'infini disparaissent.

En outre, nous voyons que La Hire en parlant des "formations des points" plutôt que des "projections" met en avant la "construction" par rapport à la notion de la "transformation". En effet la notion abstraite de transformation n'apparaît pas chez La Hire. Pour lui, ce que nous appelons aujourd'hui "transformation" est toujours étroitement lié à la description des constructions géométriques concrètes.[108]

### Propriétés polaires du cercle

La propriété fondamentale que La Hire démontre d'abord pour le cercle et ensuite pour les coniques, en se servant de la projection, est ce que nous appelons aujourd'hui la relation réciproque entre le pôle et sa polaire. La Hire n'utilise pas les termes "pôle" et "polaire". Il ne généralise même pas complètement cette correspondance. Par contre, il en a un

---

[107] Voir la citation à la page 72.

[108] Voir plus loin dans le paragraphe 2.2.4 pour la manière dont La Hire définit et utilise d'autres transformations.

concept assez systématique comme nous pouvons le voir d'après le corollaire qui suit au Lemme 16:

> "Il s'ensuit de ce qui a esté démontré dans les Lemmes 12, 15, & 16 que si l'on prend 2 points hors d'un cercle & que la ligne qui joint ces points touche le cercle: les lignes qui joindront les attouchements au cercle des lignes menées de ces points se rencontreront en un point sur la circonférence du cercle. Ou bien ou contraire.
>
> Mais si la ligne qui joint les attouchements ne rencontre pas le cercle: les lignes qui joindront les attouchements se rencontreront en un mesme point dans le cercle.
>
> Enfin si la ligne qui joint les points coupe le cercle & ne passe pas par le centre: les lignes qui joindront les attouchements se rencontreront en un mesme point hors du cercle. Ou au contraire."

### Origine de la méthode

Pour ce qui concerne l'origine de la méthode projective de La Hire il y a eu un certain nombre des mathématiciens qui ont accusé La Hire d'avoir plagié Desargues. Nous comparerons le *Brouillon project* de Desargues avec la méthode de La Hire dans le chapitre 4.4.

Nous pouvons pourtant constater chez La Hire une grande connaissance des méthodes classiques, surtout des *Coniques* d'Apollonius. La Hire s'exprime lui-même à propos de l'origine de sa méthode:

> " ... ce fut en considerant attentivement toutes les proprietez de cette ligne[109] et tous les cas qui sont dans Apollonius, et en les comparant tous ensemble,

[109] Ligne harmoniquement divisée.

> que je trouvay le moyen de n'en faire qu'un seul que je donnay dans la methode que j'ay publiée"[110]

Sa propre assertion est soutenue par la publication ultérieure de sa méthode. En effet nous avons vu que dans son mémoire de 1672 il se base surtout sur les théorèmes d'Apollonius et en fait une généralisation en passant d'un cas à l'autre par projection.

Dans son traité *Sectiones conicae* qu'il publie en 1685 il garde sa méthode même s'il a déjà eu une connaissance détaillée de *Brouillon project.*

Nous croyons alors que l'influence sur lui des méthodes projectives de ses prédécesseurs, parmi lesquels Desargues tient la place la plus brillante, a été plutôt indirecte. Nous pouvons voir La Hire comme celui qui a le plus combiné la méthode classique d'Apollonius avec le principe projectif et qui a reformulé ce principe dans les termes généralement acceptés à la fin du XVII siècle.

[110] Cette citation est prise dans la copie manuscrite du *Brouillon project* de Desargues que La Hire a faite en 1679 - voir le chapitre 4.4 pour les contexte du texte et pour les informations sur cette copie de La Hire.

## 2.2 Méthode projective plane

En 1674, La Hire complète son ouvrage *Nouvelle méthode* [La Hire, Ph. de 1673] par un nouvel opuscule intitulé *Les Planiconiques*. Dans cet ouvrage La Hire donne une étude rigoureuse d'une transformation géométrique plane, qui permet d'obtenir les sections coniques comme transformées du cercle,[111] et d'étudier leurs propriétés de cette manière. Cette méthode, qui sera le sujet de notre analyse, a été à notre avis assez peu remarquée et par les mathématiciens de l'époque et par les historiens des mathématiques.[112]

Ainsi après avoir présenté le contenu de cet ouvrage, notre objectif est de donner son analyse approfondie dans l'ensemble des travaux de La Hire.

### 2.2.1 La relation entre la *Nouvelle méthode* et *Les Planiconiques*

Avant de présenter leur contenu mathématique nous voulons insister sur la relation étroite entre *Les Planiconiques* et la *Nouvelle méthode*. Nous avons parlé dans le paragraphe 1.2.1 du fait que les deux ouvrages ont été conçus pour être reliés ensemble.

D'autre part, La Hire dans sa préface des *Planiconiques* indique à quel usage il les destine :

> "Plusieurs personnes intelligentes dans la Géometrie n'estant pas accoutumées à concevoir des solides par de simples lignes tracées sur un plan, aurons de la peine à entendre la première proposition de la méthode des Sections Coniques que je fis imprimer l'année passée. … en sorte que l'on peut mettre ces Planiconiques à la place de cette première proposition pour passer au reste."

Ainsi *Les Planiconiques* n'est pas un ouvrage indépendant, mais plutôt une manière alternative de lire la *Nouvelle méthode* en évitant tout ce qui nécessite trois dimensions. De cette manière La Hire obtient une nouvelle méthode - cette fois une méthode plane - pour étudier les sections coniques.

[111] Voir la note 33.

[112] Par exemple, la notice dans les Philosophical Transactions [Collins 1676] parle de la *Nouvelle méthode* mais ne dit rien des *Planiconiques*, le Journal des Sçavants se limite à en dire une phrase copiée dans la préface de La Hire. Des historiens des mathématiques, c'est Chasles qui en a parlé le premier dans son *Aperçu*. [Wieleitner, H 1913] et [Lanier, D. Le Goff,J.P. 1989] se limitent à peu près à donner la définition de la transformation.

### 2.2.2 Contenu mathématique

Les pages 73-74 sont consacrées à la préface. Les pages 75-78 contiennent la définition d'une transformation plane et les lemmes 21-24, où ses propriétés sont étudiées. Les pages 78-80 contiennent le paragraphe intitulé *Les sections des superficies coniques sont des lignes courbes formées par un cercle suivant cette méthode.* Aux pages 81-93 les propriétés des sections coniques sont développées à partir des propriétés correspondantes du cercle. Enfin à la page 94 nous trouvons une remarque, les *errata* pour la *Nouvelle méthode* et pour *Les Planiconiques* et la note au relieur, que nous avons citée plus haut.

La Hire commence par la définition d'une transformation plane. Toutes les constructions sont considérées dans un plan. Soit (Fig. 2.2.1) deux parallèles *BC* et *DE* (appelées *directrice* et *formatrice* respectivement) et un point $A \notin BC$ (appelé *pôle*) donnés dans le plan. Pour un point donné *h* on fait la construction suivante : on choisit un point $x \in BC$, et on définit $z = hx \cap DE$. Par le point $z$ on mène la ligne droite $zL \| Ax$ et on définit $L = zL \cap hA$. Alors le point *L* ne dépend pas du choix de *x* et nous définissons la transformation $\tau$ en posant $\tau(h) = L$.

L'indépendance de la construction par rapport au choix du point *x* est prouvée dans le lemme 21. Si le point *L* est construit en utilisant le point *x* et si le point *l* est construit en utilisant le point *y*, alors à cause des triangles semblables nous avons pour les distances orientées[113] $\frac{hA}{hL} = \frac{hx}{hz} = \frac{hy}{hu} = \frac{hA}{hl}$, et donc *L=l*.

On peut donc fixer un point *x* pour la construction des images de tous les points $h \notin Ax$.

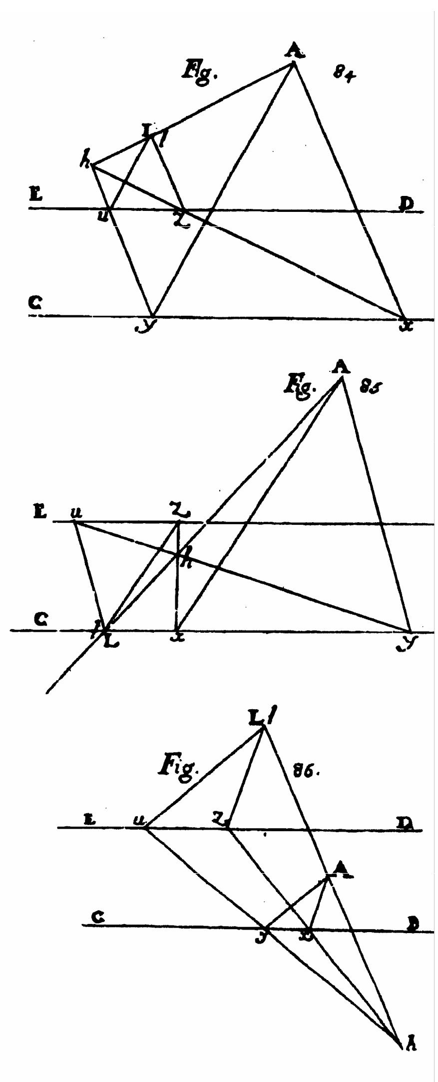



**Fig. 2.2.1**

[113] La Hire n'utilise pas les distances orientées, mais simplement les distances normales. Ce manque est partiellement compensé par les considérations de plusieurs cas de la figure.

La Hire remarque que $\tau$ est défini pour tous les points $h \notin DE$ hors de la directrice et qu'il est injectif.

Dans le lemme 22 (Fig. 2.2.2) La Hire démontre que l'image d'une ligne droite *hm* sera une ligne droite *LM*. La démonstration se réduit à considérer trois points *m, n, h* sur une ligne droite, à construire leurs images M, N, L et à utiliser plusieurs triangles semblables pour montrer que $\frac{QM}{QG} = \frac{PN}{PO} = \frac{hL}{hu}$ et donc déduire que les points *M, N, L* sont en ligne droite. Dans les corollaires du lemme 22, La Hire constate, que si nous avons une ligne droite *p*, qui coupe la directrice en *x* et la formatrice en *z*, alors $\tau(p)$ passe par le point *z* et est parallèle à *Ax*. Par conséquent, l'image du faisceau des droites qui passent par le point $x \in BC$ sera le faisceau des droites parallèles à *Ax*.

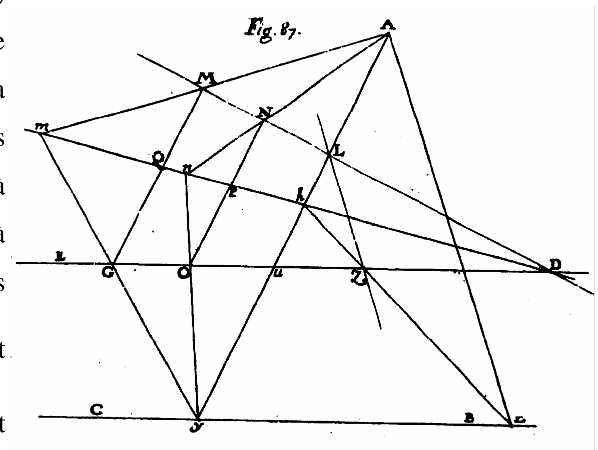


Fig. 2.2.2

Dans le lemme 23 (Fig. 2.2.3) La Hire démontre que les lignes droites parallèles entre elles et qui coupent la directrice, se transformeront en lignes droites concourantes au point *a*, telles que le vecteur $\overrightarrow{Aa}$ soit égal aux vecteurs donnés par l'intersection des lignes droites avec la directrice et la formatrice, à savoir aux vecteurs $\overrightarrow{nh} = \overrightarrow{yu} = \overrightarrow{xz}$. Pour le démontrer, La Hire considère que les images des lignes droites *nh, yu, xz* sont parallèles respectivement aux lignes droites *nA, yA, xA*.

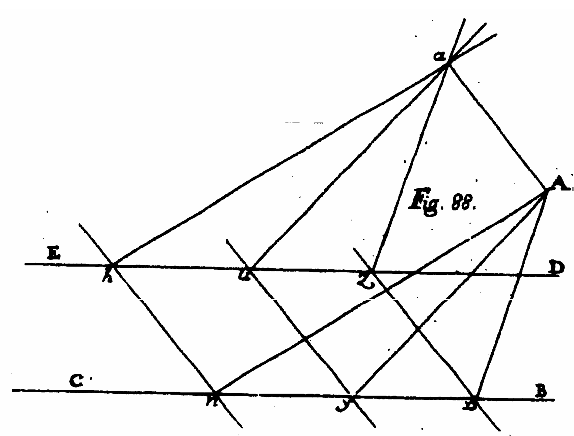


Fig. 2.2.3

Dans le lemme 24, La Hire constate qu'un cercle formera une ligne courbe, et que la tangente au cercle sera transformée en une ligne droite qui rencontre l'image du cercle en un seul point[114]. Ce fait est trivialement déduit de l'injectivité de la transformation.

Suit un théorème non numéroté que nous noterons Théorème 1.

### Théorème 1

Considérons (Fig. 2.2.4) un cône à base circulaire *HED* de sommet *a* et un plan de coupe quelconque *EDL*. Par le sommet *a* menons le plan *aXM* parallèle au plan *EDL*. Les plans *EDL* et *aXM* rencontrent le plan de base en des lignes droites *DE* et *BC* respectivement. Rabattons le plan de base dans le plan de la coupe *EDL* autour de la ligne droite *DE*. De cette manière la ligne droite *BC* engendre une ligne droite *bc*, le cercle *EDM* engendre un cercle *Edm*, et les points de la ligne droite *DE* sont les points fixes de ce rabattement. Définissons la projection $\pi : aXM \rightarrow EDL$ dont la direction est donnée par la propriété que les points de la ligne droite *BC* se projettent sur les points correspondants de la ligne droite *bc*. Définissons $A = \pi(a)$. Alors la section conique obtenue comme l'intersection du cône avec le plan *EDL* sera exactement l'image du cercle *Edm* dans la transformation $\tau$ définie à partir du pôle *A*, la directrice *bc* et la formatrice *ED*.

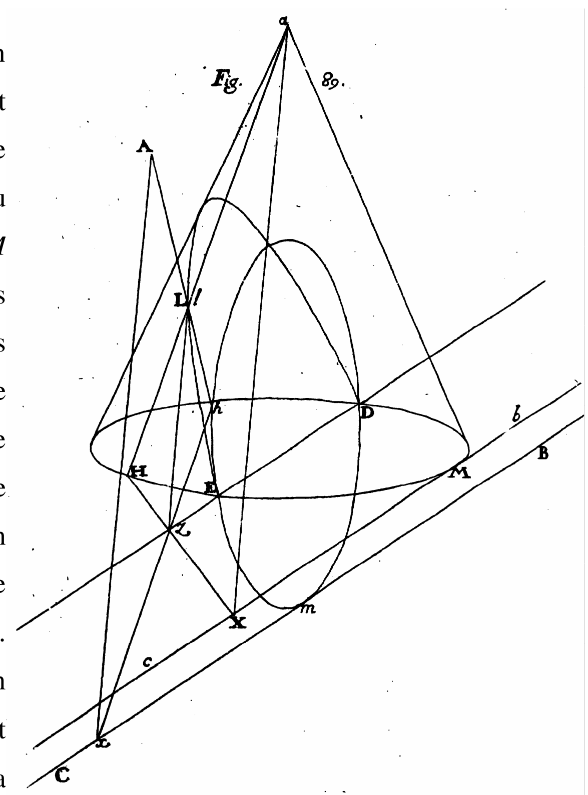


Fig. 2.2.4

[114] Dans tout son œuvre La Hire ne se sert nulle part des considérations infinitésimales pour définir une tangente. Soit il se contente de la définir, comme dans notre cas, comme la ligne, qui a un seul point en commun avec la courbe, soit il rajoute la condition de rester à l'extérieur de la courbe (par exemple pour la parabole).

**Démonstration**

Choisissons un point $L$ sur la section conique, menons la ligne droite $aL$, appelons $H$ son intersection avec la base et que $h$ soit le point obtenu comme le rabattement du point $H$. Il faut démontrer que $L = \tau(h)$. Notons $l = \tau(h)$ et choisissons un point quelconque $X$ sur la ligne droite $BC$ et que $x$ soit son rabattement. Notons $z$ l'intersection des lignes droites $HX$ et $DE$. La ligne droite $zl$ est, d'après la construction de $\tau$, parallèle à $xA$ et à cause des triangles semblables $hxA$ et $hzl$ nous avons pour les distances orientées $\frac{zl}{xA} = \frac{zh}{hx}$. D'autre part, vu la situation spatiale, $zL$ est parallèle à $Xa$ et à cause des triangles semblables $HXa$ et $HzL$ nous avons $\frac{zL}{Xa} = \frac{zH}{XH}$. Mais $zH=zh$, $zH=zh$ et $xA=Xa$ et donc nous obtenons $zl=zL$. Et comme les lignes droites $xA$ et $Xa$ sont parallèles nous avons $L=l$. QED

Ensuite La Hire constate que la nature de la section conique obtenue par la transformation $\tau$ dépend uniquement de la position de la directrice par rapport au cercle. Si la directrice coupe le cercle, nous obtenons une hyperbole; si elle le touche, nous obtenons une parabole et, si elle ne le rencontre pas, nous obtenons une ellipse ou un cercle. Dans cette réflexion, La Hire utilise une classification analogue pour les sections coniques obtenues dans l'espace.[115] Le théorème 1 lui permet de mettre en relation la nature de la conique obtenue, d'une part, par la transformation et, d'autre part, par l'intersection d'un plan avec un cône. La position de la ligne droite BC vis-à-vis du cercle *EDM* est la même que celle de la ligne droite *bc* vis-à-vis du cercle *Edm*.

Dans le reste des *Planiconiques,* La Hire démontre une série de propositions pour les sections coniques. Les propriétés valables pour le cercle sont transportées sur les coniques. Il utilise les lemmes 1-17 de sa *Nouvelle méthode* où il démontre, d'une part, des propriétés du cercle exprimées dans les termes de la division harmonique et, d'autre part, l'invariance de la division harmonique par rapport à la projection.[116] La nature de la transformation $\tau$ permet de transporter ces propriétés aux coniques. Comme exemple de cette méthode nous présentons en détail le premier résultat de La Hire.

---

[115] *Nouvelle méthode*, la page 17.

[116] Voir notre présentation du contenu mathématique de la *Nouvelle méthode* pour le résumé de ces lemmes

### Théorème 2

Considérons (Fig. 2.2.5) la transformation $\tau$ dont *A* est le pôle, *BC* la directrice et *DE* la formatrice. Considérons la parabole *DLHNE* qui est l'image du cercle *DmEnh*. Menons les lignes droites comme *LN* parallèles entre elles, dont chacune coupe la parabole en deux points. Alors les milieux de ces lignes droites seront tous sur une ligne droite *HP*.

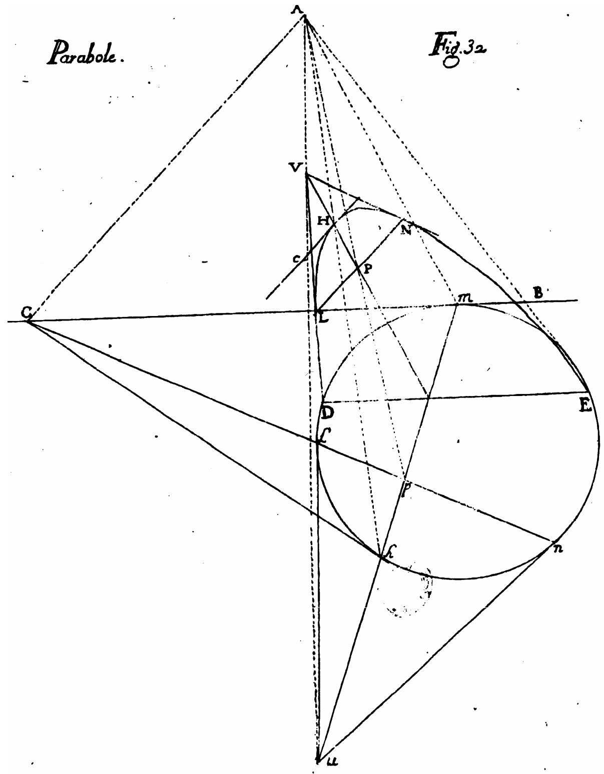



**Fig. 2.2.5**

### Démonstration

D'après le corollaire du lemme 22, les images inverses de ces lignes droites, comme $nl = \tau^{-1}(NL)$ seront, soit parallèles à la directrice, soit concourantes en un point $C \in BC$.

Si elles sont concourantes en *C*, nous aurons $AC \| NL$ d'après le corollaire du lemme 22. Or toutes ces lignes droites seront divisées harmoniquement par le cercle et par la ligne droite *um*, la polaire du point *C*. Nous avons donc *Harm(Clpn)*. D'après la définition de $\tau$, les points *L, P, N* sont obtenus comme intersections de la ligne droite *LN*, avec les lignes droites *Al, Ap, An*. Mais *AC, Al, Ap, An* passent par les points *C, l, p, a,* qui forment une division harmonique, et la ligne droite *LN* est parallèle avec *AC*. Nous obtenons donc *LP=PN*. La ligne droite $HP = \tau(hp)$ divise donc en deux toutes les parallèles avec *LN*.

La démonstration pour le cas où la ligne droite *nl* est parallèle à la directrice est triviale. QED

Les démonstrations des autres propriétés sont essentiellement les mêmes, nous nous bornons, donc, à présenter les résultats que La Hire obtient. D'ailleurs, La Hire est de plus en plus bref dans les démonstrations de ces propriétés, jusqu'à la dernière où il écrit simplement:

> « Cecy est démontré dans le cercle au lemme 17, & suivant cette méthode la mesme chose est dans les courbes ».

#### Pour toutes les sections coniques

- L'existence d'un diamètre pour une direction des ordonnées.
- La tangente à l'extrémité du diamètre est parallèle aux ordonnées
- Si on mène deux tangentes *NV, LV* à une section conique, alors toutes les lignes droites passant par le point V seront coupées harmoniquement au point *V*, par la conique en *H, M* et par la ligne droite *NL* qui joint les points de contact *Harm(VHPM)*. Si cette ligne droite passe par le milieu de *NL*, elle sera le diamètre de la conique.
- Propriétés polaires d'une conique (correspondance pôle – polaire).
- Si on considère trois tangentes à une conique, alors chacune sera coupée harmoniquement par les deux autres, par la ligne droite qui joint les points de contact des deux autres et par son propre point de contact *Harm(DRLS)*.

#### Pour la parabole

- Pour la parabole, tous les diamètres sont parallèles entre eux.
- Pour la parabole, la partie d'un diamètre entre une tangente et sa sous-tangente est divisée en deux par l'extrémité du diamètre

#### Pour les coniques à centre

- Pour l'ellipse et l'hyperbole, les diamètres passent tous par un point - le centre. Existence des diamètres conjugués.
- Existence des asymptotes pour l'hyperbole. Si une ligne droite menée entre les asymptotes coupe l'hyperbole en deux points, alors les segments entre les asymptotes et l'hyperbole seront égaux entre eux.

### 2.2.3 Les propriétés de la transformation

La construction proposée par La Hire peut être réalisée pour tous les points en dehors de la directrice. Pour le pôle (donc $h=A$), les lignes droites $Ax$ et $zl$ coïncident. Pour être tout à fait correct, on devrait supposer dans la construction, pour les points différents du pôle, que la ligne droite *hx* ne passe pas par le pôle *A*.

Pour les points de la directrice (donc $h \in CB$), la ligne *hx* coïncide avec la directrice et donc le point *h* n'a pas d'image.[117]

Il est assez facile de voir quelle est la nature de la transformation de La Hire. Par définition un point *h* se transforme en un point *L* tel, que *L* se trouve sur la droite A*h*. De plus, à cause des triangles semblables, le rapport des distances orientées $\frac{hL}{hA}$ est égal au rapport des distances orientées du point *h* aux droites ED et BC $\frac{(h, DE)}{(h, BC)}$. Pour obtenir l'équation de cette transformation, nous pouvons supposer, sans perdre la généralité, que la directrice BC a l'équation $Y = 0$, la formatrice a l'équation $Y = 1$, et le pôle a les coordonnées $[0, a]$. La transformation est alors exprimée dans les coordonnées cartésiennes de cette manière:

$$[X, Y] \to \left[\frac{X}{Y}, a + 1 - \frac{a}{Y}\right]$$

Nous pouvons voir facilement, soit par l'équation, soit par les considérations géométriques, les propriétés énoncées par La Hire. A savoir que la transformation est injective et que les points fixes sont le pôle et les points de la formatrice.

Si nous considérons l'extension continue de cette transformation sur le plan projectif[118] nous pouvons voir, par les limites de l'équation ou par les considérations synthétiques, qu'un point *x* de la directrice aura pour image le point à l'infini qui est sur la ligne droite *hA*. Un point à l'infini qui se trouve sur une droite *p* qui passe par le pôle aura pour image l'intersection de cette droite avec la ligne droite *Y=a+1*.

### 2.2.4 <u>Le concept de transformation chez La Hire</u>

Tout d'abord, remarquons que La Hire commence par une description d'une configuration dans le plan. La configuration Directrice - Formatrice - Pôle lui permettra d'*engendrer* des points.

Les mots choisis par La Hire pour ces objets sont remarquables. Le mot "directrice" a été utilisé pour la première fois par Jean de Witt[119] dans ses *Elementa curvarum*

---

[117] Le point formé serait à l'infini.
[118] La Hire ne fait nullement allusion à une telle extension.
[119] D'après [Coolidge, J.L. 1945]

*linearum* publiés en 1661[120] et cela, dans le contexte des propriétés foyer-directrice, qui n'a aucun rapport à son usage dans *Les Planiconiques*. Le mot pôle n'a pas de rapport à une étude polaire des sections coniques - étude par ailleurs tellement présente chez La Hire. Ces mots n'apparaissent pas dans la *Nouvelle méthode*. Par contre, plus tard, dans les *Sectiones conicae* de 1685 La Hire utilisera les mots "directrice" et "formatrice" pour les objets analogues à ceux des *Planiconiques*. A savoir, le mot "formatrice" désignera l'intersection du plan de coupe avec la base et le mot "directrice" l'intersection de la base du cône avec le plan qui passe par le sommet et qui est parallèle au plan de coupe.

Ensuite à partir de cette configuration La Hire définit sa transformation par les mots suivantes:

> « S'il y a sur un plan la directrice BC, la formatrice DE & le pole A hors de la directrice, ayant pris quelque point *h* sur ce mesme plan, si par le pole A on mene la ligne A*h* & par le point *h* quelque ligne droite *hx* qui coupe la directrice en *x* & la formatrice en *z*, ayant tiré A*x* & par le point *z* la ligne *z*L parallele à A*x* qui coupe A*h* en L; Je dis que le point L est formé par le point *h*. »

Nous voyons, donc, que La Hire ne conçoit pas la transformation d'une manière abstraite, mais il parle d'une "génération" ou "formation" des points par une construction. A priori un point *h* peut former plusieurs points *L*, si on change le point auxiliaire *x*. Ce n'est que dans le lemme 21 que La Hire démontre que le point *L* ne dépend pas du choix du point *x* et, donc, que chaque point *h* peut former au maximum un point *L*. Mais, même ici, nous voyons, d'après la formulation de ce lemme, que d'une certaine manière le point *x* a un rôle important:

> "La Directrice, la Formatrice, & le Pôle A ne changeant point; je dis que par cette manière de génération le point *h* ne peut former d'autre point que le point *L*"

Ce point *x* reste important, même après avoir démontré que l'image *L* ne dépend pas de son choix, comme nous le voyons du corollaire 1 de ce lemme 21:

> "Il est évident par cecy que l'on peut choisir quelque point sur la directrice comme *x*, & ayant mené par le pole la ligne *Ax* elle peut servir pour la

[120] Voir [Witt, J. 1661]

génération de tous les points que l'on voudra, hormis seulement si le point qui forme se trouve dans elle-mesme …"

D'autre part, nous devons constater que La Hire ne définit pas sa transformation uniquement pour les points d'une courbe donnée, mais il la définit a priori, pour tous les points du plan. C'est une différence par rapport, par exemple, à certains auteurs arabes[121] et même par rapport à la restitution de *Lieux plans* par Fermat,[122] qui considèrent les transformations planes des courbes comme sections coniques ou le cercle, mais ces transformations sont toujours définies uniquement pour les points de la courbe et pas pour tous les points du plan.

La notion de « formation », définie d'abord pour les points, est ensuite étendue, comme dans la *Nouvelle méthode*, aux lignes droites et même aux lignes courbes. Dans le lemme 22 La Hire démontre que trois points alignés comme $h, n, m$ forment trois points alignés $H, N, M$ et il définit alors que la ligne droite $hnm$ forme la ligne droite $HNM$. La Hire ne considère pas ici la ligne droite comme composée des points. Si elle l'était, son intersection avec la directrice ne formerait rien et, d'autre part, le point d'intersection de la droite formée avec la ligne droite $Y=a+1$ ne serait formé par aucun point.

Dans le corollaire 3 du lemme 22 La Hire étudie la relation entre une droite et la droite formée par cette droite. Il montre que si $z$ est l'intersection de cette droite avec la formatrice et $x$ avec la directrice, alors la ligne droite formée passera par le point $z$ et sera parallèle avec la ligne $Ax$.

Nous voyons donc qu'un point et son image sont sur la ligne droite qui passe par le pôle - le point fixe de la transformation, et d'autre part une ligne droite et son image se coupent sur la formatrice - la droite fixe de la transformation.

Nous pouvons voir, dans cette double formation points - points et droites - droites une intuition des considérations duales. Cela est, bien sûr, donné par le fait que les propriétés des coniques que La Hire veut obtenir sont essentiellement les propriétés polaires.

### 2.2.5 Inspiration spatiale des *Planiconiques*

Si nous lisons *Les Planiconiques* séparément du reste des travaux de La Hire, n'apparait pas clairement la manière dont il a développé sa méthode. Son procédé est mathématiquement très correct - à part quelques détails comme les preuves de continuité des

[121] Par exemple chez Banu Musa – *La figure circulaire allongée,* chez Thabit Ibn Qurra - *Livre sur les sections et surfaces du cylindre* ou chez Ibrahim b. Sinan - *Livre sur la construction des trois sections*. Voir [Rashed, R. – Morelon, R. 1997] vol. 2, p. 144, [Rashed, R. 1996].

courbes etc. qui n'étaient pas exigées à l'époque et qui sont faciles a compléter. Par contre, La Hire ne donne aucune indication pour ce qui concerne l'origine de sa méthode.[123] Pour ce qui concerne les historiens des mathématiques, Chasles et après lui Wieleitner disent que la méthode de La Hire a ses racines dans les méthodes de la perspective. A savoir que la construction utilisée dans *Les Planiconiques* ressemble aux opérations qu'un peintre réalise sur le tableau quand il fait des constructions en perspective.

Sans vouloir nier la relation étroite entre la pratique de la perspective et la transformation de La Hire, nous trouvons pourtant que ses origines sont plus géométriques. Elle est à notre avis un résultat direct des démonstrations et considérations de la proposition 1 de la *Nouvelle méthode* et plus encore de ses figures. Rappelons que *Les Planiconiques* doivent remplacer cette proposition et que La Hire y réutilise exactement les mêmes figures 32-51 de la *Nouvelle méthode*.

Regardons les figures de cette première proposition, par exemple, la figure 32 (Fig. 2.2.5). Il s'agit de la figure d'un cône avec le cercle *DmE* pour base et le sommet *A*. Dans la *Nouvelle méthode*, La Hire travaille avec cette figure comme avec une figure spatiale et pas du tout comme avec une figure où le cône serait rabattu. La Hire ne donne aucune indication concernant la construction de cette figure[124], il ne dit pas si elle est dans la perspective, ou si elle est dans une projection cylindrique. Nous pouvons pourtant voir que le cône est regardé d'en haut (une position de l'œil assez inhabituelle), car le cercle de base n'est pas déformé ou, si on le veut, la situation spatiale est projetée sur la base. Il reste à savoir s'il s'agit d'une projection cylindrique ou conique à partir d'un point à distance finie. Or les lignes *Hc, NL* qui sont parallèles dans l'espace apparaissent aussi parallèles sur la figure. De la même manière, sur les figures 33 et 34 des parallèles sont représentées par des parallèles. Ces lignes étant dans un plan qui n'est pas parallèle au plan de projection (base), elles seraient concourantes sur la figure, s'il s'agissait d'une perspective. Ainsi nous pouvons conclure, que les figures qui accompagnent la proposition 1 sont dessinées dans une cylindrique, comme on le ferait aujourd'hui. Le plan de la figure a été choisi parallèle (ou identique) au plan de la base, car la méthode de La Hire consiste à étudier les propriétés du cercle et, ensuite, à les transposer aux

---

[122] Voir [Fermat, P. 1891-1896].

[123] La seule chose qu'il répète à plusieurs reprises est qu'il a trouvé cette méthode par le souci d'éviter l'espace à trois dimensions.

[124] Par contre Le Poivre dans son *Traité des sections du cylindre et du cône considérés dans le solide et dans le plan* [Le Poivre, J.F. 1704] dans une situation semblable est plus conscient de l'importance de la figure et dit explicitement en quelle projection elle est construite - voir le chapitre 4.5.

sections coniques. De cette manière le cercle de base n'est pas déformé et on voit les propriétés en question plus clairement.

Regardons maintenant de quelle manière la figure 32 (Fig. 2.2.5) est concrètement construite. Nous avons la base du cône - le cercle *DmE* et le sommet du cône *A*. Maintenant le cône est coupé par le plan *DHE*, qui rencontre le plan de base sur la ligne droite *DE*. Nous supposons que la section conique est une parabole, donc si nous menons par le sommet *A* le plan *CBA* parallèle au plan *DHE*, alors ce plan *CBA* rencontre le plan de base sur une droite *CB* qui est tangente au cercle. Bien sûr les lignes droites *CB* et *DE* seront parallèles.

Maintenant nous voulons, dans notre figure, construire la représentation d'un point de la parabole. Nous pouvons faire cela en cherchant l'intersection du plan *DHE* avec une droite sur la surface du cône. Nous voulons, par exemple, construire l'intersection de la ligne droite *hA* avec le plan *DHE*. Pour cela, menons un plan auxiliaire quelconque *Ahm* qui contient la droite *hA*. Ce plan rencontre les deux plans *DHE* et *CBA* sur deux lignes droites parallèles *Am* et *VP*, dont les représentations sur la figure seront aussi parallèles. Or nous pouvons directement construire la représentation de la droite *Am* et nous construisons la ligne *VP* comme la parallèle avec *Am* qui passe par l'intersection des droites *hm* et *DE*. La représentation du point de la parabole est obtenue comme l'intersection des droites *VP* et *hA*.

Résumons encore l'opération qu'il faut faire dans la figure pour obtenir la représentation de l'intersection du plan *DEH* avec la ligne droite *Ah*. Il faut mener une droite auxiliaire *hm*, joindre les points *A* et *m* par une droite et mener une parallèle *PV* par le point d'intersection des droites *hm* et *DE*. Le point cherché *H* est obtenue comme l'intersection des droites *VP* et *hA*.

Cette construction est exactement celle qui est utilisée dans *Les Planiconiques* pour définir la transformation plane. La précision des figures 32, 33, 34 montre, que La Hire a utilisé ce procédé pour la construction.[125] La transformation de La Hire est donc engendrée par la construction précise des figures spatiales dans la projection cylindrique.[126] Il suffit, comme le fait La Hire, d'oublier la situation spatiale et de considérer toutes les opérations comme purement planes.

Dans le plan de la figure 32, et les suivantes, apparaît une section conique. Ce n'est pas la même qui est dans l'espace, mais bien sa projection. Les ordonnées qui sont

[125] Les autres figures qui accompagnent la proposition 1, à savoir les figures 35-51, sont dans la même projection, mais ne sont pas construites précisément. Elles sont plus schématiques.
[126] Et non pas dans la perspective, comme dit Chasles.

parallèles dans l'espace comme *cH, LN* sont parallèles sur la figure. Toutes les propriétés du cercle de base sont, dans la propriété 1 de la *Nouvelle méthode* transportées sur la conique par le moyen d'un faisceau harmonique (par exemple *Au, Ah, Ap, Am*), qui reste un faisceau harmonique même sur la figure. Donc La Hire en dessinant et étudiant les figures en question a eu l'idée de réduire toute étude dans le plan.

### *2.2.6* Caractère rigoureux de la méthode des *Planiconiques*

La Hire a pu utiliser sa transformation uniquement pour une construction des coniques ou comme une indication vague pour une étude de ces courbes. Mais il a étudié, avec son désir généralisé de précision, cette transformation très correctement. Il a fait abstraction du cercle et défini la transformation pour tous les points du plan. Il a montré qu'elle est bien définie et il a étudié précisément les propriétés de cette transformation.

Un autre problème était comment mettre en relation une planiconique[127] avec les coupes du cône. Le plus simple serait la manière suivante. Dans *Les Planiconiques* on démontre une série des propriétés sur les planiconiques. Ces propriétés sont développées jusqu'au symptôme. Donc les planiconiques sont bien les coniques.

La Hire complète cette manière qui est présente chez lui implicitement par un procédé bien plus original. Il montre que chaque section du cône peut être obtenue comme une planiconique. Nous avons présenté ce résultat dans le paragraphe 2.2.3. La Hire rabat naturellement le cercle de la base dans le plan de coupe et définit le pôle d'une manière convenant pour définir la transformation. La figure 2.2.4 utilisée à ce propos est déjà dans la perspective et La Hire a donc rendu sa transformation indépendante du plan de la base.

La méthode pour étudier les sections coniques décrite dans *Les Planiconiques* appartient à deux tendances présentes chez La Hire. D'une part, elle est étroitement liée à la méthode projective spatiale. Elle utilise, comme la *Nouvelle méthode* l'invariance de la division harmonique par rapport aux projections pour démontrer les mêmes propriétés des sections coniques. Elle permet une lecture alternative de la *Nouvelle méthode* tout en évitant l'espace de trois dimensions. D'autre part, elle fait partie des méthodes utilisées par La Hire pour étudier les coniques dans le plan. Sur ce point La Hire préfère dans ses futurs travaux

[127] Nous utilisons le mot *planiconique* pour designer les coniques obtenues comme transformées du cercle par la méthode de La Hire.

d'autres méthodes, concrètement les méthodes basées sur les propriétés des foyers et les méthodes analytiques. La méthode des *Planiconiques* ne sera plus réutilisée.

La Hire a exactement défini sa transformation, il a précisément étudié ses propriétés et il a trouvé, d'une manière très élégante, un rapport entre la transformation dans le plan et les coniques obtenues comme les coupes du cône.

### 2.2.7 Texte commenté des *Planiconiques*

Nous présentons aux pages suivantes le fac-similé du texte des *Planiconiques* avec nos commentaires en bas des pages. Les numéros de ces commentaires sont indépendants de la numérotation des notes en bas des pages dans le reste de la thèse. Les figures auxquelles fait La Hire référence sont insérées après le fac-similé du texte.

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 Texte des *Planiconiques* avec les commentaires

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 Texte des *Planiconiques* avec les commentaires

## 2.3 Texte des *Planiconiques* avec les commentaires

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 Texte des *Planiconiques* avec les commentaires

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 Texte des *Planiconiques* avec les commentaires

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 Texte des *Planiconiques* avec les commentaires

## 2.3 Texte des *Planiconiques* avec les commentaires

## 2.3 Texte des *Planiconiques* avec les commentaires

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 TEXTE DES *PLANICONIQUES* AVEC LES COMMENTAIRES

## 2.3 Méthode d'étude des sections coniques à partir des foyers

La méthode d'étude des sections coniques à partir de leurs foyers est présentée par La Hire seulement une fois, dans son ouvrage *Nouveaux éléments des sections coniques* publié en 1679. C'est bien dans cet ouvrage que cette méthode, souvent reprise plus tard par divers auteurs et utilisée encore aujourd'hui dans l'enseignement, a été formulée pour la première fois.

Le livre commence par une lettre à Colbert, dans laquelle La Hire montre sa reconnaissance pour son admission à l'Académie des sciences en 1678.

> " ... vous m'avez traitté avec tant de distinction, en me faisant la grace de me procurer l'agrément du Roy pour être l'un de ses Geometres dans l'Academie des Sciences ..."

Suit la préface qui nous aidera dans notre analyse et notamment pour placer cet ouvrage dans l'ensemble des travaux de La Hire. Nous y reviendrons. Ensuite La Hire développe indépendamment la théorie de la parabole (35 pages), de l'ellipse (57 pages) et de l'hyperbole (64 pages). A la fin, il présente cinq méthodes pour la construction de ces sections point par point, les démonstrations de ces méthodes étant basées sur les théorèmes précédents[128].

Nous présenterons d'abord la structure et le contenu mathématique de cet ouvrage, ensuite nous analyserons certains concepts utilisés par La Hire et enfin nous montrerons le rapport de cet ouvrage avec le reste des travaux de La Hire.

### 2.3.1 Structure de l'ouvrage et son contenu mathématique

Comme nous l'avons dit, chacune des trois courbes est étudiée indépendamment et La Hire ne fait absolument aucun lien entre elles. Chacun des trois chapitres peut donc être lu séparément. Mais, comme on peut l'imaginer, la démarche est très semblable pour les trois coniques et nous présenterons donc les résultats ensemble pour les trois courbes.

---

[128] Nous reviendrons sur ces constructions dans le chapitre 3.1.

### Définition des coniques

La Hire commence chaque cas par la définition de la courbe en question,[129] à savoir, comme le lieu des points qui ont la même distance à un point donné et à une droite donnée pour la parabole, le lieu de points dont la somme des distances aux deux points donnés est constante pour l'ellipse, et le lieu de points dont la différence des distances aux deux points donnés est constante pour l'hyperbole. Les deux points sont supposés distincts pour l'ellipse et l'hyperbole et le point est supposé être en dehors de la droite pour le cas de la parabole.

Comme une conséquence de la définition et sans autre démonstration La Hire constate plusieurs propriétés: les symétries respectives pour chaque courbe et l'existence de deux branches pour l'hyperbole, le fait que l'ellipse enferme un espace tandis que la parabole et l'hyperbole n'en enferment pas et elles s'éloignent à l'infini.

### Définition des notions élémentaires

D'une manière naturelle La Hire définit tout de suite après la définition de la courbe les notions suivantes: les <u>foyers</u>[130], l'<u>axe</u> pour la parabole, le <u>petit</u> et le <u>grand</u> <u>axe</u> pour l'ellipse et l'<u>axe déterminé</u> et <u>indéterminé</u> pour l'hyperbole,[131] le <u>centre</u> pour l'ellipse et l'hyperbole. Les ordonnées à un axe sont définies comme les lignes perpendiculaires à cet axe. Un <u>diamètre</u> est une ligne parallèle à l'axe pour la parabole et passant par le centre pour l'ellipse et l'hyperbole. Les <u>diamètre</u>s de l'hyperbole se divisent en <u>déterminés</u> qui rencontrent la courbe et <u>indéterminés</u> qui ne la rencontrent pas. Une <u>tangente</u> est "une ligne qui ne peut rencontrer l'ellipse qu'en un point" ou pour la parabole et l'hyperbole "une ligne qui ne rencontre l'hyperbole (parabole) qu'en un point & qui ne passe pas par dedans". Nous retrouvons ici la notion de la tangente utilisée déjà dans la *Nouvelle méthode* et qui est basée sur la connaissance implicite de la forme de la courbe. D'ailleurs c'est la définition classique de la tangente utilisée déjà dans l'antiquité grecque.

---

[129] Nous préciserons dans notre analyse quelle est sa notion de la courbe et quelles sont les présuppositions implicites.
[130] Par contre, La Hire n'utilise pas le terme "directrice" pour la parabole
[131] L'axe indéterminé pour l'hyperbole est la ligne perpendiculaire à l'axe déterminé qui passe par le centre.

### Symptôme de la courbe par rapport à l'axe principal[132]

La définition des courbes permet à La Hire de démontrer, d'une manière tout à fait directe, la propriété caractéristique (symptôme) de chaque conique. Ainsi La Hire démontre pour la parabole (Fig. 2.3.1) que $PO^2 = 2FD \times TO$ pour l'ellipse (Fig. 2.3.2)

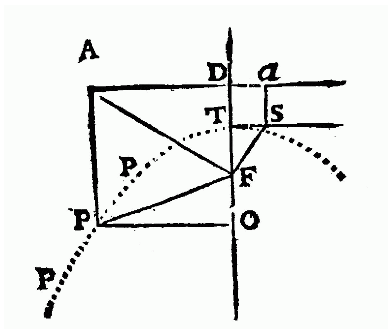



**Fig. 2.3.1**

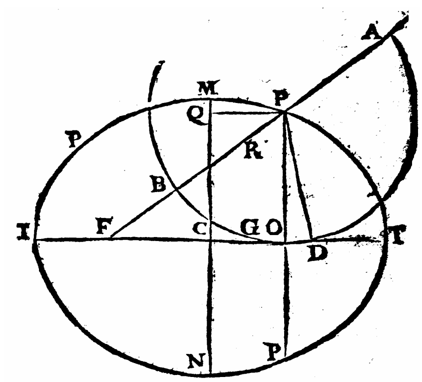



**Fig. 2.3.2**

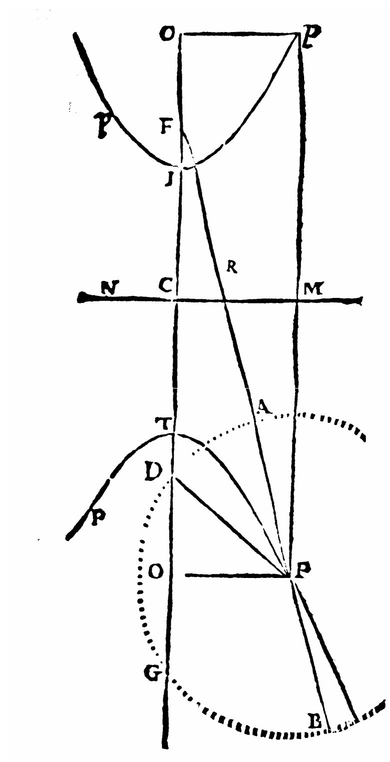



**Fig. 2.3.3**

$\dfrac{PO^2}{IO \times OT} = \dfrac{IF \times FT}{CT^2} = \dfrac{NM^2}{IT^2}$ et pour l'hyperbole (Fig. 2.3.3) $\dfrac{PO^2}{IO \times OT} = \dfrac{IF \times FT}{CT^2}$.

Pour les trois sections c'est le résultat contenu dans la première proposition du chapitre correspondant.[133] La Hire définit le paramètre de l'axe principal pour chaque courbe. C'est le double de la distance *FD* pour la parabole, la troisième proportionnelle des deux axes

[132] Nous appellerons « axe principal » le seul axe pour la parabole, le grand axe pour l'ellipse et l'axe déterminé pour l'hyperbole. La Hire n'utilise pas ce terme et il utilise séparément les termes grand axe et axe déterminé pour l'ellipse et hyperbole respectivement.

[133] Nous allons distinguer les propositions concernant la parabole l'ellipse et l'hyperbole par la première lettre (P, E, H) du nom de chaque conique. Donc par exemple H7 sera la septième proposition pour l'hyperbole.

pour l'ellipse et le segment $TV = 2 \times Tu$ où $\frac{CT}{Tu} = \frac{CT^2}{IF \times FT}$ pour l'hyperbole. Ces définitions correspondent aux définitions du <u>latus rectum</u>[134] chez Apollonius. De même La Hire définit la <u>figure</u> pour l'ellipse et pour l'hyperbole et exprime le symptôme en termes géométriques de figure de section. Pour l'ellipse il formule, en plus, le symptôme par rapport au petit axe.

### La tangente aux extrémités de l'axe principal

Ensuite dans les propositions P2, E7, H5 La Hire observe le fait trivial, qu'une droite menée perpendiculairement au grand axe à l'extrémité de cet axe est tangente à la conique.

### Les propriétés des diamètres

Une autre observation triviale est que les diamètres de la parabole ne rencontrent la parabole qu'en un point (P3), tandis que les diamètres de l'ellipse et les diamètres déterminés

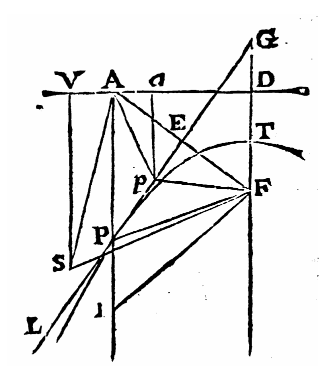



**Fig. 2.3.4**

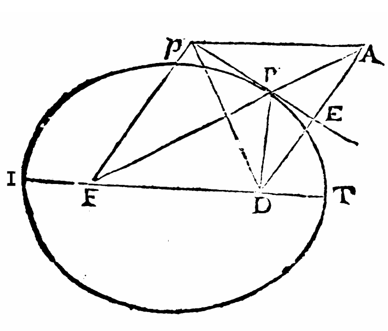



**Fig. 2.3.5**

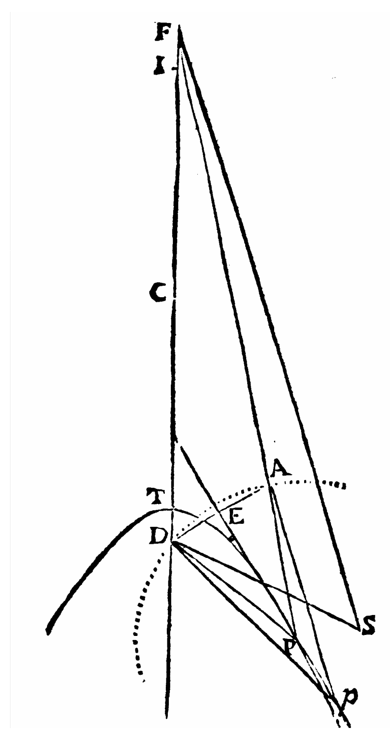



**Fig. 2.3.6**

[134] ὀρθία πλευρά, *Coniques* I.11.

de l'hyperbole rencontrent la courbe en deux points qui ont la même distance du centre.

### Construction d'une tangente à la conique

La Hire donne une construction très élégante de la tangente de la conique en un point donné. Soit $P$ un point donné sur la conique et définissons le point $A$ de la manière suivante. Pour la parabole (Fig. 2.3.4) c'est la projection orthogonale de $P$ sur la directrice, pour l'ellipse (Fig. 2.3.5) et l'hyperbole (Fig. 2.3.6) on choisit un des foyers $F$, on mène la ligne droite $FP$ et on définit le point $A$ comme le point de la ligne droite $FP$ qui est à la même distance du point $P$ que l'autre foyer $D$ ( $PA = PD$ ). Pour l'hyperbole le point $A$ doit être entre $F$ et $P$, tandis que pour l'ellipse il doit être en dehors de ce segment. La médiante $EP$ du segment $AD$ est la tangente à la conique au point $P$.

Il est évident que le point $P$ appartient à cette médiante. Montrons que les autres points de la ligne $PE$ n'appartiennent pas à la conique. En effet si nous supposons $p \in PE$, $p \neq P$ nous obtenons pour la parabole l'inégalité $pF = pA > pa$, pour l'ellipse l'inégalité $pF + pD = pF + pA > PF + PA = PF + PD$ et pour l'hyperbole l'inégalité $pF\text{-}pD = pF\text{-}pA < PF\text{-}PA = PF\text{-}PD$, donc le point $p$ ne satisfait pas à la condition qui définit la courbe.

Pour la parabole et l'hyperbole, pour satisfaire à la définition de la tangente, il faut encore démontrer que les points d'un des demi-plans séparés par la ligne droite $DE$ n'appartiennent pas à la conique. La démonstration se déroule de la même manière, les inégalités pour le point $p$ supposé dans un des demi-plans étant valables a fortiori.

### L'unicité de la tangente

La construction de la tangente est complétée par la démonstration du fait que la ligne droite $PE$ est bien la seule tangente au point $P$. Pour cela, supposons l'existence d'une autre tangente $Pg$ pour la parabole (Fig. 2.3.7) et $Ph$ pour l'ellipse (Fig. 2.3.8) et l'hyperbole (Fig. 2.3.9). Par un des foyers ($F$ pour la parabole et $D$ pour l'ellipse et l'hyperbole) construisons la perpendiculaire à cette tangente ($Fa$ pour la parabole et $Da$ pour l'ellipse et l'hyperbole). Maintenant construisons la médiante $ep$ de cette ligne droite. D'après la

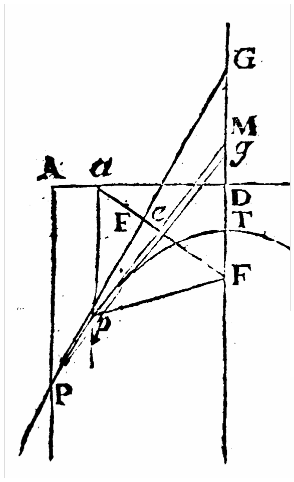



Fig. 2.3.7

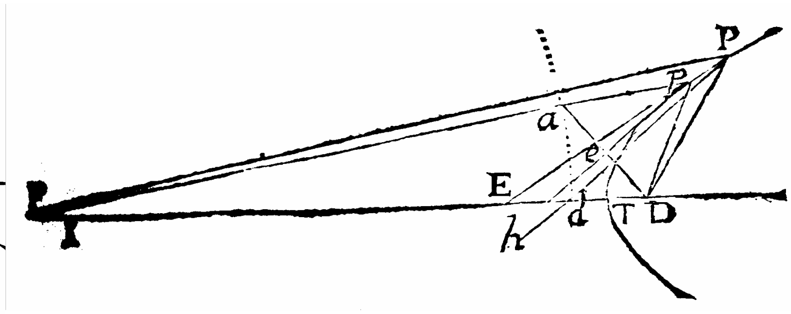



Fig. 2.3.9

construction précédente elle sera tangente à la conique en quelque point $p \neq P$ de la conique. De l'existence de ces deux tangentes parallèles une contradiction est facilement déduite.

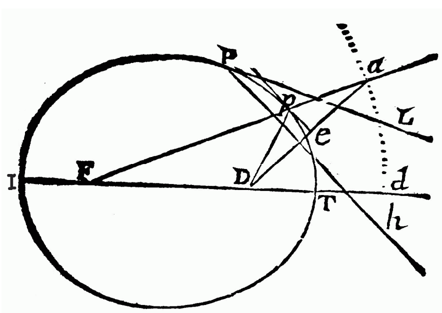



Fig. 2.3.8

### Les rayons issus d'un foyer se reflètent dans l'autre foyer

A partir de la construction de la tangente il est tout de suite clair que les segments joignant le point $P$ et les foyers (ou une perpendiculaire à la directrice) forment les mêmes angles avec la tangente.

### Intersection d'une tangente avec l'axe

Un autre résultat qui est obtenu à partir de la définition d'une manière directe, même si elle est techniquement un peu longue, est la détermination du point de l'axe par lequel passe la tangente au point donné. Soit $O$ le pied de l'ordonnée en point $P$ et appelons $G$ dans le cas de la parabole (Fig. 2.3.10), $H$ dans le cas de l'ellipse (Fig. 2.3.11) et de l'hyperbole (Fig. 2.3.12), l'intersection de la tangente avec l'axe principal. Nous obtenons $GT = OT$ pour la parabole et $\frac{CO}{CT} = \frac{CT}{CH}$ ce qui implique *Harm(IOTH)* pour l'ellipse et *Harm(OTHI)* pour l'hyperbole.

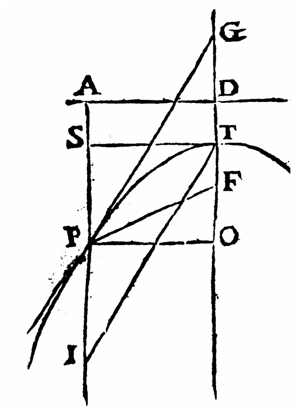



Fig. 2.3.10

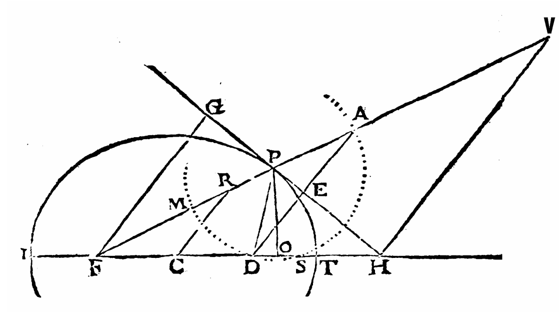



Fig. 2.3.11

Pour l'ellipse La Hire fait la même chose par rapport au petit axe. Pour le cas de l'hyperbole ce résultat est rapporté à la dernière proposition, car La Hire n'en a pas besoin pour le changement du diamètre[135].

### Le passage vers le nouveau diamètre

Après ces résultats qui sont des applications assez directes des définitions et qui décrivent, en fait, la conique par rapport à l'axe principal, La Hire passe à la partie la plus difficile, à savoir à la description de la conique par rapport à un diamètre quelconque. Il en dit dans la préface

> "La démonstration que j'en donne a quelque rapport avec celle des Anciens, mais elle est beaucoup plus simple"

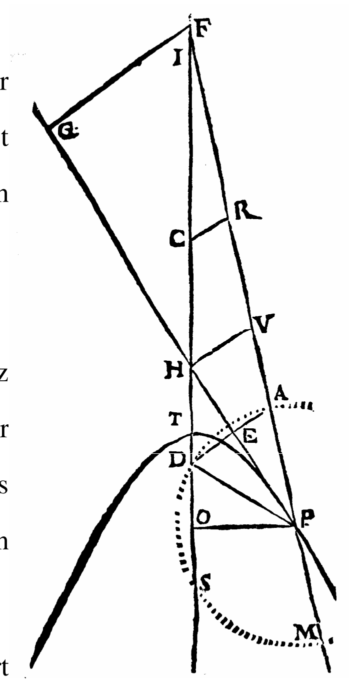



Fig. 2.3.12

En réalité pour la parabole (propositions P10-P12) et pour l'ellipse (propositions E13-E15) il utilise tout à fait la même méthode qu'Apollonius.[136] La Hire profite uniquement du fait que son point de départ est l'expression du symptôme par rapport à l'axe, et non pas

[135] Voir plus loin pour la manière de passer au nouveau diamètre pour le cas de l'hyperbole.
[136] *Coniques* I.41-I.50

par rapport à un diamètre quelconque comme chez Apollonius, ce qui lui permet de présenter cette méthode d'une manière plus élégante.

Par contre, pour l'hyperbole La Hire utilise une tout autre méthode. Il se sert des asymptotes et trouve d'abord une expression de l'hyperbole par rapport à elles et ensuite il passe à un diamètre quelconque. Cela lui permet, bien entendu, de développer en même temps les propriétés des asymptotes.

Pour ces raisons, nous nous bornerons à présenter simplement le résultat obtenu par La Hire pour la parabole et l'ellipse, sans démonstrations. Par contre, nous présenterons en détail sa méthode pour le passage de l'axe vers un nouveau diamètre pour le cas de l'hyperbole.

### Le passage au nouveau diamètre pour la parabole et pour l'ellipse

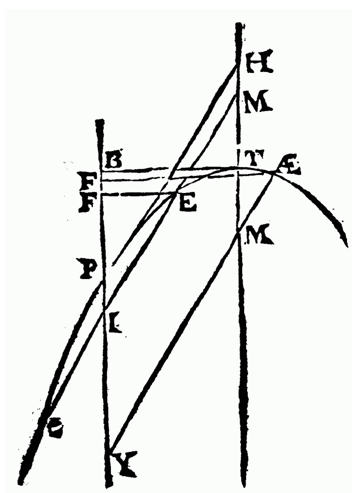



Fig. 2.3.13

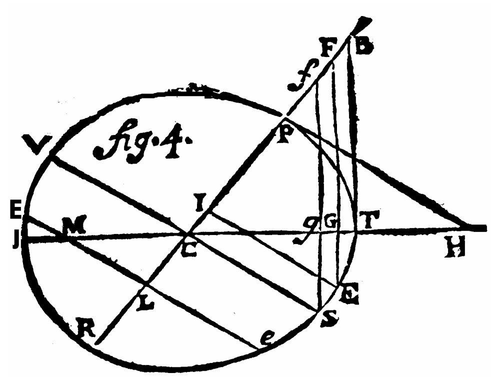



Fig. 2.3.14

D'abord, en utilisant la même démarche qu'Apollonius, La Hire démontre dans les théorèmes P13 et E16 qu'un diamètre quelconque $PI$ divise en deux parties égales tous les segments parallèles à la tangente au sommet $P$ du diamètre.

Ensuite, dans les propositions P14 et E16, il démontre le symptôme par rapport à un diamètre $PI$ quelconque. Pour la parabole (Fig. 2.3.13) il obtient $\frac{EI^2}{ÆY^2} = \frac{PI}{PY}$ et pour l'ellipse (Fig. 2.3.14) $\frac{EL^2}{RL \times LP} = \frac{VS^2}{RP^2}$.

### Le passage au nouveau diamètre pour l'hyperbole, étude des asymptotes

A partir de la proposition H9 pour l'hyperbole, La Hire change de direction dans son exposé pour cette courbe par rapport à l'ellipse et la parabole. En effet il développe les propriétés des asymptotes de l'hyperbole, dont certaines vont lui servir pour le passage au nouveau diamètre.

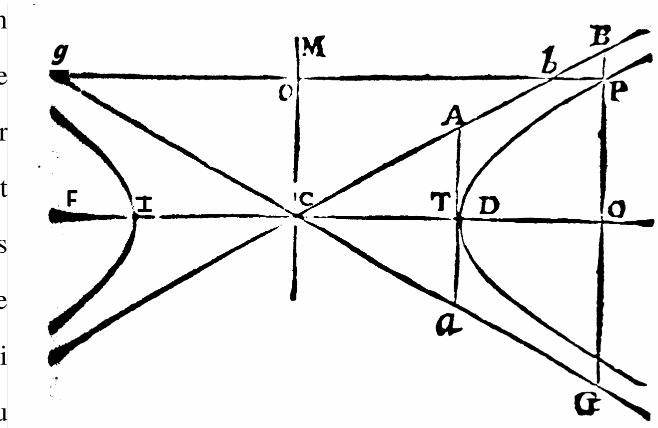



**Fig. 2.3.15**

Après le théorème H8 La Hire définit les asymptotes d'une manière tout à fait classique par la condition $TA^2 = Ta^2 = ID \times DT = IF \times FT$ (Fig. 2.3.15).

Ensuite, dans la proposition H9 il démontre, que pour une ligne droite quelconque $BG$ perpendiculaire à l'axe principal et qui coupe l'hyperbole au point $P$ nous avons $GP \times PB = TA^2$ ce qui est une valeur constante. Ce résultat est une conséquence directe de la définition des asymptotes et du symptôme pour l'axe. Cette expression de la conique a l'avantage, qu'elle peut être très facilement généralisée pour n'importe quelle direction de la sécante $GB$ et va donc servir pour le passage au nouveau diamètre.

La proposition H10 formule le même résultat par rapport au petit axe et est donc sans grand intérêt.

Dans la proposition H11 La Hire démontre comme conséquence immédiate de H9, que l'hyperbole approche infiniment les deux asymptotes.

Dans la proposition H12, La Hire démontre, en se servant de la proposition H9, que pour deux directions données, le produit des segments menés de n'importe quel point de l'hyperbole jusqu'aux asymptotes dans les directions données, reste constant. Autrement dit (Fig. 2.3.16), $AD \times AB = PF \times PH$ .

Pour le démontrer, La Hire mène par les points $A, P$ les perpendiculaires à l'axe $KL, GE$. Alors en considérant les triangles semblables $\Delta EPF \cong \Delta LAB$ et $\Delta PGH \cong \Delta AKD$ nous obtenons l'égalité

$$\frac{EP \times PG}{PF \times PH} = \frac{LA \times AK}{AB \times AD}$$

Mais par la proposition H9 $EP \times PG = LA \times AK$ et nous obtenons donc $PF \times PH = AD \times AB$.

C'est bien cette proposition qui est au fond l'expression la plus commode de l'hyperbole et qui permet d'obtenir facilement les symptôme par rapport à un diamètre quelconque.

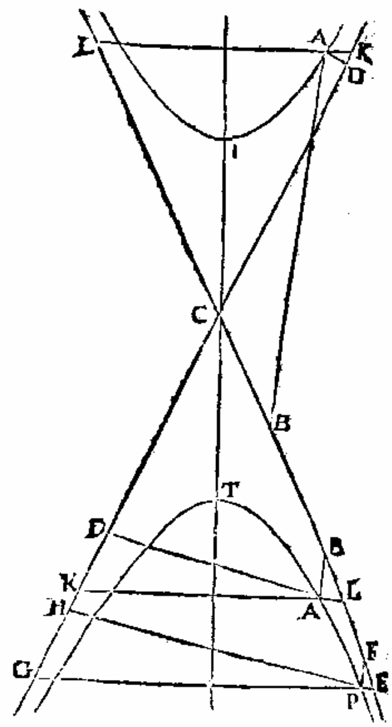


**Fig. 2.3.16**

Comme conséquence immédiate de ce résultat nous obtenons la proposition H13: Si une ligne droite coupe l'hyperbole en deux points et qu'elle rencontre les deux asymptotes, alors les deux segments entre l'hyperbole et chacune des asymptotes sont égaux. Donc par exemple pour la Fig. 2.3.17 nous avons $GF = ED$ et $ML = IK$.

Assez intéressante est la proposition H14 qui énonce qu'une tangente $BA$ à la parabole (Fig. 2.3.17) est divisée en deux parties égales au point de contact $T$.

La Hire démontre d'abord que cette tangente coupe les deux asymptotes, sinon l'hyperbole ne saurait approcher infiniment une des asymptotes, ce qui contredirait la proposition H11.

Ensuite il démontre que le point $T$ est au milieu du segment $BA$ car, autrement, le point $T'$, situé symétriquement sur la ligne $AB$, devrait appartenir à l'hyperbole à cause de la réciproque de H12.[137]

[137] La Hire suppose, d'une manière assez exceptionnelle, la validité de l'inverse d'un théorème sans le démontrer.

Dans la proposition H15 on démontre, comme un cas particulier de H12, la généralisation de la proposition H9 pour une direction quelconque de la sécante. Alors nous avons (Fig. 2.3.17) $BT^2 = AT^2 = ED \times EG = IK \times IM$.

Dans la proposition H19 on démontre que le diamètre $CT$ passe par les milieux des segments $FE$, $LI$ qui sont parallèles à la tangente $BA$ au point $T$. La démonstration est une combinaison de H13 et H14.

Alors il est aisé de démontrer dans la proposition H21 le symptôme pour un diamètre quelconque $CT$. Pour les parallèles avec la ligne $AB$, tangente à l'hyperbole au point $T$ nous avons

$$\frac{EN^2}{ON \times TN} = \frac{AT^2}{CT^2}.$$

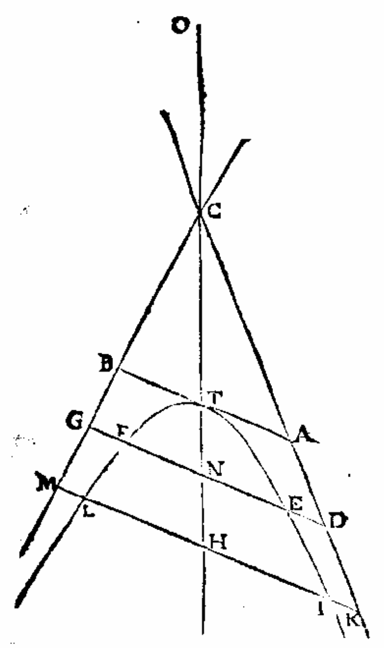


**Fig. 2.3.17**

La démonstration est la suivante: Par la similitude nous avons

$$\frac{DN^2}{TA^2} = \frac{CN^2}{CT^2} \text{ et donc } \frac{DN^2 - TA^2}{TA^2} = \frac{CN^2 - CT^2}{CT^2}$$

mais $TA^2 = GE \times ED$ et donc $DN^2 - TA^2 = DN^2 - GE \times ED = EN^2$; par ailleurs, $CN^2 - CT^2 = ON \times TN$ et nous obtenons le résultat énoncé.

Les propositions que nous n'avons pas citées contiennent les mêmes résultats présentés d'une manière différente et ne sont donc pas d'un grand intérêt.

### Deuxième série de définitions

L'expression des coniques par rapport à un diamètre quelconque mène à une deuxième série de définitions. La Hire définit les <u>ordonnées</u> à un diamètre quelconque:

> "On appelle ordonnées à un Diametre les lignes paralleles à la touchante qui passe par l'extremité de ce diamètre".

Il définit aussi d'une manière classique le paramètre pour le nouveau diamètre. Pour l'hyperbole et l'ellipse il définit de plus les diamètres conjugués et la figure pour le nouveau diamètre.

Toutes ces définitions sont présentes déjà chez les mathématiciens grecs.

### Les segments parallèles aux diamètres conjugués

La Hire termine son étude de l'ellipse et de l'hyperbole par un théorème (E20 et H23) sur deux lignes droites qui ont des directions conjuguées et qui coupent la conique.

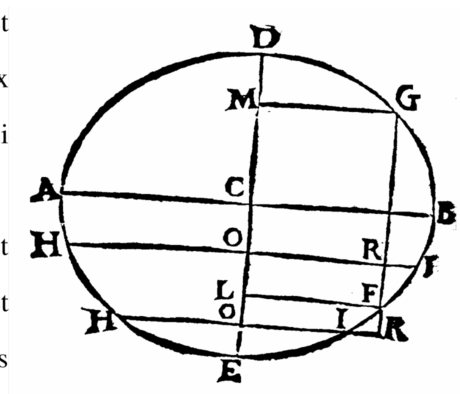



Fig. 2.3.18

Si les lignes droites $RH$ et $RG$ sont parallèles à deux diamètres conjugués $AB$ et $ML$ et qu'elles coupent l'ellipse ou l'hyperbole aux points $I, H$ et $F, G$ et qu'elles se coupent mutuellement au point $R$, qui peut être à l'intérieur ou à l'extérieur de la conique, nous avons pour l'ellipse (Fig. 2.3.18) $\frac{HR \times RI}{FR \times RG} = \frac{AB^2}{DE^2}$ et pour l'hyperbole (Fig. 2.3.19) $\frac{HR \times RI}{FR \times RG} = \frac{paramètre}{OT}$.

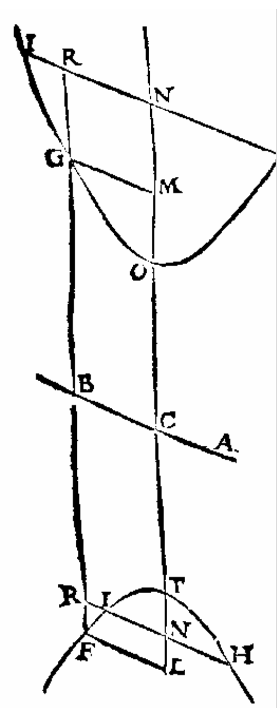



Fig. 2.3.19

Dans la démonstration on applique, d'une manière assez technique, le symptôme pour chacun des diamètres conjugués.

### Les théorèmes sur la parabole

La Hire donne deux propositions pour la parabole sans donner leurs analogues pour les coniques à centre. Ce sont les propositions P9 et P15.

Dans la proposition P9 il démontre la propriété suivante. Si $P$ est un point de la parabole (Fig. 2.3.20), $PM$ la normale en $P$ et $PO$ l'ordonnée à l'axe, alors la distance $OM$ est égale à la moitié du paramètre, et donc $OM = DF$ ne dépend pas du point $P$. Pour le démontrer, il suffit de réaliser que les triangles $\Delta POM$ et $\Delta ADF$ sont égaux, ce qui est la conséquence de la construction de la tangente $GP$ comme perpendiculaire à la ligne $AF$ (proposition P4).

Dans la proposition P15 on démontre, en se servant du symptôme, que la sous-tangente d'un diamètre quelconque est divisée en deux parties égales par l'extrémité du diamètre.

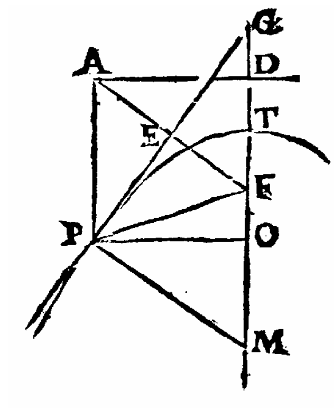



**Fig. 2.3.20**

### 2.3.2 Tableau sommaire de Nouveaux éléments

Nous pouvons résumer les résultats obtenus par La Hire pour chacune des trois sections coniques dans le tableau suivant: (pour les abréviations voir la note 133).

| | Parabole | Ellipse | Hyperbole |
|---|---|---|---|
| Définitions I | Foyer, Axe, Ordonnée à l'axe, Diamètre, Touchante | Foyers, Centre, Grand axe, Petit axe, Foyers, Ordonnée à un axe, Diamètre, Touchante | Foyers, Centre, Axe déterminé, Axe indéterminé, Foyers, Ordonnée à un axe, Diamètre, Touchante |
| Symptôme pour l'axe principal | P1 | E1, E2, E3, E4, E5 | H1, H3 |
| La perpendiculaire à l'extrémité de l'axe est une tangente | P2 | E7 | H5 |
| Les diamètres | Rencontrent la parabole en un seul point P3 | Sont divisés en deux parties égales par le centre E6 | Sont divisés en deux parties égales par le centre H4 |
| Construction de la tangente | P4 | E8 | H6 |
| Unicité de la tangente | P5 | E9 | H8 |
| Egalité des angles | P8 | E10 | H7 |
| Position de l'intersection de la tangente avec l'axe | P7 | E11, E12 | H24 |
| Lemmes pour le passage au nouveau diamètre | P10, P11, P12 | E13, E14, E15 | Définition des asymptotes + leur étude H9, H10, H11, H12, H13, H14, H15, H16, H17, H18 |
| Les ordonnées au nouveau diamètre | P13 | E16 | H19, H20 |
| Symptôme pour le nouveau diamètre | P14 | E17, E18, E19 | H21, H22 |
| Définitions II | Ordonnée à un diamètre, Paramètre d'un diamètre | Diamètres conjugués, Ordonnée à un diamètre, Paramètre d'un diamètre, Figure d'un diamètre | Diamètres conjugués, Ordonnée à un diamètre, Paramètre d'un diamètre, Figure d'un diamètre |
| Parallèles avec deux diamètres conjugués | | E20 | H23 |
| Propriétés de la parabole | P9, P15 | | |

### 2.3.3 Analyse des concepts et procédés utilisés

Nous voulons analyser plusieurs concepts et procédés qui sont explicitement ou implicitement présents dans la démarche de La Hire. Notamment nous nous intéresserons à sa définition des coniques et à leurs propriétés que La Hire présuppose.

Dans sa manière d'introduire les trois coniques il s'agit pour La Hire, de même que dans ses *Planiconiques,* de les générer point par point. Alors la première partie de l'exposé, pour chaque courbe, porte le titre "Génération de la Parabole" (Ellipse, Hyperbole).

Cette génération est indiquée, dans un premier temps, par la condition imposée à chaque courbe:

Parabole (Fig. 2.3.1)

> "Si il y a sur un Plan une ligne droite *AD* & un point *F* hors de cette ligne. Je dis que l'on peut trouver une infinité de points, comme *P P*; en sorte que la ligne *FP* menée du point *F* à chaque point *P* soit égale à *PA* menée du point *P* perpendiculairement à *AD*."

Ellipse (Fig. 2.3.2)

> "Si il y a sur un Plan une ligne droite *IT*, coupée en deux également au point *C*, & et les points *F*, *D*, sur la mesme ligne également éloignez du point *C*. Je dis que l'on peut trouver autant de points que l'on voudra comme *P*, en sorte que les deux lignes droites *PF*, *PD*, menées de ce point *P* aux deux points *F*, *D*, estant jointes ensemble, soient égales à *IT*."

Hyperbole (Fig. 2.3.3)

> "Si il y a sur un plan une ligne droite *IT* que le point *C* coupe en deux également; & les point *F, D* sur la même ligne prolongée des deux costez, & également éloignez du point *C*. Je dis que l'on peut trouver autant de points que l'on voudra, comme *P* ou *p*, en sorte que la ligne droite *PF* surpasse toujours *PD* de la grandeur de *IT*, ou bien que *pD* surpasse toujours *pF* de la mesme grandeur de *IT*."

Nous avons cité les conditions caractéristiques des trois coniques *in extenso*, non seulement pour avoir le détail de l'expression originelle de La Hire, mais également pour montrer l'équivalence de son usage des termes "une infinité de points" et "autant de points que l'on voudra".

La Hire ne se contente pas d'affirmer qu'on peut trouver une infinité de points qui satisfont à la condition proposée, mais complète sa définition par une construction explicite. Citons comme un exemple la construction que La Hire propose pour les points de la parabole:

> "De quel point l'on voudra de la ligne *AD*, comme *A* ayant mené *AP* perpendiculaire à *AD*, & ayant tiré *FA*; soit fait l'angle *AFP* égal à l'angle *FAP*; le point *P* sera l'un de ceux que l'on cherche, & ainsi à l'infiny."

Nous voyons donc que les points de la parabole correspondent aux points de la directrice. De la même manière, les points de l'ellipse et d'hyperbole correspondent à certains points de l'axe principal, même si cette correspondance n'est pas bijective, mais il y toujours deux points de la conique qui correspondent à un point de l'axe principal.

La Hire considère comme évidentes un certain nombre de conséquences de cette définition. Alors les points *P* forment une ligne courbe, cette ligne courbe a certaines symétries et, soit elle se prolonge à l'infini (pour la parabole et l'hyperbole), soit elle enferme un espace (pour l'ellipse). Par exemple, pour la parabole:

> "Par le point *F* ayant mené la ligne *FD* perpendiculaire à *AD*; il est évident que la ligne qui passera par les points *P* coupera *FD* en deux également en *T*; & que cette ligne *PPT* s'augmente à l'infiny, & qu'elle s'eloigne aussi à l'infini de la ligne *FD* prolongée vers *F*."

Ce n'est qu'à ce moment que La Hire donne son nom à cette ligne et définit donc la parabole.

> "La ligne *PPT* formée par les points *P* est appellée PARABOLE."

Nous voyons donc que d'une manière assez proche de celle *Des Planiconiques*, les courbes apparaissent comme étant formées par les points et les points eux mêmes sont générés par une construction géométrique. Cette construction géométrique est paramètrisée par les points d'une ligne droite (directrice pour la parabole, et l'axe principal pour l'ellipse et l'hyperbole). Sans l'exprimer explicitement, La Hire est alors de nouveau proche du concept d'une "transformation par le moyen d'une construction géométrique". Cette fois ci une ligne droite est transformée en une conique.

La Hire suppose, sans le démontrer, que le lieu des points qui peuvent être ainsi construits est une ligne courbe. Plus loin dans son ouvrage, quand il parle de la construction des tangentes, il fait même une allusion au fait que cette courbe divise le plan en deux parties et que les points de chaque partie correspondent à un sens de l'inégalité dans la condition qui définit la courbe.

D'autre part La Hire présuppose implicitement la forme de la courbe, comme nous pouvons le voir d'après sa définition des tangentes. En effet une tangente est définie pour l'ellipse comme "une ligne qui ne peut rencontrer l'ellipse qu'en un point" mais pour la parabole et l'hyperbole "une ligne qui ne rencontre l'hyperbole (parabole) qu'en un point & qui ne passe pas par dedans". Ainsi La Hire prévoit la forme de la courbe.

Tournons notre attention vers un autre extrait tiré de la préface de *Nouveaux éléments*:

> "... la description dont je me sers, qui est tirée de la principale proprieté des Foyers, n'a pour regle qu'une seule ligne égale à la somme dans l'Ellipse, & à la difference dans l'Hyperbole, de deux autres, qui sont tirées des deux Foyers à un point de la ligne que l'on décrit; & dans la Parabole la somme & la difference s'y trouvent tout ensenble; car outre son Foyer qui est déterminé sur l'axe, si l'on en suppose encore un autre à distance infinie sur l'axe & vers le dedans de la Parabole, il est évident que la somme des deux lignes qui seront menées à un des points de la Parabole à ces deux Foyers, sera égale à une mesme, qui sera menée du Foyer qui est à distance infinie

jusques à la ligne, qui estant perpendiculaire à l'axe, le rencontre en un point qui est autant éloigné de la rencontre de la Parabole que le Foyer a déterminé; & si l'on suppose un autre Foyer à distance infinie sur l'axe vers le dehors de la Parabole; il est aussi évident que la différence de deux lignes menées d'un des points de la Parabole à ce Foyer indéterminé, & à celuy qui est déterminé, sera partout égale à une mesme ligne."

Nous voyons encore que pour La Hire il s'agit d'une "description" qui est guidée par une propriété des foyers. Il s'agit aussi d'un des rares endroits où La Hire parle de l'infini. En effet il présente la parabole comme un passage entre l'ellipse et l'hyperbole. Ce point de vue est présent déjà chez Kepler, mais La Hire n'en tire aucun profit pour son étude.

### 2.3.4 Origine de *Nouveaux éléments* et leur rapport avec les autres travaux sur les coniques

Les *Nouveaux éléments* ont un rapport très étroit avec la *Nouvelle méthode*.[138] Déjà la ressemblance des titres indique une certaine proximité de ces deux ouvrages.

La Hire dit, lui-même, dans la préface des *Nouveaux éléments*:

"Il y a quelques années que je fis imprimer un Traité des Sections Coniques d'une nouvelle Methode, où je démontray leurs principales proprietez dans le Cone: mais ceux qui n'avoient pas assez d'habitude aux démonstrations des rencontres des plans & des solides, avoient de la peine à entendre celles qui y sont, quoy qu'elles soient fort simples, lorsqu'on les peut bien comprendre. Ce fut ce qui me donna occasion de chercher quelqu'autre maniere, où décrivant simplement ces lignes courbes sur un plan, & sans me servir du Cone, je puisse y démontrer les mesmes proprietez que dans le solide; & apres avoir tenté la Methode dont je me sers icy, comme la plus belle & la plus simple de toutes, je l'abandonnay, n'ayant pu surmonter pour lors toutes les difficultez que j'y rencontray, & je me contentay de réduire le Cone & ses Sections en plan, que je nommay Planiconiques, j'appliquay à

[138] Ce rapport n'a jamais été mis en évidence ni remarqué par les historiens des sciences.

> ces Sections planes les mesmes démonstrations que j'avois faites pour les solides, & je puis dire que cet Ouvrage eut assez de bon-heur pour meriter l'approbation des plus Sçavants Geometres."

Le désir de "décrire simplement ces lignes courbes sur un plan" ne nous semblait pas un motif suffisant pour la composition *Des Planiconiques*,[139] car la méthode y utilisée est, elle même, assez difficile à comprendre. En effet, elle traduit les constructions spatiales dans le plan.

Par contre, les *Nouveaux éléments* donnent une méthode d'étude des coniques purement plane et très simple. Ainsi ils sont une vraie simplification de la théorie des coniques, simplification qui permet de se passer des considération spatiales, difficiles pour les lecteurs.

La Hire a dû réellement constater chez les lecteurs de la *Nouvelle méthode* des difficultés à comprendre la géométrie en trois dimensions.[140] En effet il en parle déjà dans sa préface aux *Planiconiques* et de nouveau dans sa préface aux *Nouveaux éléments.* Son souci pédagogique y est affirmé explicitement:

> "Mais quoy qu'il soit tres-avantageux de plaire aux Sçavants, on ne doit pas en faire le principal objet de l'étude, & négliger entierement d'instruire ceux qui ont la volonté d'apprendre, & je croy qu'ils doivent estre contents lorsqu'on leur donne des voyes differents pour venir à un mesme but, car chacun en peut choisir une suivant son inclination & la portée de son genie."

Le caractère d'un manuel qui a pour but d'initier l'élève aux éléments des sections coniques est accentué par la citation des connaissances supposées et par le résumé des propriétés des coniques qui sont contenues dans les *Nouveaux éléments*:

[139] Voir le chapitre 2.2

[140] Cette difficulté est très ancienne, car déjà la géométrie grecque est, avec quelques exceptions, une géométrie plane. Par exemple, dans les Coniques d'Apollonius on se contente de trouver le symptôme par les procédés dans l'espace et ensuite il développe la théorie des coniques dans le plan. De nos jours, nous rencontrons des difficultés à imaginer la géométrie en trois dimensions chez les élèves du secondaire.

> "Dans les propositions dont je me sers, je ne cite que la composition, la division, & égalité de raison, supposant celles qui ne font que changer l'ordre des termes, sans les nommer, & je comprens mesme la conversion de raison dans la division."

> "On trouvera dans ce Traitté ce qu'il y a de plus utile dans le premier Livre d'Apollonius, les proprietez des Asymptotes du second, avec les premieres Propositions du troisiéme, & celles des Foyers qui y sont les plus considerables."

D'après son habitude La Hire n'oublie pas d'insister sur l'utilité de la théorie des coniques pour les autres sciences:

> "Ce sont ces proprietez qui ont le plus grand usage dans la Geometrie mais sur tout dans la Catoptrique, la Dioptrique, & l'Astronomie."

*Nouveaux éléments des sections coniques* peuvent donc être vus comme une continuation directe des éléments de la géométrie. Comme en témoigne la préface, La Hire présuppose uniquement la connaissance des six premiers livres des éléments d'Euclide.

Nous devons constater, que La Hire a atteint son objectif. Sa méthode est très simple et très bien présentée. Le livre pourrait encore aujourd'hui servir pour l'initiation aux coniques. D'ailleurs c'est exactement la méthode inventée par La Hire qui est actuellement souvent utilisée dans l'enseignement. Remarquons encore, que les *Nouveaux éléments* sont recommandés par Newton comme un chemin très accessible pour celui qui veut s'initier à la théorie des coniques.[141]

Nous voyons, donc, que les *Nouveaux éléments* ont été inspirés par la *Nouvelle méthode* comme un procédé plus accessible pour le lecteur. Mais nous montrerons qu'il y un rapport encore plus étroit entre ces deux ouvrages.

[141] Il s'agit d'une lettre de Newton à Richard Bentley écrite probablement en juillet 1691 dont nous extrayons: "Next after Euclid's Elements the Elements of ye Conic sections are to be understood. And for this end you may read either the first part of ye Elementa Curvarum of John De Witt, or De la Hire's late treatise of ye conic sections, or Dr Barrow's epitome of Apollonius".

En effet la démarche de *Nouveaux éléments* a une relation directe avec certaines propositions de la *Nouvelle méthode.* La Hire, d'une certaine manière, inverse le sens de la déduction entre les propositions et prend pour la définition de la conique la propriété qu'il avait démontrée à la fin de sa *Nouvelle méthode.*[142]

Pour la parabole il s'agit de la proposition XXI qui est la dernière concernant la parabole. Pour l'ellipse c'est la proposition XXIX et pour l'hyperbole la XXX, qui sont les deux dernières propositions du livre.

Pour arriver à ces propriétés, la Hire procède dans la *Nouvelle méthode* de la manière suivante: Il se base sur la proposition I qui est, comme nous l'avons vu, le fondement de tout son ouvrage. En se servant de cette proposition il démontre le symptôme des coniques dans la proposition XI pour la parabole et dans la proposition XIII pour l'ellipse et l'hyperbole. Ce symptôme est démontré par rapport à un diamètre quelconque.

La forme spéciale de symptôme - par rapport à l'axe - sert à La Hire pour développer les propriétés des foyers qui sont exposées dans les propositions XIX-XXI pour la parabole et dans les propositions XXII-XXX pour l'ellipse et l'hyperbole. D'abord il définit les foyers (prop. XIX et XXII), ensuite il démontre (prop. XX, XXVI) que la tangente en un point $P$ de la conique bissecte l'angle entre les segments joignant le point $P$ et les foyers (pour la parabole l'angle entre le segment joignant le point $P$ avec le foyer et la parallèle avec l'axe passant par le point $P$). Enfin dans la proposition XXI pour la parabole, XXIX pour l'ellipse et XXX pour l'hyperbole, il démontre les propriétés caractéristiques des foyers.

Dans les *Nouveaux éléments* La Hire inverse la démarche, comme on peut s'en rendre compte à partir du tableau dans la section 2.3.3. Ainsi en partant des propriétés caractéristiques des foyers, il arrive aux symptômes par rapport à l'axe. Ensuite La Hire utilise la méthode d'Apollonius pour passer à un diamètre quelconque.

Pour le cas de l'hyperbole uniquement La Hire invente un procédé original. Ce procédé est évidement en rapport avec les propositions III-VIII de la *Nouvelle méthode,* dans

[142] Dans ce qui suit nous noterons les propositions de la *Nouvelle méthode* par des chiffres romains pour éviter la confusion avec les propositions des *Nouveaux éléments.*

lesquelles La Hire étudie les propriétés des asymptotes de l'hyperbole. Nous avons vu au 2.1 que ces propositions sont, d'une certaine manière, entrelacées dans la structure de l'ouvrage.

Pour ce qui concerne le rapport de *Nouveaux éléments* avec les autres travaux de La Hire, soulignons surtout le fait que les propriétés des foyers ont servi à La Hire pour donner les constructions des coniques. A la fin de son ouvrage La Hire présente cinq constructions des trois coniques. Ces mêmes constructions sont présentées de nouveau dans *Sectiones conicae* et sont réutilisées dans quelques articles de La Hire. Nous parlerons de ces méthodes dans le chapitre 3.1.

Nous avons vu que la rédaction des *Nouveaux éléments* a été inspirée, au moins partiellement, par des objectifs pédagogiques. La Hire y démontre, d'une manière purement plane, les propriétés élémentaires des coniques.

Cette méthode est, d'une manière très étroite, liée au contenu de la *Nouvelle méthode* de 1673. La Hire inverse la structure déductive des propriétés démontrées. Alors il change les définitions des courbes, et d'une manière simplifiée obtient les propriétés des trois coniques, dont le symptôme, par rapport à un diamètre quelconque.

Cette méthode a donné également naissance à plusieurs constructions des coniques, qui seront utilisées plus tard dans les travaux de La Hire.

Cet ouvrage a été très bien reçu par le lecteurs et la méthode qui y est exposée est utilisée encore de nos jours. Alors ce livre, très bien écrit du point de vue pédagogique, peut être utilisé encore actuellement.

## 2.4 Méthode analytique

Philippe de La Hire n'a pas donné une étude systematique des sections coniques en utilisant la méthode analytique. Par contre, il s'est servi à plusieurs occasions de cette méthode pour résoudre des problèmes particuliers. La plus remarquable est sa solution du problème qui consiste à trouver les normales d'un point donné à une conique donnée.

Nous nous bornerons à présenter cette solution qui montre suffisamment la manière dont La Hire se servait, d'ailleurs assez rarement, de cette méthode dans la solution des problèmes.

### 2.4.1 Construction des normales

A la fin de son traité *La construction ou effection des équations*[143] publié en 1679 La Hire se propose, pour donner l'exemple de la méthode, de résoudre le problème qu'il énonce de la manière suivante:

> "Un point estant donné dedans ou en dehors d'une Section Conique & sur un mesme plan; il faut mener une ligne perpendiculaire à la Section, c'est à dire une ligne qui fasse un angle droit avec la touchante par le point de rencontre de la ligne menée & de la Section, et en se servant que du Cercle & de la Section Conique donnée."

La Hire donne la solution uniquement pour l'hyperbole en le considérant comme le plus difficile. Nous reproduisons cette solution en gardant l'usage de La Hire de noter les puissances en répétant la lettre (par exemple $xxx$ au lieu de $x^3$ etc.)

[143] Cet ouvrage a pour le sujet la construction des solutions des équations par l'intersection des courbes du degré inférieur.

Dans un premier temps La Hire analyse le problème. Le résultat de cette analyse est une équation du quatrième degré.

Il suppose qu'une hyperbole (Fig. 2.4.1) et un point $A$ sont donnés et il faut mener les normales à l'hyperbole par le point $A$. La ligne $EG$ est l'axe de l'hyperbole, le point $O$ son centre, les points $G, E$ ses sommets et $EL$ son paramètre.

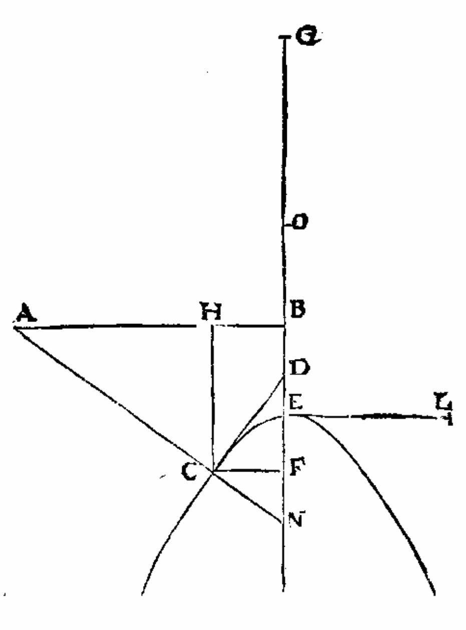



**Fig. 2.4.1**

Dans la situation de la figure La Hire note les distances de la manière suivante:

$$AB = a\,,\ BE = d\,,\ OE = r\,,\ EL = 2s\,.$$

Nous voyons que La Hire utilise les "cordonnées" dont l'une a la direction de l'axe et l'autre lui est perpendiculaire. L'origine du système est un des sommet $E$ de l'hyperbole. Maintenant pour un point $C$ de l'hyperbole La Hire note

$$FE = x\,,\ CF = y$$

et il cherche l'équation que doit satisfaire $x, y$ pour que la ligne $AC$ soit une normale de l'hyperbole.

La Hire obtient une première équation en se servant de la propriété des tangents de l'hyperbole:

$$\frac{OF \times FD}{CF^2} = \frac{2OE}{EL} \qquad (1)$$

De la propriété de la normale, à cause des triangles semblables, nous avons $\frac{CH}{HA} = \frac{NF}{FC} = \frac{FC}{FD}$ et donc $FD = \frac{aa - yy}{d + x}$. En substituant dans l'équation (1) nous obtenons en termes analytiques:

$$\frac{\dfrac{ray - ryy - xay - xyy}{d + x}}{yy} = \frac{r}{s}$$

et en simplifiant:

$$y = \frac{sra + sxa}{dr + xr + sr + sx} \qquad (2)$$

De plus, le symptôme de la parabole nous donne:

$$\frac{2rx + xx}{yy} = \frac{r}{s} \qquad (3)$$

Pour résoudre le système des équation (2)+(3) La Hire substitue (2) dans le (3) et après l'introduction des nouvelles constantes pour simplifier l'équation:

$$p = d + s\,,\ q = r + s\,,\ m = \frac{rp}{q}\,,\ nn = \frac{rsaa}{qq}$$

il obtient l'équation:

$$x^4 + x^3(2r + 2m) + x^2(4rm + mm - nn) + x(2rmm - 2rnn) - rrnn = 0 \qquad (4)$$

Maintenant La Hire se propose de trouver une solution de cette équation. Il sait qu'en général il peut trouver la solution d'une équation du quatrième degré par l'intersection d'une conique et d'un cercle. Son astuce consiste dans le fait qu'il arrive a trouver la solution en utilisant l'intersection d'un cercle et de l'hyperbole de départ. Sa solution consiste en manipulations assez compliquées avec les coefficients de l'équation (4).

Il définit des nouvelles constantes. Dans un premier temps il définit les constantes $f, g, h, l$ :

$$f = 2r + 2m\,,\ fg = 4rm + mm - nn\,,\ ffh = 2rmm - 2rnn\,,\ ffll = rrnn$$

pour obtenir l'équation (4) dans la forme

$$x^4 + x^3 f + x^2 fg + xffh - ffll = 0 \qquad (5)$$

Ensuite La Hire définit les constantes $b, e, c$ :

$$bb = fg - \frac{1}{8}ff\,,\ bbe = \frac{1}{8}fff - \frac{1}{2}ffg + ffh\,,\ bbec = \frac{1}{16}fffg - \frac{3}{256}ffff - \frac{1}{4}fffh - ffll$$

De cette manière l'équation ne contient que les constantes $f, b, e, c$ . Enfin il définit

$$\pi = \frac{br}{s} - b \text{ et } kk = \frac{\pi bbrr + bbbrr}{2\pi bb + bbb + \frac{5}{4}\pi\pi b + \frac{1}{4}\pi\pi\pi + \pi ec + bec - \frac{1}{4}bea}.$$

dans cette situation il construit les points $P, R, S$ (Fig. 2.4.2) en donnant les distances:

$$OP = k + \frac{\pi k}{2b}, \; PR = \frac{ek}{2(\pi + b)}, \; RS = \frac{ek}{2b}$$

et construit le cercle avec le centre $S$ et rayon $SV = \sqrt{\frac{eckk + \frac{1}{4}eekk}{bb}}$. Les intersections de ce cercle avec l'hyperbole sont notées $V$ et en choisissant un de ces points on mène la perpendiculaire à l'axe $VK$. La distance $VI$ est notée $\varsigma$ et la distance $RI$ est notée $\varepsilon$. Enfin La Hire définit $z = \frac{\varsigma b}{k}$ et alors la solution de l'équation (4) sera $x = z - \frac{1}{4}f$.

Les autres intersections du cercle avec une ou l'autre des branches de l'hyperbole donnent les autres solutions de l'équation (4).

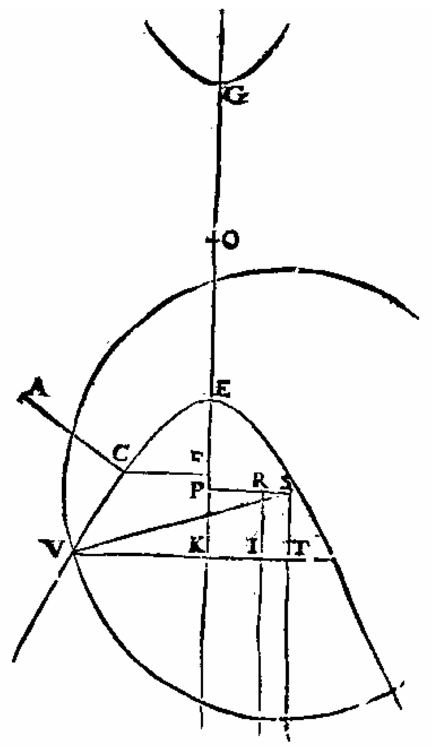



**Fig. 2.4.2**

### 2.4.2 La méthode analytique et les méthodes classiques

L'usage par La Hire de la méthode analytique repose essentiellement, comme nous l'avons vu, sur une très habile manipulation des équations, ce qui lui permet de résoudre les équations par les intersections des courbes les mieux adaptées à son propos.

Même si La Hire avait une bonne maîtrise de la méthode analytique, dans ses traités théoriques il a préféré les méthodes synthétiques de démonstration. En effet, son oeuvre la plus importante sur les coniques, les *Sectiones conicae*, se base sur les méthodes synthétiques projectives que nous avons présentées au chapitre 2.1. Dans ses traités théoriques La Hire utilisait la méthode analytique plutôt pour en donner un exemple.

Dans ses articles concernant les applications de la géométrie, La Hire par contre utilise assez souvent la méthode analytique et la notation algébrique pour présenter et démontrer les résultats. Nous pouvons remarquer un tel usage, par exemple, dans ses articles concernant certains problèmes d'architecture - voir le chapitre 3.4.

Il est très probables que La Hire a considéré les méthodes synthétiques comme plus pures et les méthodes analytiques, en revanche, plus souples et plus facilement compréhensibles pour un public non nécessairement composé de spécialistes en géométrie.

# 3 Constructions et applications des sections coniques

Depuis la Renaissance la géométrie se renouvelle en rapport étroit avec les arts, l'architecture et le développement des techniques. La perspective en particulier est devenue un sujet à cheval entre la pratique artistique et une réflexion scientifique. L'histoire de la perspective a été assez bien étudiée. Même sa théorie mathématique est devenu sujet de plusieurs études - voir par exemple [Field, J.V. 1987], [Field J.V. 1988], [Kemp, M. 1990] ou les articles de K. Andersen dans la bibliographie générale.

La problématique inverse, à savoir l'influence des pratiques artistiques sur la naissance des notions purement géométriques a été beaucoup moins étudiée. Il est pourtant clair que plusieurs de ces disciplines sont étroitement liées aux sections coniques. Il s'agit de l'astronomie, particulièrement de la construction des astrolabes, de la gnomonique, de la balistique, de la construction des arcs dans l'architecture etc.

Il est extrêmement important pour notre sujet que La Hire se place tout à fait dans la tradition, commencée à la Renaissance, des savants étant en même temps artistes, techniciens et géomètres. Il nous semble que La Hire soit très versé dans ces trois activités, même si ce sont ses activités scientifiques qui prévalent.[144]

Les applications des sections coniques sont alors très importantes pour comprendre la géométrie de La Hire. Ces applications sont chez lui étroitement liées à la problématique des constructions des coniques. Nous commencerons, donc, cette partie par la présentation de cette problématique chez La Hire. Ensuite nous consacrerons un chapitre à chacune des applications des sections coniques que nous trouvons chez lui.

## 3.1 Constructions des coniques

La Hire donne une construction de la parabole déjà dans son tout premier mémoire mathématique intitulé *Sur les points d'attouchement* datant de 1672. Cette construction est reprise dans les *Nouveaux éléments* en 1679, et La Hire y ajoutte les constructions de l'ellipse et de l'hyperbole.

[144] Voir le chapitre 1.1 pour les influences qu'il a pu subir dans sa famille et le chapitre 2.1 pour une vue d'ensemble sur sa production scientifique.

Enfin le livre IX de *Sectiones conicae*, que nous présenterons plus loin, est entièrement consacré aux constructions des coniques. Nous y retrouvons entre autres, les constructions plus anciennes. C'est pourquoi nous suivrons dans notre présentation ce livre IX des *Sectiones conicae*.

### 3.1.1 Préférence de La Hire pour les constructions point par point

La Hire préférait les constructions point par point des sections coniques aux constructions mécaniques obtenues par le mouvement continu d'un instrument.[145] Nous pouvons lire**,** à ce propos**,** les lignes suivantes dans les *Nouveaux éléments*:[146]

> "Les descriptions des lignes courbes que l'on fait sur un plan par des mouvements continus d'un point, avec des machines, sont si sujettes à l'erreur, qu'il ne faut s'en servir qu'une fois pour en estre entierement rebuté: c'est pourquoi je suis persuadé que pour ces descriptions on ne doit chercher qu'une tres grande quantité de points, avec quelque manière aisée, par lesquels on puisse tracer la ligne courbe que l'on souhaite; & comme il arrive souvent que l'on n'a besoin que d'une petite partie de cette ligne, on peut trouver en cet endroit un si grand nombre de points, que l'on ne peut faire aucune faute considérable en la traçant par tous les points trouvez."

Cette citation nous confirme, une fois de plus, que les constructions de La Hire n'étaient pas des exercices purement théoriques, mais qu'elles devaient réellement servir pour les applications.

### 3.1.2 Constructions dans le livre IX de *Sectiones conicae*

Le livre IX contient douze propositions contenant des constructions des sections coniques. Les neuf premières se réfèrent aux propriétés élémentaires des sections coniques dont le symptôme, propriété élémentaire des foyers, et à celle des asymptotes. Les propositions 10, 11 et 12 sont basées sur des propriétés plus compliquées des foyers.

**Komentář [CSL2]:** À revoir par personne plus compétente !!

[145] Ces constructions ont été appelées organiques à cause de l'usage d'un instrument. Voir la note 33.
[146] Voir [La Hire, Ph. de 1673], page 157.

## Les constructions de la parabole

Les propositions 1 et 2 donnent deux constructions assez semblables de la parabole.

Dans la proposition 1 (Fig. 3.1.1) le diamètre $TD$, la tangente à son extrémité $T$ et le point $P$ de la parabole sont donnés. Pour la construction on marque les points 1,2,3,4... et $I, II, III, IV...$ dans des intervalles de grandeur arbitraire, égaux entre eux. Alors les intersections $T1 \cap PI$, $T2 \cap PII$, $T3 \cap PIII$ ... sont des points de la parabole. La démonstration, assez simple, est fondée sur les similitudes des triangles. Par exemple, pour le point $S$ nous avons

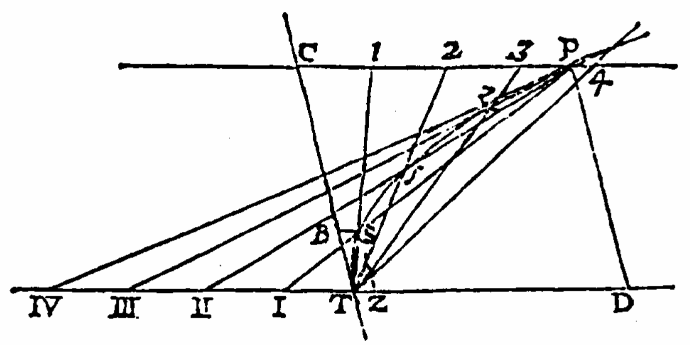



**Fig. 3.1.1**

$$\frac{BS}{C1} = \frac{TB}{TC} = \frac{TS}{T1} = \frac{TS}{TS + S1} = \frac{IT}{IT + 1P} = \frac{IT}{CP} = \frac{C1}{CP}$$

et donc

$$\frac{ZS^2}{DP^2} = \frac{TB^2}{TC^2} = \frac{BS^2}{C1^2} = \frac{BS}{C1} \cdot \frac{C1}{CP} = \frac{BS}{CP} = \frac{TZ}{TD}$$

ce qui est le symptôme de la parabole.

Cette construction a été d'abord publiée sans démonstration dans le mémoire *Sur les points d'attouchement* en 1672 et ensuite, avec la démonstration, dans les *Nouveaux éléments des sections coniques* en 1679.

Dans la proposition 2 (Fig. 3.1.2) le diamètre $AQ$, la tangente à son extrémité $A$ et le point $I$ de la parabole sont donnés. Pour la construction**,** on divise les segments $AE$ et $EI$ en un même nombre de parties égales aux points $B, C, D...$ et $F, G, H...$ et on mène par les points $B, C, D...$ les parallèles au diamètre. Alors les intersections des droites $BM \cap AF$, $CL \cap AG$, $DK \cap AH$ ... sont des points de la parabole. Pour le démontrer, prenons par exemple le point $M$ : nous avons $\frac{EF}{EI}=\frac{AB}{AE}=\frac{BM}{EF}$ et donc $\frac{MN^2}{QI^2}=\frac{AB^2}{AE^2}=\frac{BM^2}{EF^2}=\frac{BM}{EF}\cdot\frac{EF}{EI}=\frac{BM}{EI}$ ce qui est le symptôme de la parabole.

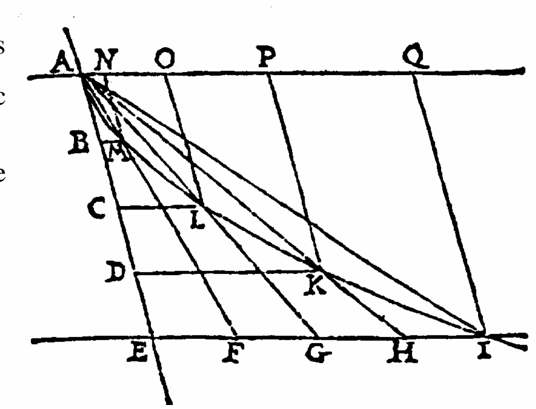



Fig. 3.1.2

## Les constructions de l'ellipse

Dans la proposition 3 (Fig. 3.1.3) il s'agit de construire l'ellipse dont nous avons les deux axes $AB$ et $DE$. A partir d'une extrémité $D$ de l'un des diamètres, on construit la perpendiculaire $DP$ à l'autre diamètre et on y marque le point $Q$ tel que $DQ = AC$, puis on trace la droite $CQ$. Ensuite on a deux possibilités pour continuer la constructions des points de l'ellipse.

La première possibilité consiste à mener par un point arbitraire $O \in DE$ la

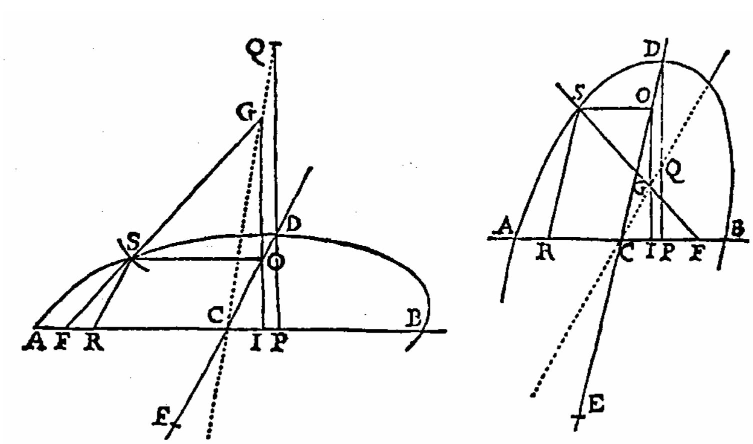



Fig. 3.1.3

perpendiculaire $OI$ au diamètre $AB$. L'intersection $OI$ avec $CQ$ est un point $G$. Si l'on décrit un cercle de centre $G$ et de rayon $AC$, son intersection $S$ avec parallèle passant par $O$ au diamètre $AB$ est un point de la section.

La seconde possibilité utilise le fait que, dans la première construction, la distance $GF$ est toujours égale à $QP$. Donc, en glissant un segment de longueur $QP$ sur les lignes droites $QC, CA$, le point $S$, dont la distance au point $G$ est égale à $AC$, décrira l'ellipse.

Pour démontrer la justesse de ces deux constructions, il suffit de considérer que nous avons grâce aux triangles semblables

$$\frac{CD^2}{SR^2} = \frac{CD^2}{CO^2} = \frac{DQ^2}{OG^2} = \frac{AC^2}{OG^2} = \frac{AC^2}{GS^2 - SO^2} = \frac{AC^2}{CA^2 - CR^2} = \frac{AC^2}{BR \times RA}$$

et donc $\dfrac{SR^2}{BR \times RA} = \dfrac{CD^2}{AC^2}$ ce qui est le symptôme de l'ellipse. En plus $\dfrac{GF}{AC} = \dfrac{GF}{GS} = \dfrac{GI}{GO} = \dfrac{QP}{QD} = \dfrac{QP}{AC}$ et donc $GF = QP$ ce qui justifie la seconde possibilité de construction.

**Komentář [CSL3]:** reformuler « considérer les triangles semblables qui nous donnent les égalités suivantes » ou « considérer que nous avons, grâce aux triangles semblables », ou …… à voir !

Dans le corollaire de cette proposition La Hire considère la situation où les deux diamètres sont en réalité les axes de l'ellipse (Fig. 3.1.4). Alors les droites $DP$ et $DC$ coïncident, $GF$ est égal à la somme (ou à la différence) des demi-axes. Alors dans la seconde possibilité de construction, le segment $GF$ glisse sur les axes. Cette construction est connu sous le nom de La Hire mais elle avait déjà été employée par Mydorge.[147]

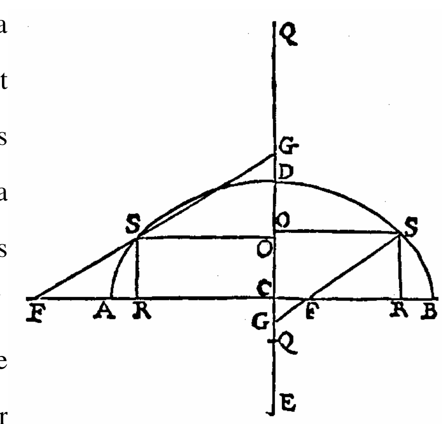



**Fig. 3.1.4**

Dans la proposition 4 (Fig. 3.1.5) La Hire construit une ellipse dont les deux axes sont connus, en se servant des deux cercles concentriques avec l'ellipse qui passent par ses sommets. On choisit une direction $CF$ qui coupe les cercles aux points $I, F$ par lesquels on mène les parallèles aux deux axes respectifs. L'intersection $H$ de ces parallèles est un point de l'ellipse. En effet

[147] [Mydorge, C. 1631-39].

$$\frac{LH^2}{DL\times LB}=\frac{LH^2}{LF^2}=\frac{CI^2}{CF^2}=\frac{CA^2}{CB^2}.$$

La proposition 5 est une légère variante de la même construction.[148]

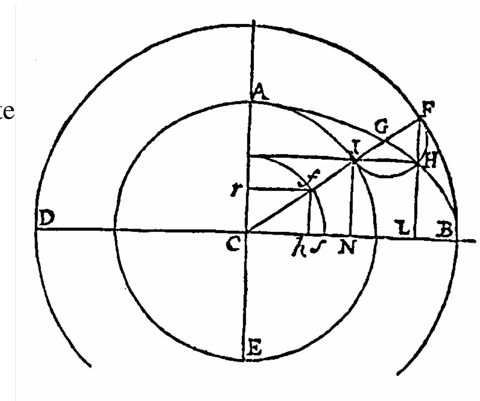



**Fig. 3.1.5**

### Constructions basées sur les propriétés des foyers

Dans les propositions 6, 7 et 8 les trois sections sont construites en application directe du fait que la parabole est le lieu des points qui ont la même distance au foyer et à la directrice, l'ellipse le lieux de points dont la somme des distances aux deux foyers est constante et l'hyperbole le lieux de points dont la différence des distances aux deux foyers est constante.

### Construction de l'hyperbole

Dans la proposition 9 (Fig. 3.1.6) La Hire construit une hyperbole dont les deux asymptotes et un point $P$ sont donnés. Il s'appuie sur le fait que $Dp = PM$ pour toutes les position du segments $DM$.[149]

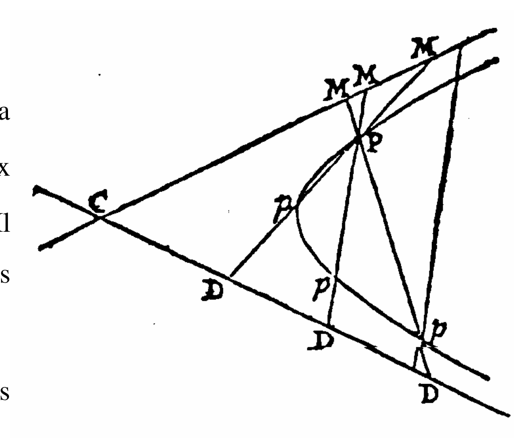



**Fig. 3.1.6**

Les constructions des propositions 10, 11 et 12 se basent sur des propriétés plus complexes des foyers, exigent des données très

[148] Cette construction a du faire partie des méthodes pratiques des architectes car nous la trouvons dans les traités d'architecture - par exemple [Serlio, S. 1545].
[149] Ce fait bien connu est démontré par La Hire, par exemple, dans les *Nouveaux éléments*. Voir la page 79.

spéciales, sont plus compliquées que les constructions présentées plus haut et ne sont pas d'un intérêt particulier.

## 3.2 Gnomonique

La gnomonique est, avec la perspective et la construction des astrolabes, une des disciplines pratiques étroitement liées au développement de la théorie des projections et des sections coniques. La Hire a présenté une méthode de construction des cadrans solaires d'abord, dans l'article "Manière universelle pour faire des Cadrans Solaires", publié en 1680 dans le *Journal des Savants*[150] et ensuite, en détail dans le livre publié en 1682: *La gnomonique, ou méthodes universelles pour tracer des horloges solaires ou cadrans sur toutes sortes de surfaces*[151], ouvrage qui a été revu et réédité par La Hire lui-même en 1698. Dans sa première édition de 1682, il s'agit d'un ouvrage in 8° contenant 196 pages (dont les tables des déclinaisons et différences de longitudes et latitudes des diverses villes par rapport à Paris) et 6 planches avec 33 figures.[152]

La méthode de La Hire est simple et, comme d'habitude, très bien présentée. Nous n'allons pas entrer en détail dans sa construction, mais retenir uniquement quelques points en rapport avec les sections coniques et les projections.

### 3.2.1 Les cadrans solaires et les sections coniques

Dans la préface de sa *Gnomonique*, nous trouvons page 4 un passage assez intéressant où La Hire parle du rapport entre la théorie des sections coniques et la construction des cadrans solaires:

> " ... Mais ces lignes horaires n'ont rien qui mérite d'estre considéré si on les compare à celles qui marquent le chemin que le Soleil fait dans ses éloignements de la ligne Equinoxale, qui sans doute ont donné lieu aux plus profondes méditations des sections du Cône; ce qui fait aujourd'huy la plus considérable partie de nôtre Géométrie spéculative.

[150] [La Hire, Ph. de 1680]
[151] [La Hire, Ph. de 1682]
[152] Nous trouvons à la fin de l'édition du 1682 la note suivante: "Ce traité de gnomonique ou l'Art de faire Cadrans, composé par M. de La Hire a été lu à l'Assemblée de l'Académie Royale des Sciences 9. May 1682, J.B.Homel - secrétaire".

> Je pourrois facilement démontrer que nous sommes redevables aux Horloges Solaires de la découverte de ces admirables lignes courbes dont nous trouvons de très grands usages dans toutes les parties des Mathématiques; car l'on ne peut considérer l'ombre de l'extrémité de quelque corps pointu sur une surface, sans s'apercevoir à mesme temps de la courbure que marque le chemin du Soleil, qui est très-semblable à celle de la section du cône droit qui auroit pour base un cercle parallèle à l'Equateur, dans lequel on peut supposer que le Soleil marche lors qu'il fait cette ombre, & dont le sommet est l'extrémité du corps qui fait l'ombre."

Ce discours témoignage de la conscience du rapport étroit existant entre la recherche théorique et les applications pratiques. De toutes façons les sections coniques furent très importantes, avec d'autres disciplines pratiques, pour les géomètres à partir du XVème siècle.

**Komentář [CSL4]:** application ?

Malgré cet étroit rapport, il n'est pas nécessaire, pour la pratique de la gnomonique**,** d'avoir des connaissances sur les coniques, à condition de pouvoir suivre les règles données par un géomètre. Alors La Hire avertit:

> "Mais quoyque les propriétez de ces lignes courbes servent de fondement à la plupart des descriptions des Cadrans, je ne prétens pas pourtant dans cet ouvrage en rien expliquer de particulier ... ."

### 3.2.2 Les cadrans solaires et les projections

Les deux premiers chapitres de la *Gnomonique* sont consacrés à la définition et à la description théorique des cadrans solaires. Dans le premier chapitre**,** La Hire définit la Sphère astronomique, où se trouvent des cercles primordiaux pour la définition de tous les éléments du cadran. Ensuite**,** dans le deuxième chapitre intitulé *De la définition des Cadrans ou Horloges Solaires, et des principales parties qui servent à leur construction* les éléments du cadran sont obtenus par la projection de la Sphère sur le plan du cadran. Nous allons citer et commenter quelques paragraphes de ce chapitre:

**Komentář [CSL5]:** Choisir plutôt « nécessaires », « primordiaux », « utilisés »……

"La distance qu'il y a du centre de la terre jusques à sa superficie n'estant pas considérable à l'égard de celle qu'il y a de la terre au Soleil, on peut prendre quel point on voudra sur sa superficie, & le considérer comme son centre par rapport au mouvement du Soleil."

Sans cette simplification, déjà habituelle à l'époque de La Hire, il serait pratiquement impossible de construire les diverses lignes du cadran, car les cônes de projection ne seraient pas droits et la position du sommet par rapport aux cercles serait difficile à déterminer.

"Si l'on pose donc un stile qui est une verge pointue sur quelque surface plane, & que l'on considère la pointe de ce stile comme le centre de la terre, les rencontres de cette surface avec les plans des cercles horaires, de l'Equinoxial ou Equateur, de l'horizon & des autres grands cercles, seront des lignes droites qui retiennent les noms des plans des cercles qui les produisent, toutes ces lignes sur cette surface plane avec le stile sont un *Cadran* ou une *Horloge Solaire.* L'ombre de la pointe du stile qui est un des points de l'axe, marquera les heures. Et si l'axe qui passe par l'extrémité de ce stile rencontre la surface du Cadran en quelque point, ce point est appellé le centre du Cadran, car il est évident que toutes les lignes des heures se rencontreront en ce point."

Car si l'on imagine l'extrémité du stylet au centre de la sphère, la projection de tous les grands cercles sur le cadran donne simplement les intersections des plans de ces cercles avec celui du cadran. Ces grands cercles sont donc représentés par des lignes droites sur le cadran solaire. Les plans des cercles horaires se coupent dans un axe de la sphère et par conséquent, les lignes horaires passent toutes par un même point du cadran - le centre.

**Komentář [CSL6]:** remplacer „stil » qui n'existe pas actuellement par « stylet ».

"Il est aussi évident que l'ombre de l'extrémité du stile marque les heures, & montre lorsque le Soleil rencontre quelqu'un des cercles de la Sphère; car quand le Soleil touche un grand cercle, l'ombre de l'axe est étendue dans le

> plan de ce cercle, si ce cercle passe par l’axe, & s’il n’y passe pas, l’ombre de l’extrémité du stile sera dans le plan de ce cercle, car les plans des grands cercles passent par l’extrémité du stile: Et si l’on concoit une superficie conique qui ait pour la base un petit cercle de la Sphère & pour sommet l’extrémité du stile, cette superficie conique rencontrera la surface du Cadran en une ligne courbe, en sorte que lorsque le centre du Soleil touchera le petit cercle qui est la base de la superficie conique, l’ombre de la pointe du stile touchera la ligne courbe qui est la rencontre de cette superficie avec la surface du Cadran; car la pointe du stile est sur cette superficie puis qu’elle en est le sommet. ... Les arcs des signes sur la surface sont les descriptions des parallèles à l’Equateur, qui passent par les 12 divisions égales de la ligne Ecliptique, qui marquent le commencement des signes."

**Komentář [CSL7]:** Plutôt « qui »

Le petits cercles, comme par exemple la trajectoire journalière du soleil ou les lignes des signes du zodiaque, seront représentés par des sections coniques. La projection s’explique ainsi : lorsque le soleil arrive sur une ligne de la sphère, alors l'ombre du style arrive sur la ligne correspondante du cadran.

Nous voulons remarquer encore un point intéressant : la manière dont La Hire considère les lignes horaires en correspondance avec la division harmonique. Dans le chapitre 4**,** il se propose une série des problèmes, où il faut construire les lignes horaires, si on en connaît un certain nombre. La construction de La Hire est basée sur le fait que certains plans horaires forment un faisceau harmonique. Ou**,** plus exactement**,** leurs intersections avec un plan qui leur est parallèle, par exemple le plan de l'équateur, forment un faisceau harmonique. Il s'agit toujours des quatre plans dont deux sont perpendiculaires (autrement dit, ils diffèrent de six heures) et dont les deux autres ont la même distance angulaire (ou horaire) par rapport à ces derniers. Les plans des cercles des heures X, XII, II, XVIII forment, par exemple, un faisceau harmonique. Mais puisque la projection d'un faisceau harmonique sera également un faisceau harmonique, les lignes horaires correspondantes ont la même propriété. Donc**,** si nous

**Komentář [CSL8]:** ??? Correspondance?

**Komentář [CSL9]:** Six quoi??

connaissons par exemple la position des lignes horaires X, XII, XVIII**,** nous pouvons facilement construire la ligne horaire II.[153]

[153] Chasles montre dans son *Aperçu* à la page 550, que pour n'importe laquelle des quatre lignes horaires nous pouvons déterminer leur rapport anharmonique préservé par la projection, et, par conséquent, les trois lignes horaires sont suffisantes pour construire les autres lignes horaires. La Hire, lui, se limite uniquement au cas de la division harmonique.

## 3.3 Astrolabe

La Hire, célèbre non seulement comme géomètre mais aussi comme astronome et observateur, utilisait quotidiennement divers instruments astronomiques. Il n'en possédait que peu personnellement, comme le montre l'Inventaire Après-Décès cité dans [Sturdy, D.J. 1995], page 202. Mais il habitait l'Observatoire de Paris et avait donc à sa disposition les nombreux instruments de cet établissement.

La Hire a présenté à diverses occasions des améliorations des instruments et des procédés d'observation.[154] Concernant l'application des projections et des sections coniques le plus intéressant est sa nouvelle construction de l'astrolabe - instrument dont il devait se servir très souvent. Cette construction est décrite dans l'article "Construction d'un nouvel astrolabe universel" *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 3. décembre, p. 257.[155]

La Hire a également utilisé la même projection pour construire deux planisphères publiées en 1702.[156]

### 3.3.1 Critique des astrolabes existants

Au début de son article La Hire critique les deux constructions de l'astrolabe universel utilisées de son temps. La première est attribuée, par La Hire, à Royas, et l'autre à Gemma-Frison.[157]

Dans l'astrolabe de Royas

> "... la projection se fait par des lignes paralleles entre elles, ou bien l'oeil étant supposé à une distance infinie ...".

D'après La Hire, cet astrolabe a l'avantage considérable de représenter plusieurs des cercles principaux de la Sphère par des lignes droites, ce qui

---

[154] Voir la bibliographie à la page 43.
[155] [La Hire, Ph. de 1701]
[156] [La Hire, Ph. de 1702]
[157] Nous gardons, avec La Hire, ces deux noms même si ce n'étaient pas les deux personnes qui ont inventé en premier ces types d'astrolabe. Royas a publié un traité en 1551 [Royas, J. 1551] *Commentarium in astrolabium* et Gemma-Frison en 1556 - [Gemma Frisius, R. 1556] *De Astrolabio catholico liber*. Pour une histoire de la construction des astrolabes, voir [D'Hollander, R. 1999].

> "donne une grande commodité dans sa description, & dans quelques-unes des opérations qu'on y fait".

Par contre, certains cercles sont représentés par des portions d'ellipses, plus difficiles à construire que des cercles. Un autre désavantage est que la division en degrés est loin d'être homogène - les degrés étant beaucoup plus serrés vers le bord de l'astrolabe - et les distances relatives sont donc très déformées.

Dans l'astrolabe de Gemma-Frison

> " ... l'oeil dans la projection est placé à l'extrémité d'un diamètre sur le Globe, lequel est perpendiculaire au plan de l'astrolabe".

Il s'agit donc bien de la projection stéréographique, déjà connue de Ptolemée. L'avantage de cet astrolabe est surtout d'avoir pour images de tous les cercles des cercles ou des lignes droites. Le désavantage principal est que les degrés sont beaucoup plus serrés vers le centre de l'astrolabe.[158]

### 3.3.2 Construction de La Hire

La principale exigence que se donne La Hire dans sa construction est l'homogénéité maximale des degrés sur l'astrolabe:

> "Par ce moyen les Figures qu'on y représente sont à très-peu près dans la même proportion que celles du Globe, autant qu'il est possible de faire dans la représentation d'un Hemisphere sur un plan."

Pour cela La Hire cherche le centre $O$ de la projection sur la ligne droite $HD$, qui passe par le centre $C$ et qui est perpendiculaire au plan de l'astrolabe (Fig. 3.3.1). Pour obtenir une homogénéité optimale il faut que le milieu de l'arc $DG$ - le point $A$, se projette sur le milieu du rayon $CG$ - le point $E$.

[158] Nous trouvons des considérations de diverses projections possibles pour la construction des astrolabes chez les auteurs arabes, notamment chez Al Quhi - voir [Abgrall, Ph. 2000].

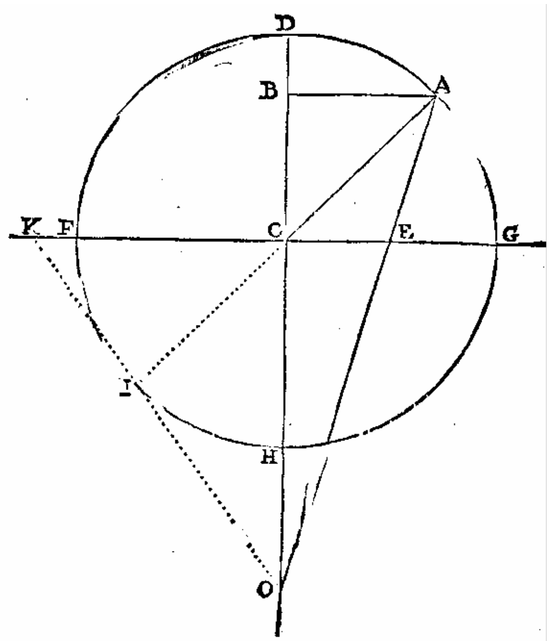



**Fig. 3.3.1**

On y parvient en choisissant le point $O$ en dehors de la sphère, tel que $HO = AB$, $AB$ étant en réalité égal au "sinus de l'arc de quarante-cinq degrés $DA$". La démonstration est très simple en se servant des triangles semblables $\Delta OCE \approx \Delta OBA$.

La Hire constate ensuite que si l'on continue à diviser les arcs en parties plus petites, on n'obtient pas exactement les mêmes parties du rayon $CG$ dans la projection mais que la différence est assez petite. Il donne un exemple sans démonstration: le milieu de l'arc $AD$ se projette sur un point dont la distance au centre $C$ est 0.248 fois le rayon $CG$ au lieu de 0.25 fois, différence "qui n'est pas considérable dans un Astrolabe". Bien sûr on ne peut pas obtenir une totale homogénéité pour une projection de la sphère sur le plan.

### 3.3.3 Construction des images des cercles

Dans la construction de La Hire, les cercles de la sphère se projettent sur les lignes droites, des cercles ou des ellipses.[159] La Hire montre comment construire l'image quand il s'agit d'une ellipse. Il prend comme exemple la construction du grand cercle $IA$ éloigné de 45 degrés de celui qui est représenté sur l'astrolabe par le diamètre.

Les points $K$ et $E$ seront les extrémités d'un axe de l'ellipse qui doit passer par les points $D, H$ (Fig. 3.3.1 et 3.3.2). L'autre axe de l'ellipse est $LM$ - la médiatrice du segment $KE$. On décrit un cercle de centre $D$ et de rayon égal à $LE$ - son intersection avec $LM$ sera

[159] La parabole ou hyperbole ne sera jamais obtenue car aucun rayon de projection ne peut être parallèle au plan de l'astrolabe.

un point $M$. On prolonge $MD$ et son intersection avec l'axe $KE$ est le point $N$[160]. Maintenant si on glisse le segment $MN$ sur les deux axes, le point $D$ décrit l'ellipse cherchée.

La Hire applique donc une de ses méthodes de description des sections coniques - celle qui est présentée dans le corollaire du théorème 3 du neuvième livre de ses *Sectiones conicae*.[161]

En ce qui concerne les autres cercles, La Hire se limite à dire:

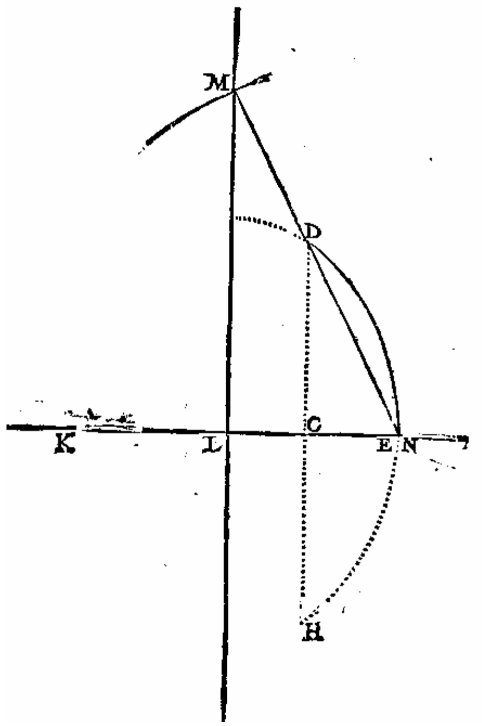



**Fig. 3.3.2**

> "Il n'y aura pas plus de difficulté à décrire les paralleles à l'équateur, que les méridiens, puisque l'on aura toujours dans les Ellipses par lesquelles ils sont représentés, l'un des axes & deux de leurs points sur la circonférence du cercle extérieur de l'astrolabe. Les axes de toutes ces Ellipses se trouvent de la même manière que les diametres des cercles dans l'Astrolabe de Gemma-Frison; mais les points comme $K$ qui determinent l'une des extrémités de ces axes, ne s'écarteront que fort peu de l'extrémité $F$ du diametre $FG$."

### 3.3.4 Langage plus libre des traités pratique

Soulignons plusieurs détails dans les citations de cet article. Contrairement aux traités géométriques, La Hire utilise ici le mot "projection". Nous voyons aussi que son vocabulaire quand il parle des projections est étroitement liée à la théorie et à la pratique de la perspective. La Hire place alors "l'œil" au centre de la projection et le résultat de la projection est une "représentation" de la sphère.

[160] La coïncidence des points $E$ et $N$ sur la figure 3.2.2 est accidentelle.
[161] Voir le paragraphe 3.1.

Dans l'astrolabe de Rayas, l'œil est placé à une "distance infinie". Il est probable que ces notions font partie implicite du raisonnement plus puriste des traités théoriques de La Hire.[162]

[162] Voir le paragraphe 2.1.8.

## 3.4 Architecture

Nous avons trouvé deux mémoires dans lesquels La Hire parle des sections coniques dans leurs rapports avec l'architecture.[163] Dans chacun de ces articles un problème pratique est proposé.

Le premier problème est la construction des sections coniques dans des conditions limitées où on n'a pas assez de place ou où certains éléments de la conique (comme le centre etc.) ne sont pas physiquement accessibles pour la construction. Cette question est résolue dans l'article "Méthode pour décrire de grands arcs des Sections coniques, sans avoir leur centre ni la grandeur d'aucun diamètre"[164] publié en 1708.

Le deuxième problème concerne la recherche de la meilleure forme que devraient avoir des arcs dans les bâtiments. La Hire étudie une forme particulière des arcs qui était en usage de son temps dans le mémoire "Remarques sur la forme de quelques Arcs dont on se sert dans l'Architecture"[165] publié en 1702.

Avant de passer au contenu de ces articles, remarquons qu'ils sont tous les deux publiés après l'année 1700, donc dans la période dans laquelle La Hire ne publiait plus ses grands traités.

### 3.4.1 Construction des coniques dans des contitions limitées

La Hire introduit son article "Méthode pour décrire de grands arcs des Sections coniques, sans avoir leur centre ni la grandeur d'aucun diamètre" en exposant le problème de la manière suivante:

> "Il y a souvent dans la pratique de la Geometrie des rencontres où l'on a besoin de décrire en grand des arcs ou portions des Sections Coniques, & dont les centres sont si éloignés par rapport aux arcs de ces Courbes qu'on ne peut pas les avoir sur la surface, ni la grandeur de leurs diamètres; on donne seulement deux touchantes en deux de leurs points, avec la direction à

[163] Un autre mémoire intéressant sur la problématique de la statique dans l'architecture est [La Hire, Ph. de 1712] que nous avons mentionné brièvement à la page 35.
[164] [La Hire, Ph. de 1708]
[165] [La Hire, Ph. de 1702b]

volonté d'un seul diamètre par l'un de ces points touchants, & il faut déterminer la nature de la Courbe & la décrire."

La Hire constate que ce problème peut être résolu par diverses méthodes et en propose la suivante.

Supposons que la section conique doit passer par les points $AF$ (Fig. 3.4.1), ses tangentes en ces points sont $BF, BA$ et le diamètre qui passe par le point $F$ a la direction $FC$.

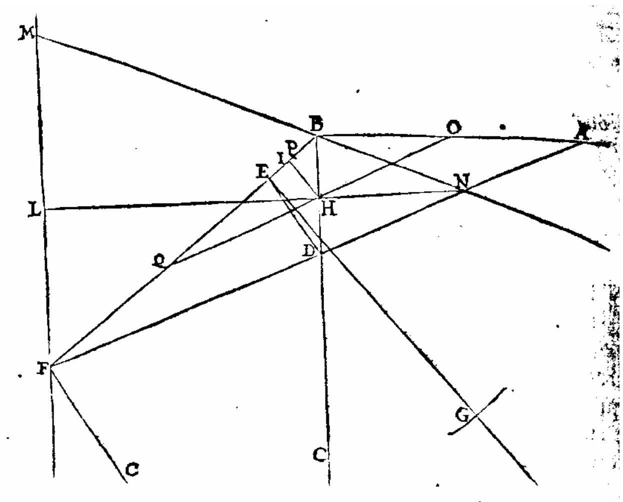


**Fig. 3.4.1**

Pour construire un point $H$ de la conique nous divisons $AF$ en deux parties égales au point $D$. La droite $BD$ sera donc un des diamètres de la conique.[166]

La suite de la construction est la même pour les coniques à centre et pour la parabole, mais nous séparerons les deux cas pour mieux comprendre le principe de la construction.

S'il s'agit d'une conique à centre, les deux diamètres $FC, BD$ se coupent au centre $C$.[167] Alors l'intersection $H$ du diamètre $BC$ et de la conique doit satisfaire à la condition que le segment soit la moyenne proportionelle des $CD$ et $CB$[168] qui est facile à construire. Mais comme nous supposons que le centre $C$ n'est pas accessible pour la construction, La Hire mène la parallèle $ED$ au diamètre $FC$ et se propose de trouver la moyenne proportionnelle $FI$ des segments $FE, FB$. Alors en menant ensuite la parallèle $IH$ il peut obtenir le point $H$.

[166] C'est un des premiers résultats que La Hire démontre dans la *Nouvelle méthode* de 1673 – voir le paragraphe 2.1.2

[167] La lettre $C$ qui aparaît sur sur les deux diamètres signifie le même point qui est soit à distance finie, soit à distance infinie sur les deux droites. Nous retrouvons ainsi la même trace possible des points à l'infini que nous avons déjà vue au paragraphe 2.1.8.

[168] Le résultat plusieurs fois démontré par La Hire dans ses traités, équivalent au *Harm(B,H,D,X)* où *X* serait la deuxième intersection du diamètre avec la conique.

Dans le cas de la parabole les deux diamètres $FC, BD$ seront parallèles et le point $H$ sera au milieu du $BD$.

Ce qui est extrêmement intéressant est le fait que la construction de La Hire est la même pour toutes les sections coniques et elle est comme suit:

1. mener la parallèle $DE$ au le diamètre $FC$ pour construire le point $E$
2. construire le triangle rectangle $PEG$ où le $P$ est le milieu de $EB$ et la diagonale $PG$ est égale au $PF$, alors le côté $EG$ sera la moyenne proportionnelle des segments $FE, FB$ [169]
3. maintenant on pourrait construire le point $I$ car $FI = EG$ et ensuite le point $H$, mais La Hire préfère mener une parallèle $FM$ au diamètre $BD$ et depuis $F$ construire les segments $FL$ et $LM$ qui sont égaux ou dans le même rapport que les segments $EG$ et $FB$ et en se servant de la similitude il divise dans le même rapport le segment $BD$ au point $H$ [170]

Pour le cas de la parabole les points $B, E, P, I$ coïncident, le point $L$ sera au milieu du $FM$ et le point $H$ au milieu du $DH$

Nous voyons, donc, que dans la construction on n'est pas obligé de savoir quelle est la nature de la courbe pour construire le point $H$. Ensuite on répète la construction pour la tangente au point $H$, qui sera parallèle à l'ordonnée $FN$. De cette manière nous obtenons toujours un troisième point entre deux points déjà connus et, donc, nous pouvons construire une suite des points aussi dense que nous voulons.

Cette construction est plus compliquée que celles publiées par La Hire dans les *Sectiones conicae*[171] mais elle correspond probablement aux exigences très concèrtes d'une pratique donnée concernant l'architecture ou la taille des pierres.

---

[169] Un calcul justifiera cette construction - si nous avons les grandeurs $x$, $y$ alors la moyenne proportionnelle sera $\sqrt{xy} = \sqrt{(\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2}$.

[170] Il utilise le fait que si $\frac{CB}{CH} = \frac{CH}{CD}$, alors $\frac{CB-CH}{CH-CD} = \frac{BH}{HD}$ sera égal au même rapport.

[171] Voir le paragraphe 3.1

### 3.4.2 Forme des arcs

Dans son article "Remarques sur la forme de quelques Arcs dont on se sert dans l'Architecture" La Hire étudie une forme de l'arc qui était utilisée de son temps en architecture et dont certains architectes disaient que elle

> "fait un effet bien plus agréable que les portions de cercle ou d'Ellipse qu'on emploie ordinairement".

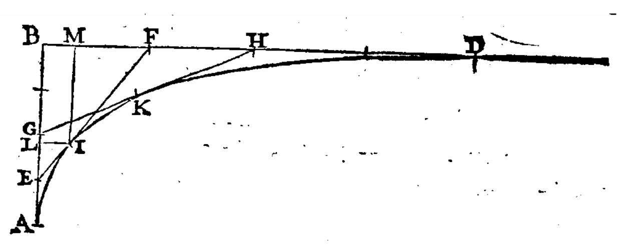



**Fig. 3.4.2**

Cette courbe est décrite de la manière suivante. On suppose qu'elle touche aux points $A, D$ deux lignes droites $BA$ et $BD$ (Fig. 3.4.2) qui sont à angle droit. De plus elle doit toucher les segments (comme par exemple $EF$) dont les extrémités divisent les segments $BA$ et $DB$ dans le même rapport (dans notre exemple donc $\frac{BE}{AE} = \frac{DF}{BF}$).

La Hire se propose de déterminer la nature de cette courbe et d'étudier dans quelle mesure elle est appropriée pour former les arcs. Il avoue qu'il croyait d'abord qu'il s'agissait d'une portion de l'ellipse, mais après il a trouvé qu'il s'agissait d'une parabole par le calcul suivant.

Tout d'abord il détermine le point $I$ de contact du segment $EF$ et de la courbe. Si les points $L, M$ sont les projections orthogonales du $I$ sur les droites $BA, BD$ alors, d'après La Hire, les segments $BL, BE, BA$ seront en proportion continue ainsi que les segments $BM, BF, BD$.[172] La Hire ne montre pas comment il a trouvé ce résultat, mais il dit que

> "c'est facile à connoître par la regle *de maximis & minimis*".[173]

---

[172] Donc $\frac{BM}{BF} = \frac{BF}{BD}$ et $\frac{BL}{BE} = \frac{BE}{BA}$.

[173] Nous ne voulons pas reconstruire sa solution, car les méthodes infinitésimales ne sont pas notre sujet. Mais nous pouvons vérifier le résultat de La Hire par la considération suivante. Notons $T$ le point d'intersection du segment $EF$ avec un autre segment $GH$. Si $GH$ tend vers $EF$, le point d'intersection tendra vers le point $I$ qui est le contact de $EF$ avec la courbe. En se servant des

Ensuite il est facile de déterminer analytiquement la position du point $I$ et de calculer l'équation de la courbe. La Hire note $DB = a$, $BA = b$, $DM = y$ et $MI = x$[174] et il calcule successivement: $BF = \sqrt{a^2 - ay}$, $DF = a - \sqrt{a^2 - ay}$ et comme $\frac{DB}{DF} = \frac{BA}{BE}$ nous avons $BE = \frac{ba - b\sqrt{a^2 - ay}}{a}$. Mais $\frac{BL}{BE} = \frac{BE}{BA}$ ce qui nous donne

$$BL = x = \frac{2b^2a^2 - 2b^2a\sqrt{a^2 - ay} - b^2ay}{a^2b}.$$

En simplifiant cette équation nous avons $b^2y^2 + a^2x^2 - 4ba^2x + 2baxy = 0$ et en substituant $z = y + \frac{ax}{b}$ nous aurons

$$z^2 = 4ax$$

ce qui est l'équation d'une parabole inclinée par rapport aux axes. La figure 3.4.3 nous montre la position de son axe $SN$.

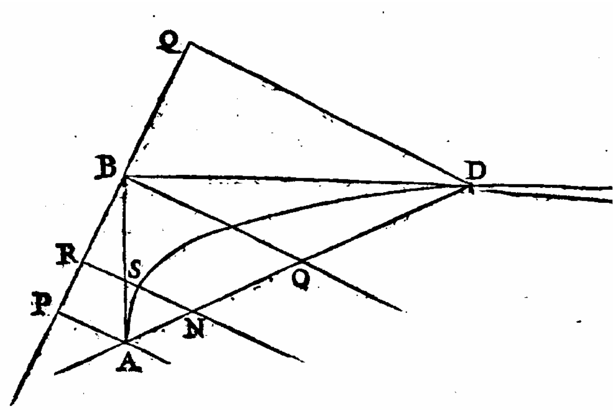



**Fig. 3.4.3**

---

coordonnées de La Hire (voir la note suivante) nous calculerons les coordonnées du point $T$. Notons la distance $f = DF$. Nous avons donc les coordonnées suivantes $F = [0, f]$, $E = [f\frac{b}{a}, a]$ et la droite $EF$ a donc l'équation $xa(f - a) + ybf - bf^2 = 0$. De même si nous notons la distance $h = DH$, la droite $GH$ aura l'équation $xa(h - a) + ybh - bh^2 = 0$. Leur intersection $T = EF \cap GH$ aura alors les coordonnées $[\frac{bfh}{a^2}, f + h - \frac{fh}{a}]$ et la limite $h \to f$ donne les coordonnées du point $I = [\frac{bf^2}{a^2}, 2f - \frac{f^2}{a}]$. Maintenant il est facile de vérifier que, par exemple, $BL, BE, BA$ sont dans la proportion continue, car $BL = MI = \frac{bf^2}{a^2}$, $BE = \frac{bf}{a}$ et $BA = b$. De la même manière on peut voir que $BM, BF, BD$ sont dans la proportion continue.

[174] Il se sert, donc, d'un système orthogonal de coordonnées dont l'origine est le point $D$. L'axe $x$ est vertical et l'axe $y$ est horizontal et leurs orientations sont renversées par rapport à l'usage actuel.

Pour ce qui concerne l'usage de cette courbe dans l'architecture, La Hire constate qu'elle a une singularité[175] au point $S$ ce qui est un défaut estéthique blâmé en architecture. Il conclut que si on veut l'utiliser pour la simplicité de son tracé, il faut la modifier dans sa partie inférieure pour remédier à ce défaut.

[175] La Hire parle d'une espece de coude appellé "jarret".

## 3.5 Jets des bombes

En l’an 1700 Philippe de La Hire a publié son article "Méthode générale pour les jets des Bombes ...".[176] Dans cet article, il admet que la courbe sur laquelle se déplace le projectile dessine une parabole dont l'axe est perpendiculaire à la Terre. Il veut donc trouver, parmi les paraboles passant par deux points donnés (celui du tir et celui du but), ceux qui correspondent à la force du tir.

Ce problème se résout assez facilement. Mais l'intérêt de La Hire n'est pas dans sa solution théorique ; il voudrait satisfaire le besoin pratique des soldats et propose un instrument qui, par quelques opérations faciles, permet de déterminer l'angle du tir. Ainsi, la détermination théorique de la parabole se traduit en opérations tout à fait rudimentaires qui n'exigent aucune connaissance de la théorie des sections coniques.

D'abord nous noterons la place que se donne La Hire lui-même dans la recherche d’instruments servant à déterminer l'angle de tir. La Hire procède ensuite à une assez longue description, purement pratique, de son instrument, puis démontre la justesse de sa construction. Nous pensons utile, pour le lecteur moderne, d’inverser la démarche et de donner en premier lieu l'analyse géométrique de La Hire, puis d’en arriver à la description de son instrument.

### 3.5.1 Position de La Hire

La Hire commence par rappeler que Blondel avait soumis à L'Académie le problème de la détermination de l'angle de tir. Divers membres, dont La Hire, avaient répondu à cette sollicitation. C'était en se basant sur ces réponses que Blondel aurait proposé divers instruments dans *l'Art de jeter les Bombes* en 1683.[177]

**Komentář [CSL10]:** on pourrait supprimer la repetition de Academie

Ces instruments avaient toujours l’inconvénient, d'après La Hire, de nécessiter des opérations intermédiaires comme la division etc. Celui qu'il propose dans son article, est plus simple et destiné aux utilisateurs qui

[176] [La Hire, Ph. de 1700]
[177] [Blondel, F. 1683] La Hire donc revendique un mérite dans la création de cet ouvrage.

" ... n'ont pour l'ordinaire aucune connoissance des premiers principes de Géométrie, & qui seroient bien embarassés, s'il leur falloit faire une règle de trois à chaque opération différente."

### 3.5.2 Analyse du problème

La Hire suppose (Fig. 3.5.1) qu'on tire du point $C$ et que le but atteint est le point $G$. La force de la poudre est évaluée par la hauteur du tir vertical qui serait la hauteur $CO$. La Hire suppose implicitement et admet sans démonstration que la ligne horizontale $OH$ est la directrice de toutes les paraboles qui représentent les trajectoires correspondant aux divers angles de tir.[178]

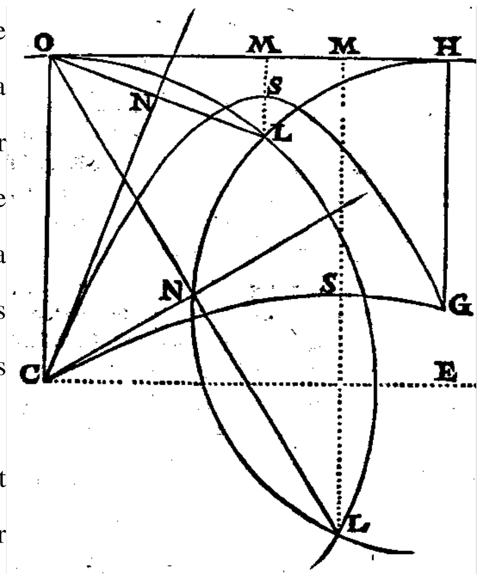


**Fig. 3.5.1**

Le problème est alors géométriquement très simple - il faut trouver la parabole passant par les points $C, G$ et ayant la ligne droite $OH$ pour directrice. C'est d'ailleurs exactement le problème résolu par la Hire dans ses *Sectiones conicae* (proposition 19 du livre VIII).[179]

Pour déterminer le foyer $L$, il suffit d'exploiter les égalités $CO = CL$ et $GH = GL$ et nous obtenons le foyer à l'intersection des deux cercles. Plus exactement, nous pouvons avoir soit une ou deux intersections, soit deux cercles disjoints, en fonction du nombre de tirs possibles.

Une fois le foyer déterminé, il est aisé de construire le sommet, l'axe et le paramètre de la parabole, mais, comme nous voulons obtenir uniquement l'angle de tir, la solution est encore plus simple. La tangente de la parabole au point $C$ est tout simplement

[178] Le fait que la trajectoire du tir est une parabole est connu au moins depuis Galilei [Galilei, G. 1638]. La précision intéressante que toutes les paraboles qui correspondent aux divers angles de tir ont une commune directrice est démontrée par La Hire dans sa *Mécanique* [La Hire, Ph. de 1695].

[179] Il est probable que c'est bien de ce théorème que La Hire parle en disant que Blondel a rapporté sa proposition en 1683. Aussi est-ce vraisemblablement en vue d'une application aux tirs que La Hire a placé ce problème assez particulier dans ses *Sectiones conicae.*

l'axe du segment $OL$, comme La Hire le démontre dans la Proposition 4 de ses *Nouveaux éléments*[180] par exemple.

### 3.5.3 Description de l'instrument

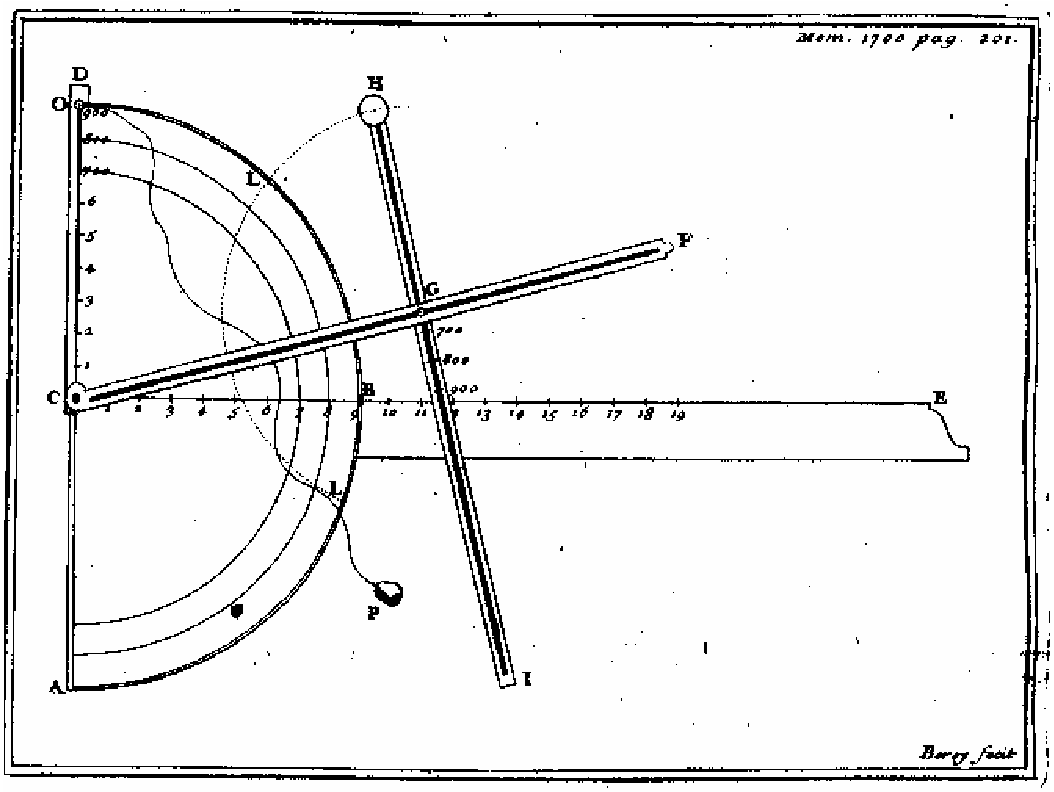



**Fig. 3.5.2**

L'analyse du problème étant faite, il nous sera facile de comprendre la description et l'utilisation de l'instrument proposé (Fig. 3.5.2). L'instrument est constitué d'une planche en cuivre $ACDBE$, où sont tracés les cercles concentriques de centre $C$**,** dont le diamètre progresse suivant un intervalle choisi et noté 1,2, ... , 9 ce qui représente les centaines des toises. Cette planche est complétée par deux bras $CF$ et $HI$. Le bras $CF$ est attaché à la planche au point $C$ et peut tourner librement. On peut arrêter son mouvement dans la position voulue grâce à un écrou situé au point $C$. Le deuxième bras $HI$, sur lequel sont marqués les mêmes intervalles à partir du point $H$, est relié par le clou $G$ au bras $CF$ mais peut glisser

[180] Voir la page 149

par rapport à lui**,** comme on le voit sur la figure. Un écrou en $G$ permet de fixer arbitrairement la position relative des deux bras. Enfin, le long de la ligne $CD$, se trouve une fente où se déplace un curseur $O$, auquel on attache un fil à plomb. On peut fixer le curseur dans une position voulue.

**Komentář [CSL11]:** mot inexistant aujourd'hui, employer plutôt « curseur » ??

Nous décrirons, en la simplifiant légèrement, l'utilisation de cet instrument. En fait, les lettres attribuées aux points correspondent à la situation théorique de la figure 3.5.1. Il s'agit d'un modèle réduit d'une situation réelle.

Le bras $CF$ doit arrêté au point $C$ de sorte que l'angle $GCE$ soit égal à l'angle d'élévation du but par rapport à l'endroit d'où on tire. Ensuite l'écrou $G$ doit être placé de sorte que la distance $CG$ correspond à la distance au but. Le courseur $O$ sera réglé sur la distance qui correspond à la hauteur du tir vertical du canon – prenons par exemple 900 toises. Ensuite il faut déplacer le bras $HI$ sur le clou fixe $G$, jusqu'à ce que cette même distance de 900 toises se trouve sur la ligne droite $CE$ lorsque le bras $HI$ lui est perpendiculaire - ce qu'on peut savoir en faisant tourner le bras $IH$ autour de $G$ afin que la marque de 900 toises touche la ligne $CE$. Si l'on fait tourner ensuite le bras $HI$ autour de $G$, alors le point $H$ coupera le cercle au centre $C$ et le diamètre correspondant - dans notre cas celui de 900 toises - au foyer $L$ qu'on marquera sur la planche.

Ensuite on applique la règle $LC$ à l'intérieur du mortier et on l'élève jusqu'à que le fil $OP$ passe par le point $L$. La Hire n'explique pas pourquoi ce réglage est correct, mais nous pouvons voir facilement d'après notre figure supplémentaire (Fig. 3.5.3) que de cette manière l'angle de tir égale à l'angle $\angle ECN$ qui a été déterminé comme l'angle correct - voir la figure 3.5.1.

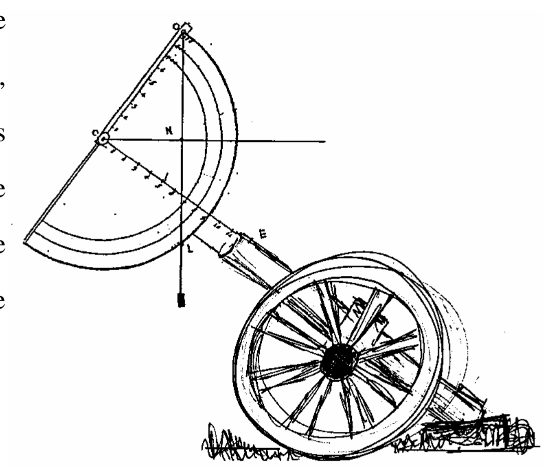


**Fig. 3.5.3**

## 3.6 Arpentage

En 1689 La Hire a publié un petit ouvrage intitulé *L'école des arpenteurs, où l'on enseigne toutes les pratiques de géométrie qui sont nécessaires à un arpenteur*.[181] Il s'agit d'un ouvrage purement pratique, mais écrit avec une très grande clarté, qui révèle un solide fondement théorique.

Comme La Hire nous en avertit, l'arpentage qui est "l'art qui sert pour mesurer la superficie des terres" n'est en réalité que la "géométrie pratique". Il s'agit surtout de la trigonométrie qui, elle, est "l'art de connoître ou de mesurer un triangle, trois de ses parties étant connues".[182]

La partie la plus importante de *L'école des arpenteurs* est alors consacrée à la trigonométrie pratique. En ceci La Hire essaye d'éviter trop de théorie, qui d'après lui, embrouille la plupart des traités d'arpentage de son époque. Ainsi il donne effectivement des méthodes élémentaires et pratiques de solution de divers problèmes, sans en donner de démonstration. Par contre il expose soigneusement tout ce qui est vraiment nécessaire pour la pratique, comme la manière d'utiliser les fonctions goniométriques, l'extraction des racines et il entre même dans la problématique des diverses unités de mesure et de leurs différences dans diverses régions de France.

### 3.6.1 Mesure de l'ellipse

La seule section conique dont La Hire fait mention dans *L'école des arpenteurs* est l'ellipse. Encore dans ce cas-là se limite-t-il à donner la méthode de sa description (avec la corde) et du calcul de sa surface:

> "S'il fallait mesurer un ovale géométrique telle qu'est celle que l'on appelle du Jardinier, qui est formé par le moyen du cordeau plié attaché en deux points par ses extrémités, il faudrait mesurer ses deux diamètres qui s'entrecoupent à angle droit .. & ayant multiplié ces deux diamètres l'un par

[181] Dans la suite nous citerons cet ouvrage comme "*L'école des arpenteurs*".
[182] Nous pouvons ici voir un rapport avec l'article [La Hire, Ph. de 1700a] "Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant données, trouver la superficie ou l'aire"

> l'autre il faudra tirer la racine quarrée de ce produit. Si l'on suppose que cette racine quarrée soit le diamètre d'un cercle, la superficie de ce cercle sera égale à la superficie de l'ovale proposé."

La formule que La Hire donne pour la superficie de l'ellipse est alors

$$S = \pi ab$$

où $a, b$ sont les deux demi-axes.[183] Pour d'autre lignes courbes, La Hire recommande, en pratique, de les approximer par les segments et de réduire le calcul à un polygone et, donc, finalement aux triangles.

Nous voyons donc, que malgré sa connaissance brillante de la théorie des sections coniques, La Hire, dans un ouvrage pratique, ne complique pas la lecture par des éléments trop théoriques et n'utilise même pas le mot "conique".

C'est sa capacité pédagogique d'approprier son langage et sa présentation au public donné que nous avons voulu souligner en cette occasion.

[183] Cette formule a été connue déjà de Thabit ibn Qurra - voir [Rashed, R. 1996].

# 4 Rapport de l'œuvre de La Hire et de quelques auteurs choisis

Comprendre la place et le rôle de Philippe de La Hire dans le développement de la pensée scientifique en général et dans l'histoire de la géométrie en particulier était pour nous l'objectif implicite de notre recherche. Nous avons, aux divers endroits des chapitres précédents, mentionné les travaux des divers géomètres proches de La Hire par leurs écrits géométriques. Dans cette partie nous voulons montrer explicitement le rapport que nous trouvons entre La Hire et plusieurs géomètres choisis.

Apollonius de Perga a crée au IIIème siècle avant notre ère le paradigme par excellence pour les traités sur les sections coniques. Nous constatons (chapitre 4.1) que La Hire hérite de ses méthodes plus qu'on ne l'a mis en lumière jusqu'à présent.

Parmi ceux qui ont précédé La Hire dans la théorie projective des sections coniques, c'est surtout Girard Desargues qui est très souvent mentionné. Nous lui consacrons le chapitre 4.4.

Mais nous avons trouvé des éléments d'étude projective des coniques également chez deux autres auteurs, à savoir chez Johannes Werner (chapitre 4.2) et chez Guidobaldo dal Monte (chapitre 4.3).

Enfin Jacques-François Le Poivre a presenté au tout début du XVII$^{ème}$ siècle une méthode pour les sections coniques qui présente certains aspects proches des méthodes de La Hire. Cette méthode, qui n'a pas été suffisamment étudiée jusqu'à présent, se montre extrêmement intéressante et dans son essence, différente de celle de La Hire. Elle est présentée et analysée au chapitre 4.5.

La relation entre la géométrie de La Hire et celle des nombreux autres géomètres avant et après lui est très intéressante. Malheureusement la quantité des matériaux nécessaires dépasse de loin les possibilités de cette thèse. Nous réservons ces sujets pour nos futures recherches.[184]

[184] Voir la Conclusion.

## 4.1 Apollonius de Perga

La théorie des sections coniques est inséparablement liée au nom d'Apollonius de Perga et à son traité *Les coniques*.[185]

Cette œuvre difficile a été étudiée, traduite et commentée par les mathématiciens arabes qui ont rédigé un nombre considérable d'ouvrages sur les sections coniques.[186] Par contre sa complexité mathématique dépassait les possibilités des mathématiciens médiévaux européens.

Depuis le début du XVIème siècle on constate une renaissance de l'intérêt pour la géométrie des sections coniques. Ainsi une première traduction des *Coniques* d'Apollonius est faite par Memo en 1537.[187] Mais cette traduction est très défectueuse et montre que le sujet était sur le plan mathématique trop difficile pour le traducteur. Probablement le seul mathématicien de la première moitié du XV siècle qui était à la hauteur de la géométrie apollonienne était Francesco Maurolico. Ses travaux sont malheureusement restés longtemps inédits.[188]

Au XVIIème siècle cet ouvrage classique a été, contrairement au siècle précédent, assez bien connu par les mathématiciens. Cette connaissance était due d'une part au développement général des connaissances mathématiques, d'autre part à la bonne traduction des livres I-IV des *Coniques* faite par Frederico Commandino en 1566.[189] Plusieurs ouvrages ont été composés dans le style d'Apollonius pour développer la théorie des coniques en se servant des mêmes méthodes.[190] La théorie des sections coniques est liée également aux

[185] Aux XIX et XX siècles les Coniques d'Apollonius n'étaient pas éditées très fréquemment. Nous avons l'édition critique du texte grec des quatres premiers livres [Apollonius 1891] et de la traduction arabe des livres cinq à sept perdus en grec [Apollonius 1990]. La seule traduction complète en langue moderne est celle de Ver Eecke [Apollonius 1925] en français. Pour une première connaissance avec cet ouvrage assez volumineux nous pouvons vivement recommander la présentation de presque toutes les propositions en notation moderne en anglais faite par Heath [Apollonius 1896]. Ces deux derniers livres contiennent également des commentaires très intéressants.

[186] Voir par exemple [Rashed, R. 1981], [Rashed, R. 1986], [Rashed, R. 1990], [Rashed, R. 1993], [Rashed, R. 1993a], [Rashed, R. 1996].

[187] [Apollonius 1537]

[188] Les premiers travaux mathématiques de Maurolico ont été imprimés dans le [Maurolico, F. 1575]. Pour une étude sur l'ensemble des travaux mathématiques de Maurolico voir [Sutto, J. P. 1998]

[189] [Apollonius 1566]

[190] Citons par exemple [Mydorge, C. 1631-39] et [Sancte Vincentio, G. a 1647].

développements de la géométrie analytique que nous pouvons regarder comme un dépassement de cette théorie classique.

Nous voulons, dans ce paragraphe, examiner quelle était la connaissance que La Hire avait d'Apollonius et quelle fut l'influence de celui-ci sur son œuvre.

#### 4.1.1 Citations des Coniques d'Apollonius dans les œuvres de La Hire

Le nom d'Apollonius de Perga est mentionné dès la première ligne de l'Avant-propos de la *Nouvelle méthode*, comme la personne dont l'œuvre représente la référence par excellence dans le domaine des sections coniques. Ensuite, dans cette préface La Hire ne réclame pas tellement l'invention de nouveaux résultats, mais il insiste sur le fait que les même résultats qui sont déjà chez Apollonius sont démontrés par des méthodes plus simples:

> "Je n'aurois pourtant jamais pû me résoudre à luy faire voir le jour, si je n'avois cru que la simplicité de la méthode que j'ay trouvée pourroit estre d'une grande utilité aux studieux."

Et dans la suite, il constate que ces propositions couvrent une grande partie des propositions des premiers livres d'Apollonius.

Son souci de créer une méthode qui égale et surpasse celle d'Apollonius apparaît clairement dans ses *Sectiones conicae*. A la fin de ce traité La Hire présente les énoncés de toutes les propositions des 7 livres des *Coniques* d'Apollonius et indique brièvement comment elle sont contenues dans son ouvrage.

Dans ses autres écrits sur les sections coniques, par exemple dans les *Nouveaux éléments*, La Hire mentionne également plusieurs fois Apollonius pour dire que sa propre méthode peut donner les même résultats.

Nous voyons, alors, que La Hire se place, lui-même, tout à fait dans la tradition apollonienne. L 'objectif principal de ses écrits sur les coniques est de présenter les même résultats qu'Apollonius mais d'une manière plus courte et plus compréhensible. Les quelques nouvelles propositions sont pour La Hire moins importantes que les nouvelles méthodes de démonstration des résultats classiques.[191]

### 4.1.2 Connaissance d'Apollonius par la Hire et l'origine de ses méthodes

Déjà dans le tout premier mémoire de La Hire *Sur le points d'attouchement* de 1672 - apparaît une très bonne connaissance des Coniques d'Apollonius. Dans ce mémoire on donne la solution de plusieurs problèmes géométriques en les ramenant aux propositions d'Apollonius qui sont citées explicitement.[192] Il s'agit des propositions (dans l'ordre de citation) II.29, II.27, II.7 et II.30 des coniques d'Apollonius.

Plus tard La Hire affirme que c'était justement sa connaissance parfaite d'Apollonius que lui a permit de trouver sa méthode.[193]

C'est dans une note à la fin de sa copie manuscrite du *Brouillon project* de Desargues que La Hire explique l'origine de sa méthode dans les mots suivants:[194]

> " ... ce qui me fait juger qu'Apollonius avoit bien decouvert dans le solide la proprieté de cette ligne [harmoniquement divisée], mais que n'ayant pû en faire l'application d'une maniere simple, il avoit préféré les demonstrations sur le plan dont il s'est servi a ce qui luy avoit fait decouvrir toutes ces proprietez, et ce fut en considerant attentivement toutes les proprietez de cette ligne et tous les cas qui sont dans Apollonius, et en les comparant tous ensemble, que je trouvay le moyen de n'en faire qu'un seul que je donnay dans la methode que j'ay publiée."

---

[191] De ce point de vue La Hire participe à l'effort de certains geométres du XVII siècle pour trouver des nouveaux fondements de la géométrie. Ainsi nous pouvons citer les réécritures des élements d'Euclide faites par Roberval - voir [Jullien, V. 1996], par Borelli [Borelli, G.A. 1673], par Barrow [Barrow, I. 1655] ou par Arnold. Pour ce qui concerne les essais de réécriture des sections coniques dans l'esprit Apollonien nous pouvons citer les livres de Mydorge [Mydorge, C. 1631-39], de Gregoire de St.-Vincent [Sancte Vincentio, G. a 1647] et [Sancte Vincentio, G. a 1668] et de Borelli [Borelli, G.A. 1679].

[192] Voir le paragraphe 2.1.4 pour le contenu de ce mémoire.

[193] Voir infra.

[194] Voir le chapitre 4.4. pour une plus ample citation de cette note extrêmement intéressante et pour son analyse.

Ainsi la Hire affirme avoir puisé une inspiration directe chez Apollonius pour la découverte de sa méthode projective.

La proposition I de la *Nouvelle méthode* de La Hire regroupe effectivement un grand nombre des propositions d'Apollonius. Ce sont, par exemple, les propositions qui déterminent l'intersection d'une tangente avec un diamètre – il s'agit des propositions de I.34 à I.40. Ensuite surtout les propositions du livre III. Les propositions III. 30 à III. 40 traitent des propriétés aujourd'hui appelées polaires et qui contiennent la division harmonique. C'est justement cette correspondance pôle-polaire qui est centrale dans la méthode projective de La Hire. Les propositions III.41 – III. 44 traitent des propriétés des trois tangentes qui se coupent mutuellement. Cette dernière situation correspond exactement à la dernière partie de la première proposition de la *Nouvelle méthode*.

En plus de propositions contenant d'une certaine manière la division harmonique, La Hire réutilise d'autres méthodes d'Apollonius.

Comme nous l'avons vu plus haut,[195] La Hire utilise la méthode apollonienne de la détermination de symptôme en se servant du triangle par l'axe,[196] pour les sections des cônes de degré supérieur. Cette même méthode est utilisée comme méthode auxiliaire pour démontrer le symptôme de l'hyperbole dans la *Nouvelle méthode* - voir le paragraphe 2.1.5.

Dans ses *Nouveaux éléments* La Hire utilise la méthode d'Apollonius pour la transition de l'expression de la conique par rapport à un diamètre (l'axe dans le cas étudié par La Hire) vers son expression par rapport à un autre diamètre.[197] Chez Apollonius il s'agit des propositions I.41 à I.50.

Enfin il ne faut pas oublier que La Hire se sert le plus souvent de la notation géométrique classique; de nombreux résultats sont démontrés par la manipulation classique avec des rapports et aires qui remonte au moins à Apollonius et à Euclide.

---

[195] Voir le paragraphe 2.1.7.
[196] Cette méthode est utilisée par Apollonius dans les propositions 11-14 du premier livre des *Coniques*.
[197] Voir le paragraphe 2.3.1.

### 4.1.3 Appartenance de La Hire à la tradition apollonienne

Nous voyons, donc, que La Hire doit être placé dans la tradition apollonienne de la géométrie. En effet il perfectionne les démonstrations, invente même les méthodes et les astuces pour mener le discours avec plus d'efficacité, mais il garde également de nombreuses méthodes classiques et surtout son objectif reste de reconstruire la théorie classique des coniques.

Son effort pour montrer que sa méthode égale et même surpasse celle d'Apollonius n'est donc pas uniquement une manière de présenter ses résultats, mais il doit être considéré comme l'achèvement de son projet initial: réécrire les *Coniques* d'Apollonius. Effectivement il a réussi, à notre avis, à rendre les coniques plus faciles à apprendre par sa méthode projective et, en particulier, par sa méthode d'étude à partir des foyers.[198]

[198] Voir la note 141 à la page 164.

## 4.2 Johannes Werner

Dans son *Super vigintiduobus elementis conicis* [Werner, J. 1522] Werner développe la théorie élémentaire des sections coniques.[199] Il se limite aux sections du cône droit et par ailleurs le nom d'Apollonius n'est pas mentionné.[200] Pourtant nous pouvons remarquer deux méthodes, que nous ne trouvons pas chez Apollonius et qui ressemblent, même si ce n'est que de très loin, à certains procédés de La Hire.

Les 34 pages in 4° qui sont dans [Werner, J. 1522] consacrées aux sections coniques comportent une série de définitions suivies de 22 propositions[201].

### 4.2.1 Construction de la parabole

Nous nous intéresserons tout d'abord à la proposition 11 dans laquelle Werner propose une construction de la parabole point par point.[202]

(Fig. 4.2.1) Sur une droite *p* choisissons deux points *A, B*. Par le point *B* menons la ligne *q* perpendiculaire à la droite *p*. Choisissons sur la demi-droite *AB* après le point *B* autant de points $C_i$ que nous voulons et construisons dans un demi-plan les demi-cercles $k_i$ sur les diamètres $AC_i$. Notons $D_i$ les intersections des demi-cercles $k_i$ avec la droite *q*. Enfin construisons les points $P_i$ tels que leurs projections orthogonales sur les droites *p* et *q*, soient les points $C_i$ et $D_i$ respectivement. Alors tous les points $P_i$ seront sur la parabole qui a la droite *p* pour axe, le sommet *B*, et le côté droit *AB*. La démonstration est évidente, car à cause des cercles nous avons d'après le théorème d'Euclide $AB \times BC_i = BD_i^2 = C_iP_i^2$ et nous retrouvons le symptôme de la parabole.[203] Ainsi nous voyons, qu'il s'agit en réalité de la

[199] Il s'agit d'un des premiers traités sur les sections coniques en Europe latine.

[200] Par cette limitation Werner est proche de la tradition pré-apollonienne des sections coniques - voir [Heath, T. 1921] et [Zeuthen, H.G. 1886]. Pourrait-on supposer une réinvention indépendante d'Apollonius de la théorie élémentaire des coniques en Europe à l'époque de la Renaissance?

[201] Werner ne fait pas de distinction entre lemme et théorème et parmi les 22 propositions toutes ne sont pas de la même importance

[202] La Hire s'est intéressé à plusieurs reprises aux constructions des coniques point par point, par exemple dans *Les Planiconiques, Nouveaux éléments,* le 9. Livre des *Sectiones conicae* et dans plusieurs mémoires - voir le chapitre 3.1.

[203] Dans presque toutes les constructions des sections coniques que nous avons rencontrées le critère de la vérification qu'il s'agit bien d'une section conique est de démontrer le symptôme pour les points en question.

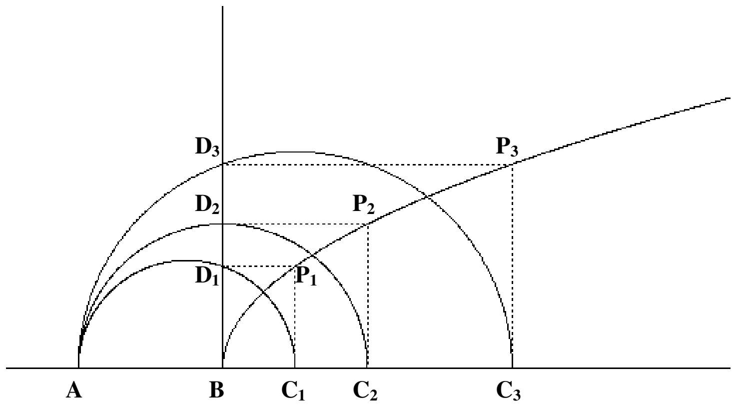



**Fig. 4.2.1**

construction qui consiste à utiliser directement le symptôme pour l'axe avec une construction habile des ordonnées.

### 4.2.2 Démonstration projective

La deuxième proposition à laquelle nous nous intéresserons est la proposition 16 qui utilise comme lemme la proposition 13. Werner démontre, pour la parabole, que si une sous-tangente est un segment de l'axe, elle est divisée en deux parties égales par le sommet de la parabole. Pour cela il utilise une démarche qui contient le germe d'une démonstration projective.

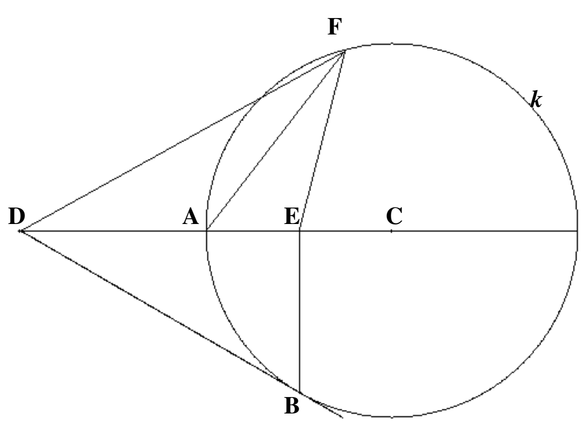



**Fig. 4.2.2**

Tout d'abord, dans la proposition 13 il démontre par des considérations élémentaires cette propriété du cercle (fig. 4.2.2): Soit $k$ un cercle avec le centre $C$ et un point $D$ à l'extérieur du cercle. Joignons les points $D$ et $C$ par une droite qui coupe le cercle au point $A$ entre les points $D$ et $C$. Menons une tangente au cercle par le point $D$ et qui touche le cercle au point $B$. Par le point $B$ menons une perpendiculaire à la droite $DC$ et qui la rencontre au point $E$. Alors pour un point $F$ sur le cercle nous aurons

$$\frac{AD}{AE} = \frac{FD}{FE} \text{ et } \angle AFD = \angle AFE .$$

Remarquons que si le point $F$ est sur la ligne $DC$ à l'opposé du point $A$, cette propriété nous dit que les points $D, A, C, F$ forment une division harmonique.

Dans la proposition 16 (fig. 4.2.3)[204] nous avons un cône droit de base circulaire $k$, centrée en $S$, avec le sommet $H$, l'angle au sommet étant 90°. Par le sommet $H$ et le centre $S$ menons un plan $\alpha$, qui coupe le cône dans un triangle rectangle et équilatéral $FHG$. Maintenant coupons le cône par un plan $\beta$, qui est perpendiculaire au $\alpha$ et parallèle à la droite $HF$. Nous obtiendrons donc une parabole dont le sommet $A$, et l'axe $p$ seront dans le plan $\alpha$. Menons une tangente $t$ par un point quelconque $C$ de la parabole et que $t$ rencontre l'axe $p$ au point $E$. Par le point $C$ menons l'ordonnée à l'axe qui coupe l'axe au point $D$. Alors

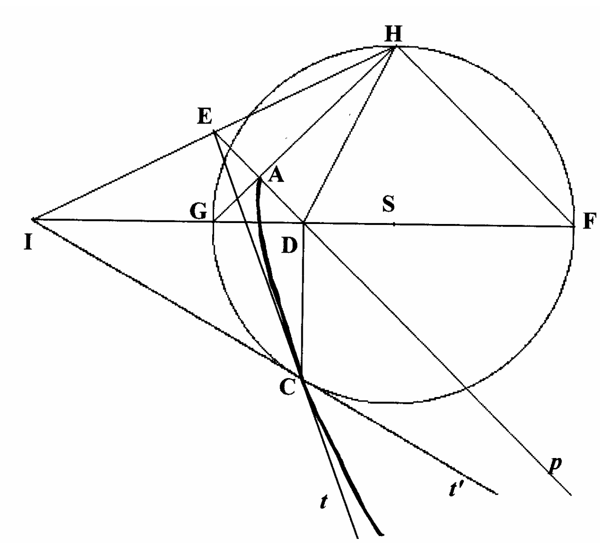


**Fig. 4.2.3**

$$DA = AE .$$

[204] Cette figure spatiale, que nous reproduisons le plus exactement possible d'après la figure de Werne, est assez mal compréhensible car il n'utilise pas de perspective et les points dans l'espace sont confondus avec ceux de la base. La moitié seulement de la parabole est tracée.

**Démonstration**

Nous pouvons supposer que les points *C,D* sont dans le plan de base. En effet s'ils n'y étaient pas, nous pourrions par eux mener le plan parallèle avec la base et nous travaillerions avec cette nouvelle base. Menons la tangente *t'* au *k* au point *C* et que *t'* rencontre le plan $\alpha$ au point *I*. Alors les droites *t, t'* et le sommet *H* seront dans le même plan et les trois points *H, E, I* seront sur une droite. Maintenant rabattons le plan $\alpha$ dans le plan de base autour de la droite *FG*. Alors le point *H* sera sur le cercle *k*, car l'angle $\angle FHG$ est droit. Nous pouvons donc appliquer la proposition 13 et nous obtenons $\angle DHG = \angle GHI$. Et comme l'axe *p* est perpendiculaire à la droite *HG*, nous obtenons $DA = AE$. QED

Dans cette démonstration une situation dans le plan de base est donc transportée par moyen du rabattement dans le plan de coupe. Nous pouvons interpréter cette construction comme si la division harmonique *Harm(FDGI)* se projetait avec le centre *H* sur la droite *p* parallèle à *FH*.

Remarquons aussi que Werner ainsi que La Hire utilisent une figure où le cercle de base n'est pas déformé. Ceci évidemment dans le but que le lecteur puisse mieux voir l'application des lemmes pour le cercle.

Le résultat de la proposition 15 est assez proche des résultats de La Hire concernant la division harmonique. Werner, par contre, utilise essentiellement le fait que le cône est droit et qu'il est coupé par un plan perpendiculaire à une des droites sur sa surface et sa proposition perd alors sa généralité.

## 4.3 Guidobaldo dal Monte

Le livre *Perspectivae libri sex*,[205] de Guidobaldo dal Monte est essentiellement un ouvrage à destination pratique, mais il contient aussi des études théoriques rigoureuses.[206] Les sections coniques y apparaissent naturellement comme des perspectives ou des projections du cercle et donc, sans être étudiées systématiquement, des procédés projectives sont sollicitées.

Par exemple, dans la proposition 29 du livre IV (fig. 4.3.1) dal Monte propose le problème qui consiste à trouver la distance *SD* de l'œil (dont la hauteur *SA* est donnée) au tableau, pour que le cercle, dont le diamètre et la position sont donnés, apparaisse comme cercle sur le tableau.

Ce problème est résolu en utilisant la proposition 5 du livre I des coniques d'Apollonius, d'après laquelle la section du cône est un cercle si, et seulement si, elle est antiparallèle au plan de base, c'est à dire si $\angle AXY = \angle ABC$. En considèrant les triangles semblables Monte obtient alors la condition $\frac{BS}{SA} = \frac{SA}{CS}$ pour la distance du point $A$.

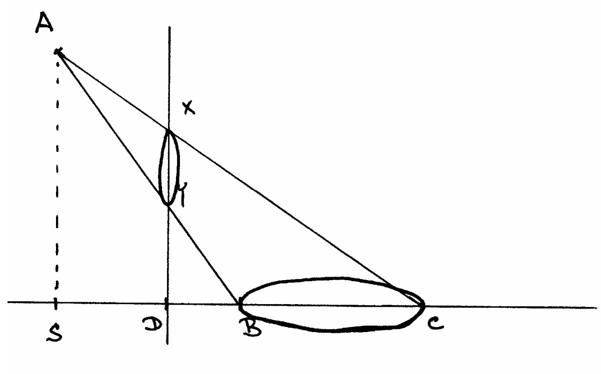



**Fig. 4.3.1**

### 4.3.1 Théorie des ombres

Le livre V est consacré à une belle théorie de la construction des ombres de divers objets, la position du point lumineux et le plan de projection étant donnés. Les sections coniques, plus exactement l'ellipse, sont utilisées dans plusieures propositions dont le fondement est la proposition 9.

[205] [Monte, G. dal 1600]
[206] Ce livre est assez difficilement trouvable. L'exemplaire de la BN de Paris ne peut être consulté qu'à titre exceptionnel. Une thèse, qui doit contenir une traduction en français, a été soutenue en 1991 par Ch. Guipaud mais sa version finale n'a pas été déposée au Centre de reproduction des thèses. L'article [Guipaud, Ch. 1991] ne contient que relativement peu d'informations.

**Propositio 9**

> "Dato lumine, datoque circulo subiecto plano inclinato, cuius inclinatio sit data, atque sit circuli, ac subiecti plani sectio communis; umbram in subiecto plano invenire."

Donc nous avons (fig. 4.3.2) une source de lumière *B* le plan de projection $\alpha$, et dans l'espace le cercle *CDE* qui est incliné par rapport à $\alpha$, et dont nous connaissons la position.[207] Nous devons construire l'ombre que le cercle projette sur le plan $\alpha$.[208]

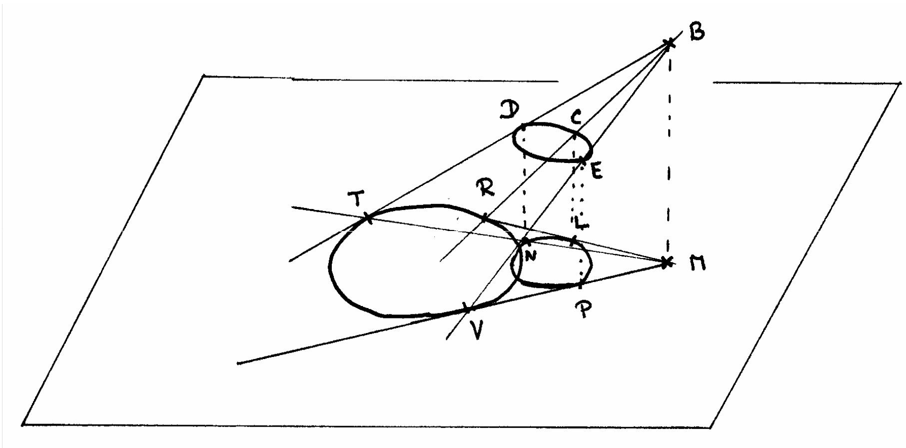



**Fig. 4.3.2**

L'ombre, ou autrement dit la section conique par le plan $\alpha$ du cône avec la base *CDE* et le sommet *B*, est construite de la manière suivante. Nous projetons toute la situation orthogonalement dans le plan $\alpha$. Nous obtenons donc une ellipse *NLP* comme projection du cercle *DCE*. D'autre part, le point lumineux *B* se projette sur un point *M* et les rayons de lumière se projettent sur les lignes droites correspondantes. Maintenant nous pouvons construire plusieurs points de l'ellipse *VTR*, qui délimite la zone de l'ombre. Par exemple le

[207]Monte considère uniquement le cas où tout le cercle est plus bas que la source de la lumière, et donc tous les points du cercle sont projetés sur le plan $\alpha$ à une distance finie. Nous obtenons donc toujours une ellipse ou un cercle.
[208] Dans les propositions précèdentes le cercle n'est pas incliné par rapport au plan $\alpha$ et son ombre est simplement un cercle.

point *R*, qui est la projection du point *C* du cercle, est construit dans le plan *BLMC*, perpendiculaire au plan $\alpha$, comme intersection des droites *BC* et *ML*.

Nous voyons que la considération des ombres projetées par le cercle évoque une génération projective des sections coniques. D'autre part l'idée de se servir d'une projection orthogonale dans le plan de coupe pour construire la section ressemble à la méthode utilisée par La Hire dans ses *Planiconiques*. Dal Monte, par contre, ne développe pas les propriétés des sections coniques par projection, ce qui n'est pas le propos de son ouvrage. Il ne réduit pas non plus au plan la construction des points de la section, car dans sa démarche il faut toujours travailler dans le plan perpendiculaire au plan de coupe.

Dans la suite du livre V la proposition 9 est appliquée à la construction des ombres

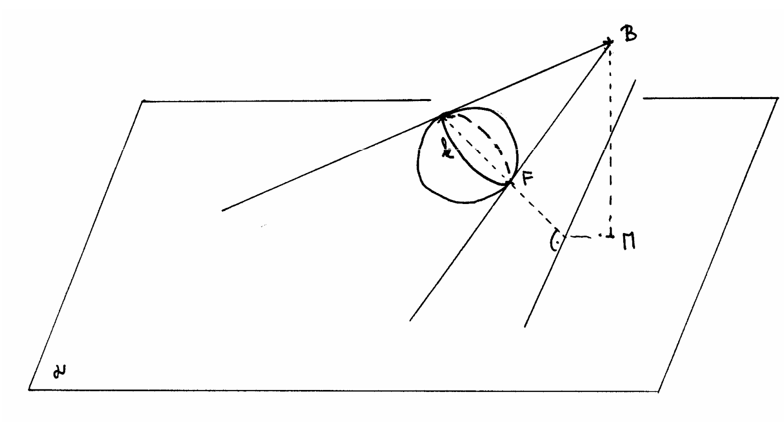



**Fig. 4.3.3**

de plusieurs objets qui contiennent le cercle, comme aux cylindres ou aux cônes etc. Par exemple, dans la proposition 13 l'ombre d'une sphère (fig. 4.3.3) doit être trouvée.

"Dato lumine, dataque sphaera, in subiecto plano umbram invenire".

Monte considère que l'ombre de la sphère sera la même que celle du cercle *k* formé par tous les points de contact des tangentes à la sphère par le point *B*. La position du cercle *k* peut être facilement déterminée dans le plan *FBM* perpendiculaire au plan de la projection et nous pouvons utiliser la proposition 9.

Nous trouvons en dal Monte encore un autre type de géomètre. Cette fois ci c'est la pratique qui prévaut dans son discours, mais il utilise de beaux raisonnements géométriques et connaît des traités géométriques difficiles comme les *Sections* d'Apollonius.

## 4.4 Girard Desargues

La Hire a souvent été considéré comme un élève de Desargues.[209] Nous voulons dans ce paragraphe présenter les points communs ainsi que les points de divergence dans les méthodes de ces deux géomètres.

### 4.4.1 Introduction

Girard Desargues (1591-1661) est un des géomètres les plus originaux, sinon le plus original, du XVII$^{ème}$ siècle. Il était architecte par sa profession et en géométrie il a eu des visions très profondes et originales.

Desargues a publié plusieurs ouvrages qui sont en général assez courts. Parmi ceux qui nous sont parvenus seul le *Brouillon project d'atteinte aux événements des rencontres du Cône avec un Plan*[210] de 1639 concerne essentiellement la géométrie pure. Les autres traités, ne contenant souvent que quelques pages, traitent de problèmes pratiques tels que la perspective [Desargues, G. 1636], la construction des cadrans solaires [Desargues, G. 1640a] ou la coupe des pierres [Desargues, G. 1640]. En 1648 Abraham Bosse, un grand ami et admirateur de Desargues, a publié un traité de la perspective d'après la méthode de Desargues [Bosse, A. 1648]. Dans ce livre nous trouvons trois propositions géométriques (pages 340-343) où le théorème connu maintenant comme le théorème de Desargues sur les triangles en perspective est démontré. Nous voyons, donc, que dans le domaine de la géométrie pure nous n'avons de Desargues que le *Brouillon project* et ces trois propositions.[211]

L'œuvre et la vie de Desargues ont été assez souvent et profondément étudiées. Parmi les études citons, par exemple, l'édition des textes avec commentaires et essais par R. Taton - [Taton, R. 1951], une traduction en anglais des textes mathématiques avec des commentaires et plusieurs chapitres qui situent Desargues par rapport à l'histoire des mathématiques - [Field, J.V. – Gray, J. 1987], un article [Hogendijk, J.P. 1991] analysant en détail la différence entre le *Brouillon project* et les *Coniques* d'Apollonius et le recueil des

[209] Voir le paragraphe 1.3.1.
[210] Cet ouvrage a été édité par René Taton dans [Taton, R. 1951].
[211] Si Desargues a écrit d'autres traités géométriques, il sont perdus aujourd'hui. C'est valable en particulier pour sont traité sur les sections coniques *Leçons des ténébres* dont Taton montre l'existence.

articles concernant divers aspects de l'œuvre et de la vie de Desargues [Dhombres, J. – Sakarovitch, J. 1994]. Dans ce recueil en particulier l'article [Le Goff, J.P. 1994] présente et analyse le *Brouillon project.*

Nous n'allons pas présenter en détail la géométrie de Desargues ni analyser ses méthodes, mais nous remarquerons plusieurs points qui ont un rapport à l'œuvre de La Hire. Nous renvoyons le lecteur interessé par Desargues et sa création scientifique aux publications citées plus haut.

### 4.4.2 Les liens entre Desargues et La Hire

Tout d'abord nous devons mentionner plusieurs liens tout à fait indéniables entre Desargues et La Hire.

Tous les deux appartiennent, pour ainsi dire, à la même souche de géomètres dont la recherche géométrique est trés liée aux arts, à la perspective, à l'architecture, aux applications etc. Ils ont tous les deux publié des travaux concernant la théorie des sections coniques mais aussi des disciplines pratiques telles que la gnomonique, l'architecture ou la mécanique.

La Hire publie ses premiers travaux dans les années 70 du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, quelque vingt ans après que Desargues a arrêté ses activités scientifiques publiques. Nous savons par contre, qu'au moins deux personnes ont bien connu Desargues et ont pu plus tard transmetre ses idées à La Hire. C'est d'abord son père le peintre Laurent de La Hyre. Dans son ouvrage sur la coupe des pierres, [Desargues, G. 1640] Desargues cite Laurent de La Hyre parmi les personnes qui ont suivi ses cours à Paris.[212]

La deuxième personne qui doit être considérée comme un intermédiaire possible entre Desargues et La Hire est le graveur Abraham Bosse. Il était ami et admirateur de Desargues et nous avons vu (voir le chapitre 1.1) qu'il était en contact avec Philippe de La Hire dans les années qui précédaient la publication de la *Nouvelle méthode* en 1673.

Il est certain que ces deux personnes ont dû faire connaître à La Hire le nom de Desargues et certains de ses principes. Mais, à notre avis, il ne faut pas suréstimer la qualité

[212] Voir par exemple [Taton, R. 1951] page 39.

mathématique de ces moyens d'information. Laurent de La Hyre est mort en 1656 quand Philippe n'avait que 16 ans, tandis sa première publication a eu lieu quand il en a eu 32. Il est alors peu probable que Philippe de La Hire ait pu à cet âge de son père, qui de surcroît n'était pas mathématicien, apprendre des idée géométriques difficiles. De même Abraham Bosse n'était pas un mathématicien et son manque de compétences géométriques avancées est prouvé par la nécessité de s'adresser justement à Philippe de La Hire pour résoudre plusieurs problèmes assez élémentaires concernant les sections coniques.[213] Ainsi nous trouvons probable que ces deux personnes n'ont pas appris à La Hire la géométrie de Desargues comme telle mais qu'elles l'ont plutôt motivé dans sa recherche des méthodes et discours projectifs.

Le dernier lien que nous devons citer est plus anecdotique et ne concerne pas directement notre sujet. Nous savons que Desargues a installé au château de Beaulieu un mécanisme de pompage qui a été plus tard remplacé par La Hire, comme il nous l'apprend dans son "Traité des épicycloïdes".[214] Il est alors tout à fait possible que La Hire se soit inspiré de Desargues dans la possibilité d'utiliser la forme épicycloïdale pour construire les dents des roues dentées. Par contre, à notre connaissance, Desargues n'a pas publié de traité sur les épicycloïdes.

### 4.4.3 Connaissance de *Brouillon project* par La Hire

La Hire a certainement connu le *Brouillon project* sur les coniques de Desargues, car il en existe une copie manuscrite de la main de La Hire. Cette copie est même très importante, car jusqu’à la découverte en 1951 d’un exemplaire imprimé, c'était la seule version connue de cet ouvrage. De plus, dans l'exemplaire imprimé les figures manquent, et donc, actuellement, nous n’avons que les figures de la main de La Hire.

La copie manuscrite est datée de l'an 1679 et nous sommes donc sûrs qu'à partir de ce moment, La Hire a profondement compris la méthode de Desargues. Mais la méthode de La Hire a été publiée en 1673. A-t-il bien connu alors la méthode arguésienne?

---

[213] Cet appel à La Hire a donné naisance au mémoire "Observations sur les points d'attouchement" [La Hire, Ph. de 1672] – voir le paragraphe 2.1.4.
[214] [La Hire, Ph. de 1694], page 342.

Le nom de Girard Desargues est, ainsi que celui d'Apollonius, mentionné dans l'Avant-propos de la *Nouvelle méthode*. La Hire nous dit que personne n'a écrit sur les coniques en français "hormis Monsieur Desargues qui en a donné quelque chose sous le nom de *Brouillon project* … qui n'a point esté mis en sa perfection".

Dans la notice qui suit sa copie manuscrite du *Brouillon project* La Hire affirme ne pas avoir lu ce livre avant 1679. Cette notice est d'un grand interêt et nous la citons *in extenso*:

> "L'an 1679 au mois de Juillet j'ay leu pour la première fois, et transcrit ce livret de Mr Desargues, pour en avoir une plus parfaite connaissance. Il y avoit plus de six ans que j'avois fait imprimer mon premier ouvrage sur les sections coniques. Et je ne fais point de doute que si j'avois eu quelque communication de ce traité cy je n'aurois pas découvert la methode dons je me suis servi car je n'aurois pas cru qu'il eut esté possible de trouver quelque maniere plus simple et qui fut aussi generale. Toutes les demonstrations qui sont icy sont si fort remplies de compositions de raisons et sont prises par des detours si longs que si on les compare a celles que j'ay données des mesmes choses où il n'y a aucune de ces compositions et qui comprennent dans le premier cahier beaucoup plus universellement tout ce qui est icy: Il ne sera pas malaisé de juger de l'avantage de ma methode par dessus celle cy. Elles ont toutes deux pour but commun de demontrer dans le cone les principaux accidents de ses sections par les proprietez de la division d'une certaine ligne droite qu'Apollonius connoissoit tres bien, puisqu'il l'a appliquée dans toutes ses rencontres avec la section du Cone; et dont Mr Desargues fait un cas de son Involution, laquelle j'ay nommée apres Pappus harmoniquement coupée, ce qui me fait juger qu'Apollonius avoit bien decouvert dans le solide la proprieté de cette ligne, mais que n'ayant pu en faire l'application d'une maniere simple, il avoit préféré les demonstrations sur le plan dont il s'est servi a ce qui luy avoit fait decouvrir toutes ces proprietez, et ce fut en considerant attentivement toutes les proprietez de

> cette ligne et tous les cas qui sont dans Apollonius, et en les comparant tous ensemble, que je trouvay le moyen de n'en faire qu'un seul que je donnay dans la methode que j'ay publiée."

Faut-il croire La Hire ou considérer ses propos comme une tentative de dissimuler un plagiat complet? On ne peut pas donner une réponse absolument certaine à cette question. Nous trouvons pourtant les propos de La Hire plausibles.

En effet les deux propos de La Hire sont cohérents. En 1673 il affirme que Desargues a publié "quelque chose" sur les coniques mais ce "quelque chose" n'a pas été mis en sa perfection. Il ne faut pas oublier que le *Brouillon project* a été imprimé à 50 exemplaires et était donc très difficilement accessible. Comme l'affirme Le Goff dans [Le Goff, J.P. 1994] il est pourtant probable que A. Bosse ou Laurent de La Hyre ont possedé ce livre. Il est possible, que La Hire a vu et feuilleté le *Brouillon project* déjà avant 1673 mais que sa forme et sa terminologie difficiles l'ont découragé d'une étude approfondie qu'il n'a entreprise qu'en 1679, peut-être en vue de la publication des *Sectiones conicae*. De plus, il reste tout à fait cohérent avec la notice citée et dans les *Sectiones conicae* il se sert tout à fait des mêmes procédés que dans la *Nouvelle méthode*. Il nous est également difficile d'imaginer que La Hire aurait en 1679 copié de sa propre main le traité qu'il connaissait parfaitement déjà en 1673.

Nous allons maintenant procéder à une comparaison de la méthode de Desargues et de celle de La Hire pour éclaircir la question d'une dépendance éventuelle.

### 4.4.4 Comparaison de la méthode de Desargues et celle de La Hire

Nous devons d'abord remarquer que la comparaison et l'influence possible de Desargues sur La Hire se présentent uniquement à propos de la méthode que nous avons appelée "méthode projective spatiale". Des autres méthodes que nous avons distinguées chez La Hire dans la partie 2, nous ne trouvons pas de trace chez Desargues.

Nous allons, alors, comparer uniquement la méthode de Desargues comme il l'a publiée dans son *Brouillon project* avec la méthode projective spatiale de La Hire comme nous la trouvons essentiellement dans le mémoire "Observations sur les points d'attouchement" de 1672 et dans les traités *Nouvelle méthode* de 1673 et *Sectiones conicae* de 1685.

### Les invariants projectifs

La grande originalité de Girard Desargues consiste dans une compréhension étonnamment complexe et moderne de l'invariance projective qui l'a mené même à compléter les lignes droites par les points à distance infinie. En effet de cette manière les droites concourantes et les droites parallèles ne sont plus deux cas complétement différents mais elles sont deux cas, de même espèce, des droites "de la même ordonnance".[215]

Chez La Hire, nous l'avons vu, les deux cas des droites concourantes et parallèles entre elles sont toujours distingués avec soin et deux démonstrations différentes sont toujours données. Même si nous avons trouvé des traces des réflexions faites à l'aide des points à distance infinie, il semble que pour La Hire ces objets n'avaient pas un statut assez solide pour qu'il les utilise explicitement dans ses travaux de géométrie pure.[216]

Un des éléments essentiels qui caractérisent une méthode projective est l'invariant projectif utilisé. Chez Desargues il s'agit de l'involution de six points sur une droite.[217] Nous n'allons pas suivre l'étude que Desargues fait de ce concept original et nous nous contentons de constater (Fig. 4.4.1) que les trois couples de points $BH$ , $CG$ , $DF$ sont en involution si, et seulement si

$$\frac{BC \times BG}{HC \times HG} = \frac{BD \times BF}{HD \times HF}.$$

Desargues démontre l'invariance projective de l'involution en utilisant plusieurs fois le théorème de Ménélaüs.[218] Chez Desargues cette invariance inclut en soi également la projection éventuelle des points à

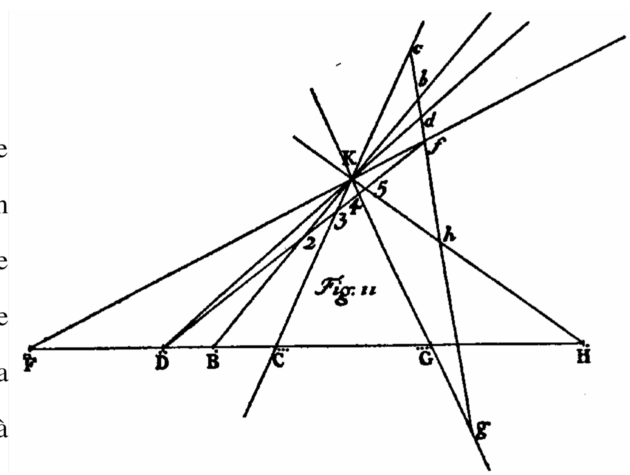



**Fig. 4.4.1**

[215] Voir le début du *Brouillon project* - dans l'édition [Taton, R. 1951] les pages 99-100. Dans la suite nous utiliserons la numérotation des pages d'après cette édition. Le *Brouillon project* s'y étend sur les pages 99-184.
[216] Voir le paragraphe 2.1.8
[217] L'involution est chez Desargues définie à la page 110.
[218] Ce théorème est important non seulement dans l'histoire de la géométrie plane mais encore dans celle de la géométrie sphérique et il est démontré déjà chez Ptolémée dans l'*Almageste* I.13.

l'infini sur les points en distance finie et vice versa.

L'invariant projectif utilisé par La Hire est la division harmonique, comme nous l'avons exposé en détail au paragraphe 2.1.2. Cette configuration de quatre points est un cas spécial de l'involution de Desargues quand le point $D$ coincide avec le point $F$ et le point $C$ coincide avec le point $G$. Desargue en effet distingue ce cas particulier et en démontre certains propriétés. L'invariance de la division harmonique est donc la conséquence de l'invariance de l'involution.

Chez La Hire par contre la division harmonique est introduite dans un autre contexte. Dans son mémoire "Observation sur les points d'attouchement"[219] la division harmonique apparait dans le contexte des *Coniques* d'Apollonius, dans lesquelles elle est utilisée dans plusieurs propositions.[220] Nous ne trouvons, par contre, pas l'involution chez Apollonius. Nous avons vu que La Hire utilise dans ce mémoire uniquement l'invariance triviale de la division harmonique par rapport à une projection entre deux droites parallèles entre elles. Ce n'est que plus tard dans la *Nouvelle méthode* que La Hire démontre et utilise l'invariance de la division harmonique dans sa généralité. La démonstration qu'il en donne dans ce traité est assez particulière et utilise une sorte d'induction finie,[221] qui est très éloignée de la démonstration de Desargues. Ce développement progressif de la compréhension de l'invariance de la division harmonique montre que La Hire a développé ce procédé non en simplifiant le procédé de Desargues, mais en partant des propositions d'Apollonius comme il l'affirme lui même.

### Propriété principale démontrée par projection

Un autre élément qui caractérise une méthode projective consiste dans les propriétés des coniques démontrées par projection à partir de celles du cercle. En effet ces propriétés servent dans la suite pour démontrer toutes les autre propriétés des coniques.

[219] Nous avons presenté ce mémoire au paragraphe 2.1.4.
[220] Voir le chapitre 4.1
[221] Voir la page 67.

Chez Desargues cette propriété centrale est son fameux théorème sur l'involution – la page 143 dans [Taton, R. 1951]. Ce théorème dit que (Fig. 4.4.2) si nous avons un quadrangle complet $BCDE$ et nous le coupons par une transversale $PK$, alors les trois paires des points $IK$, $GH$, $PQ$ obtenus comme les intersections de $PK$ avec les côtés du quadrangle sont en involution.[222] De plus si une conique passe par les sommets $BCDE$ du quadrangle alors ses intersections $M, L$ avec le $PK$ font partie de la même involution.[223] Ce théorème est démontré d'abord pour les quadrangles inscrits dans un cercle et ensuite, par projection, pour n'importe quel quadrangle inscrit dans une conique, grâce à l'invariance projective de l'involution démontrée par Desargues auparavant. A partir de ce théorème sur l'involution Desargues démontre les autres proprietés des coniques.

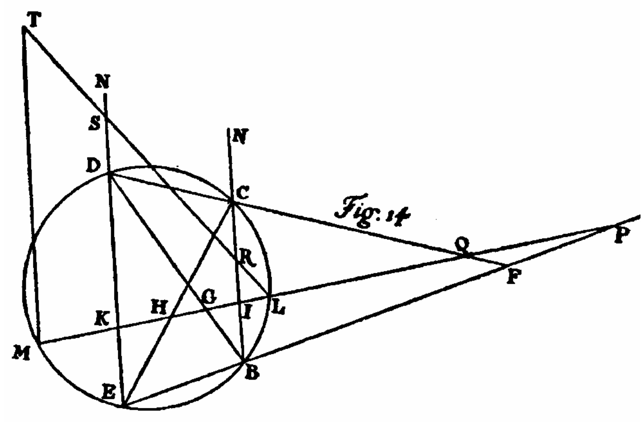



**Fig. 4.4.2**

Chez La Hire c'est la proposition I de la *Nouvelle méthode* qui joue ce rôle central, comme nous avons pu le voir au paragraphe 2.1.2. Cette proposition contient plusieurs résultats dont les plus importants pour la suite sont les deux suivants:[224]

- l'existence du diamètre pour n'importe quelle direction des ordonnées
- le fait que le diamètre est divisé harmoniquement par ses intersections avec la conique, avec une ordonnée et avec la tangente à l'extrémité de cette ordonnée

Ces deux proprietés sont démontrées à partir de la correspondance pôle-polaire pour le cercle en se servant de l'invariance projective de la division harmonique.

---

[222] Remarquons que sur la figure qui accompagne ce théorème les deux côtés $BC$, $ED$ sont parallèles et leur intersection $N$ se trouve donc à distance infinie. En effet la géométrie de Desargues travaille tout à fait normalement avec les points à l'infini.
[223] Une conique est déterminée par cinq points, nous avons donc tout un faisceau des coniques qui passent par les points $BCDE$.
[224] Voir la page 75.

Nous trouvons cette correspondance pôle – polaire chez Desargues également sous le nom de transversales. Mais les proprietés de cette correspondence sont démontrées en utilisant le théorème sur l'involution et ne sont donc pas démontrées directement par projection. Nous voyons donc que le statut de la correspondence pôle – polaire, ainsi que sa démonstration, sont tout à fait différents chez La Hire et chez Desargues.

### D'autres points de comparaison

Les vision et notions de Desargues sont, dans leur intégralité, plus profondes et plus générales que celles de La Hire. La raison en est que La Hire n'accepte pas vraiment les points à l'infini.

Par exemple pour ce qui concerne les définition du cône et des sections coniques Desargues conçoit[225] le cône et le cylindre comme deux "sousgenres" d'un seul genre appelé par lui "Rouleau" dont le sommet est à une distance finie ou infinie. Toute la théorie des sections du cône et du cylindre est de cette manière parfaitement unifiée. Chez La Hire par contre nous ne trouvons dans un premier temps que la théorie des sections coniques[226] et la théorie des sections cylindriques est donnée sous la forme d'un appendice aux pages 65-68 de la *Nouvelle méthode*. Effectivement les sections cylindriques sont faciles à comprendre une fois que les sections coniques sont exposées. Il n'en reste pas moins que ces deux théories sont chez La Hire exprimées par deux discours différents.

De même les propriétés des sections coniques sont chez Desargues exprimées et démontrées pour les trois sections en un seul temps. Il insiste même sur le fait qu'il n'y a au fond qu'une seule conique (page 138):

> "Les plus remarquables proprietez des coupes de rouleau sont communes à toutes les especes & les noms d'Ellipse, Parabole & Hyperbole, ne leur ont été donnez qu'à raison d'evenements qui sont hors d'elles & de leur nature."

---

[225] Ces définitions se trouvent aux pages 133-137 de son traité.
[226] Les définitions du cône, des sections coniques et une discussion des espèces des sections coniques se trouvent aux pages p.15-18 de la *Nouvelle méthode*.

et plus loin (page 140) il insiste sur le fait qu'uniquement les éléments invariants par projection devraient être utilisés:

> "D'autant qu'en un plan le poinct nommé centre d'une coupe de rouleau n'est qu'un cas d'entre les innombrables buts d'ordonnance de droictes, il ne doit estre icy jamais parlé de centre de coupe de rouleau."[227]

Ainsi une seule propriété caracteristique des coniques, qui est une généralisation du symptôme chez Apollonius, est valable pour toutes les coniques, ce qui est un résultat admirable. Dans la situation de la figure 4.4.2 si $BC$, $ED$ et $MT$ sont parallèles, cette propriété peut être exprimée par la formule

$$\frac{KS \times KM}{KD \times KE} = \frac{IR \times IM}{IC \times IB}.$$

La Hire, par contre, n'insiste pas jusqu'à un tel point sur la présentation unifiée des trois sections. Il se base dans certains cas sur un procédé semblable pour les trois coniques mais ses démonstrations sont souvent différentes pour l'ellipse, la parabole et l'hyperbole.

Le désir de Desargues d'unifier les objets va encore plus loin, car il essaie par exemple de considérer la ligne droite comme un cercle avec le centre à l'infini.[228]

Par contre, chez La Hire nous trouvons plus développée l'idée d'une correspondance projective entre les objets. Cette “correspondance dans l’espace” est définie explicitement chez La Hire dans la *Nouvelle méthode*.[229] Le concept de la correspondance est plus important dans ses études planes des coniques comme nous l'avons analysé en détail aux paragraphes 2.2.4 et 2.3.3, mais même dans le contexte de la méthode spatiale ce point de vue est explicité par La Hire et nous le considérons comme caractéristique pour lui. Alors si La Hire est moins profond dans ses visions projectives, il est par contre, plus avancé dans la compréhension des projections comme des transformations des points et des objets.

Enfin nous devons insister sur la différence énorme qui est entre La Hire et Desargues du point de vue de la clarté et du souci pédagogique de leurs traités. Le *Brouillon*

---

[227] Malgré cette vision unificatrice très présente chez Desargues il se sent obligé de traiter certains éléments qui ne sont pas invariants par projection comme par exemple la théorie des foyers.
[228] La page 101.
[229] Voir la page 71.

*project* est certainement un des livres mathématiques du XVII[ème] les plus difficiles à lire. Cela est dû non seulement à la complexité du sujet mais aussi à la manière d'écrire de Desargues. Effectivement dans son traité il utilise des termes non familiers à son époque, il ne donne pas une seule figure spatiale[230] et la structure de son traité n'est pas tout à fait claire, car il n'indique pas clairement ce qui est un théorème, où la démonstration se termine etc.[231]

#### 4.4.5 Blaise Pascal – élève de Desargues

Nous ne pouvons pas passer sous silence Blaise Pascal qui maitrisaît parfaitement les procédés projectifs. En effet, un chapitre entier devrait être consacré à la comparaison de sa méthode avec celle de La Hire, sans la perte de la quasi totalité des pages qu'il a écrites sur ce sujet. Ainsi, comme il est un élève tout à fait explicitement avoué de Desargues, nous parlerons brièvement de cette question en cet endroit.

Pascal a publié son *Essay pour les coniques* en 1639 alors qu'il n'avait que 16 ans.[232] Il s'agit d'un tout petit mémoire imprimé sous la forme d'une affiche. Pascal avoue son admiration pour Desargues dont le traité l'a incité à développer sa propre méthode pour les coniques. Parmi les quelques propositions qui sont données sans démonstration la plus importante est le célèbre théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique. Plus tard Pascal a rédigé son *Traité des coniques* qui n'a jamais été imprimé et qui est malheureusément perdu aujourd'hui. Nous savons pourtant que Leibniz avait lu le manuscit et en a écrit une lettre à Etienne Périer qui était un neveu de Pascal. Ce traité était justement un développement de la théorie des sections coniques basée sur le théorème mentionné supra.

Il est extrêmement intéressant que la méthode projective de Pascal soit purement descriptive. Nous voulons dire par là, que son théorème est exprimé uniquement dans les termes d'incidence des droites et des points et n'utilise pas les longueurs. Les invariants projectifs de Desargues et de La Hire sont, par contre, exprimés de manière métrique.

---

[230] Nous n'avons pas les figures originales, mais même dans le texte Desargues ne fait pas appel à une figure spatiale. Dans [Le Goff, J.P. 1994] à la page 163 la correspondence est montrée entre les figures faites par La Hire et la numérotation originale. Plus loin à la page 181 Le Goff explique pourquoi Desargues n'utilise pas les figures spatiales.

[231] Cette observation doit être modérée par le fait que son traité est un "brouillon".

[232] Voir [Pascal, B. 1963], [Taton, R. 1955] et [Taton, R. 1964].

Comme l'a remarque déjà Chasles, nous ne trouvons pas de traces de cette approche de Pascal chez La Hire. Il très probable qu'il n'a pas connu ses traités sur les coniques dont l'un était en manuscrit uniquement et l'autre imprimé à quelques exemplaires. De plus, la méthode projective de La Hire est tout à fait différente de celle de Pascal.

### 4.4.6 Conclusion

En lisant le *Brouillon project* de Desargues nous sommes saisis d'admiration pour l'originalité et la profondeur de ses idées. Il avait une vision très aisée de l'espace à trois dimensions comme nous pouvons le voir aussi bien dans ses écrits théoriques que dans ses écrits de géométrie appliquée.

Il a eu une compréhension étonnamment complète et moderne de l'invariance projective ce qui l'a mené même à completer les lignes droites par les points à distance infinie et même à considérer la droite à l'infini. Cette idée unificatrice est poussée très loin et nous pouvons dire que Desargues travaille dans l'espace projectif, même si il n'était probablement pas conciant de la topologie de cet espace, par exemple de l'impossibilitée de l'orienter. Ainsi il nous semble que même s'il parle des sections coniques tout au long de son traité son objectif principal n'est pas vraiment d'en donner une nouvelle méthode, mais surtout, de construire une nouvelle vision de la géométrie – la géométrie projective.

La Hire, par contre, comme nous avons pu le voir dans la partie 2 et dans le paragraphe 4.1, veux réecrire la théorie des sections coniques. Il donne plusieurs méthodes pour le faire parmi lesquelles la méthode projective spatiale seule ressemble à celle de Desargues. Les autres méthodes que La Hire utilise pour étudier les sections coniques ne sont pas présentes chez Desargues.

Les méthodes projectives spatiales de ces deux géomètres ont un certain nombre de caractéristiques semblables mais elles diffèrent sur d'autres points importants. En gros, nous pouvons dire que les procédés de La Hire sont moins généraux. Le fait que La Hire utilise la division harmonique qui est un cas particulier de l'involution de Desargues, n'est pas nécessairement un défaut, car cela montre la possibilité de démontrer les propriétés des sections coniques avec ce moyen réduit. Effectivement comme nous l'a montré la géométrie projective moderne, la division harmonique est suffisante pour développer toute la théorie de cette géométrie.

Nous avons vu que les propriétés démontrées pour les coniques par projection sont différentes chez eux. Chez Desargues il s'agit de la propriété du quadrilatère complet inscrit dans un cercle, chez La Hire d'une série des propriétés du cercle exprimées par le moyen de la division harmonique. Or ce sont exactement ces propriétés invariantes qui déterminent la méthode.

Si La Hire utilise des procédés moins généraux que Desargues, la question s'impose de savoir s'il a tout simplement réduit la démarche de Desargues. Nous avons montré que ce n'est pas le cas, car ses motivations, ses présentations et ses démonstrations sont différentes de celles de Desargues. De plus, grâce à son mémoire "Observations sur les points d'attouchement", nous avons pu observer la naissance de ses idées.

Ainsi, en accord avec l'affirmation de La Hire lui-même, nous concluons qu'il a développé sa méthode pour les coniques sans connaître celle de Desargues.

Il est, par contre, tout à fait certain que il a été indirrectement influencé par le courant des méthodes projectives dont Desargues a été le plus brillant représentant.

Grâce à sa capacité pédagogique et à sa vaste connaissance de la géométrie classique il a pu créer une nouvelle théorie des section coniques, théorie très élegante qui combine des procédés classiques et les démonstrations projectives. De cette manière il a sauvegardé ce courant de la pensée projective qui a pris naissance dans le contexte des disciplines pratiques et qui a été le plus profondément comprise par Desargues dans son *Brouillon project.*

## 4.5 Jacques-François Le Poivre

En 1704 le livre intitulé *Traité des sections du cylindre et du cône considérées dans le solide et dans le plan* ... de l'auteur Jacques-François Le Poivre a été publié à Paris. Cet ouvrage se compose de 61 pages accompagnées de 48 figures réparties en huit planches.

Ce livre a été analysé dans un article d'un auteur anonyme dans le *Journal des Sçavans*[233] qui, d'une part, souligne les qualités de l'ouvrage de Le Poivre mais, d'autre part, l'accuse d'avoir simplement repris la méthode des *Planiconiques* et des autres publications de La Hire et essaye donc de nier quasi - complètement son originalité.

Le Poivre, très irrité par cet article, décide de rééditer une version plus courte de son ouvrage en 1708 à Mons sous le titre *Traité des sections du cône considérées dans le solide, avec des démonstrations simples et nouvelles, plus simples et plus générales que celles de l'édition de Paris* 56 pages, 14 figures.[234] De plus il publie sa réponse à cette critique où il proclame avoir inventé sa méthode indépendamment et d'ailleurs il la considère différente, dans son essence, de celle de La Hire.[235]

La personne et l'œuvre de Le Poivre ont été assez négligées par les historiens. Michel Chasles qui le mentionne dans son *Aperçu* [Chasles, M. 1837] aux pages 130-135 considère que sa méthode était proche de celle de La Hire mais d'une origine indépendante.

Récemment un article a paru sur les deux ouvrages de Le Poivre: [Le Goff, J.P. 1993]. Cet article d'une manière très pertinente présente la personne de Le Poivre et les événements et les raisons qui l'ont mené en 1708 à la reédition modifiée de son ouvrage de 1704 (pages 7-27). Aux pages 27-35 les figures et énoncés de l'édition de 1708 sont données sans démonstrations. Une bibliographie importante est presentée à la fin de cet article.

Enfin, un article biographique et bibliographique [Pequet, E. 1995] très exhaustif sur Le Poivre peut être consulté sous forme électronique.

[233] Edition de Liège, 1704, t. VIII, pp. 657-659, édition d'Amsterdam, 1705, t. XXXII, pp. 649-658
[234] Malheureusement je n'ai pas pu consulter ce deuxième ouvrage, mais d'après [Le Goff, J.P. 1993] et [Pequet, E. 1995] il contient la même méthode spatiale présentée d'une manière plus condensée et ne contient absolument pas la méthode plane qui était surtout l'objet de la critique.
[235] Voir le paragraphe 4.5.5.

### 4.5.1 Structure de l'ouvrage

Remarquons la structure très intéressante de l'ouvrage de 1704. Le livre commence par une dédicace et la préface sur laquelle nous reviendrons. Ensuite 36 "Propositions élémentaires" sont données sans démonstration. Il s'agit des connaissances tirées des éléments d'Euclide qui sont présupposées et dont les numéros sont cités chaque fois qu'ils sont utilisés.

Ce n'est qu'après que les pages sont numérotées de 1 à 61. Le pages 1 à 22 traitent des sections du cylindre et les pages 23 à 61 des sections du cône. Nous voyons alors que Le Poivre, comme La Hire, étudie non seulement les sections coniques mais aussi les sections des cylindres. Par contre, Le Poivre considère les sections des cylindres en premier, comme une sorte d'essai de sa méthode, et ensuite, d'une manière plus développée, les sections coniques.

Chacune de ces deux parties contient une étude spatiale des sections et une réduction de cette étude au plan – pour définir et étudier les sections uniquement dans le plan. Cette réduction est en effet assez proche de celle de La Hire mais présente des différences importantes sur lesquelles nous reviendrons. Les figures sont les mêmes pour les deux méthodes.

Le Poivre ne numérote pas les théorèmes ni les définitions. Par contre, il donne des numéros romains aux paragraphes en recommençant la numérotation pour les sections du cône.

Pour les sections du cylindre: aux paragraphes I-XIX on définit la projection cylindrique entre deux plans et on donne des constructions et propriétés de base sans parler encore des cercles.[236] Aux paragraphes XX-XXXIV l'ellipse est définie comme une projection cylindrique du cercle et les notions élémentaires (centre, diamètres, tangentes etc.) sont définies. Aux paragraphes XXXV-XL plusieurs problèmes sont proposés et résolus. Enfin aux paragraphes XLI-XLVI les définitions pour la description de l'ellipse dans le plan sont données et il est montré comment relire les mêmes figures d'une manière plane.[237]

Pour les sections du cône: aux paragraphes I-XIV les définitions concernant la projection conique sont données et les propriétés et constructions de base sont présentées. Aux

[236] Voir le paragraphe 4.5.2 pour les notions utilisées par Le Poivre dans sa description des projections.
[237] Voir le paragraphe 4.5.4.

paragraphes XV-XXV les définitions des sections coniques sont données. Aux paragraphes XXIII-XXVI les définitions pour la méthode plane sont données afin de permettre la lecture alternative des paragraphes et figures qui suivent. Ensuite vient l'étude des coniques où on peut distinguer deux parties: les propriétés des tangentes et des asymptotes de l'hyperbole (paragraphes XXVII-LVIII) et "La comparaison des Parallélogrammes" où on démontre, d'une manière généralisée et directement dans le cône, le symptôme des coniques.

### 4.5.2 La méthode spatiale

Nous allons présenter la méthode spatiale et les notions que Le Poivre utilise. Puisque cette méthode est plus complexe pour les sections du cône que pour celles du cylindre, nous favoriserons la description de cette méthode dans le contexte des sections du cône sans pour autant négliger complètement les définitions liées à la projection cylindrique.

#### Le concept de la projection

Le Poivre est plus explicite que La Hire dans sa description de la projection dans l'espace, bien qu'il n'utilise pas non plus le mot "projection". La notion fondamentale qu'il utilise est la "Réponse".

Il commence chacune des deux parties par une étude indépendante des projections (cylindrique ou conique).

Dans le cas de la projection cylindrique il considère deux plans qui se coupent en ligne droite *DE* (Fig. 4.5.1). Les parallèles à une direction donnée réalisent la correspondance entre points des deux plans. On dit par exemple que le point *h* répond au point

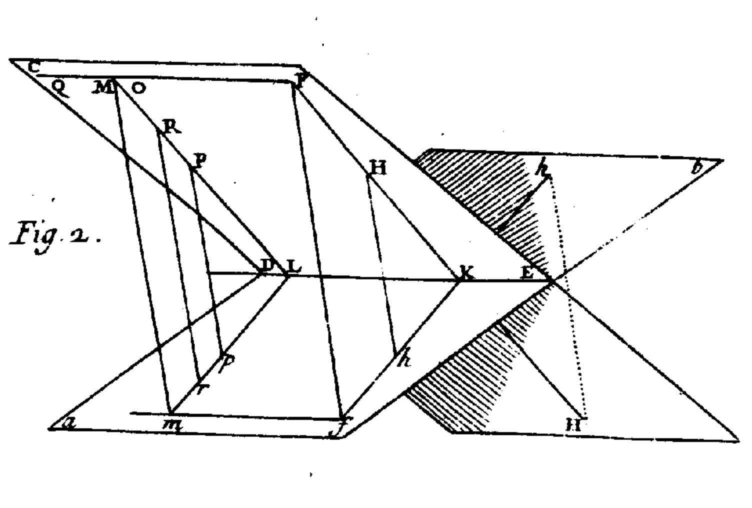



Fig. 4.5.1

$H$. La réponse des points permet naturellement de définir la réponse des lignes droites et courbes. Une ellipse est définie comme la courbe qui répond à un cercle. Le Poivre utilise systématiquement les lettres minuscules pour les points d'un plan et les lettres majuscules correspondantes pour les points correspondants de l'autre plan.

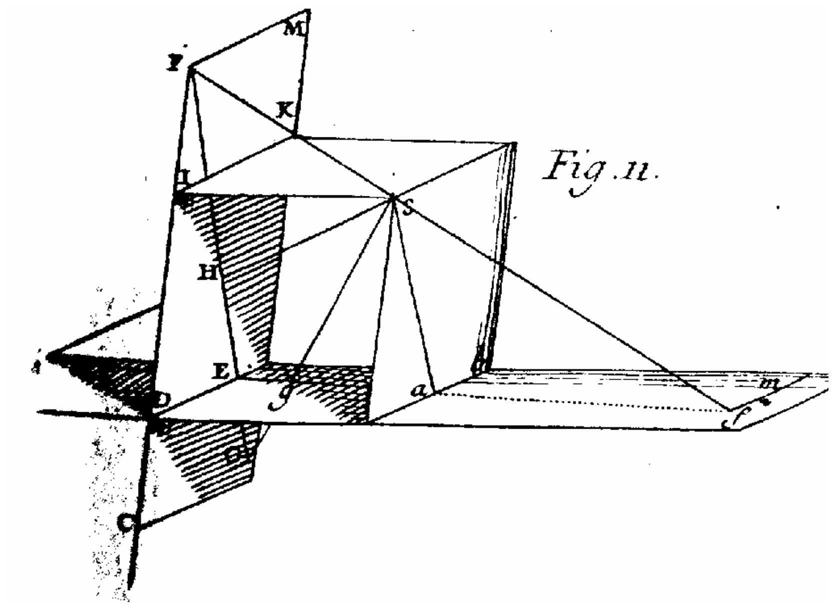



**Fig. 4.5.2**

Le cas de la projection conique est plus compliqué. Le Poivre considère deux plans $DEI$ et $DEa$ (Fig. 4.5.2) qui se coupent dans une ligne droite $DE$, appelée *Base*, et un point $S$ en dehors de ces plans appelé *Sommet*. Les lignes droites qui passent par le sommet sont appelées *Verticales*. Ce sont ces verticales qui réalisent la correspondance projective entre les points des deux plans. On mène par le sommet $S$ deux plans $SKI$ et $Sab$ parallèles respectivement aux plans $DEa$ et $DEI$. Le plan $SKI$ coupe le plan $DEI$ dans la ligne droite appelée *Directrice* du plan $DEa$ et le plan $Sab$ coupe le plan $DEa$ dans la ligne droite appelée *Directrice* du plan $DEI$.

Si une verticale coupe les deux plans aux points $F, f$ on dira que ces deux points *Répondent* l'un à l'autre. Les points de la directrice ne répondent à aucun point de l'autre plan:

> "Un point de directrice de l'un des deux plans, n'a pas de point qui lui répond dans l'autre: puisqu'une verticale qui passe par la directrice ne sçaurait rencontrer cet autre plan auquel elle est parallele."

En se basant sur cette notion des points qui se répondent, Le Poivre définit les droites qui répondent aux droites et les courbes qui répondent aux courbes.

Nous voyons, alors, que Le Poivre, de même que La Hire, évite les points à l'infini. Il est moins correct que La Hire pour ce qui concerne la correspondance entre les droites car il ne résout pas le problème de l'image de l'intersection de la droite avec la directrice.[238]

Son concept de projection est, par contre, plus général. Il détache complètement la définition du cône et elle est explicitement symétrique (les points se répondent mutuellement). En plus, elle est plus détachée de la construction géométrique concrète, que chez La Hire (ici les verticales semblent moins des éléments de la construction que des "signes" de la correspondance des points).

### Définition des trois sections

Une section conique est une courbe qui *répond* à un cercle. Le Poivre distingue les trois sections coniques, de la même manière que La Hire,[239] en discutant la position de la directrice par rapport au cercle générateur. Par contre, il complète cette définition par une autre qui considère directement le faisceau des droites par le sommet:

> "On pourroit définir autrement les trois Sections Coniques, en disant que l'hyperbole est produite par un plan qui rencontre toutes les verticales de la Surface Conique, hormis deux, sçavoir celles qui passent par les deux points où la directrice de l'autre plan coupe le cercle.
>
> Que la parabole est produite par un plan qui rencontre toutes les verticales hormis une, sçavoir celle qui passe par le point où la directrice touche le cercle.

[238] Voir paragraphe 2.1.8 pour la solution de ce problème chez La Hire.
[239] Voir la page 70.

> Et que l'ellipse est produite par un plan, qui rencontre toutes les verticales, en quoy elle convient avec l'ellipse du Cyllindre, lequel on peut regarder comme un Cone dont le sommet est infiniment éloigné de la base, duquel par consequent toutes les verticales sont paralleles entr'elles."[240]

Par cette deuxième définition il s'approche de la conception de Desargues, qui travaille uniquement avec la situation spatiale.[241]

### Principe de la méthode

La compréhension de la situation spatiale et la définition des coniques est tout à fait projective chez Le Poivre. Il définit les tangentes et les asymptotes d'une manière projective etc. Mais à notre avis la méthode de Le Poivre n'est pas projective dans le sens propre car elle n'utilise pas d'invariants projectifs. Il s'agit plutôt d'une évaluation de la déformation des propriétés du cercle quand il est projeté sur une conique. Regardons en détail la démonstration du théorème au paragraphe LIX qui est fondamental dans le traité de Le Poivre. En effet ce théorème est le théorème principal de la dernière section du traité intitulée "De la comparaison des Parallélogrammes" et le symptôme des coniques est immédiatement déduit de ce théorème.

### Théorème LIX (Fig. 4.5.3, 4.5.4)

"Si une ligne $MN$ et deux parallèles $FH$ & $IL$, qu'elles coupent, rencontrent une Section Conique, les deux rectangles $FGH$ et $IKL$ sous les portions des mêmes parallèles seront proportionnels aux deux rectangles $MNG$ & $MNK$ sous les portions de l'autre ligne $MN$."

Ce qui donne la formule:

$$\frac{FG\times GH}{MG\times GN}=\frac{IK\times KL}{MK\times KN}.$$

[240] Remarquons que si les points à l'infini sont exclus du discours strictement mathématique de Le Poivre, il s'en sert dans ses commentaires plus libres.
[241] Voir paragraphe 4.4.

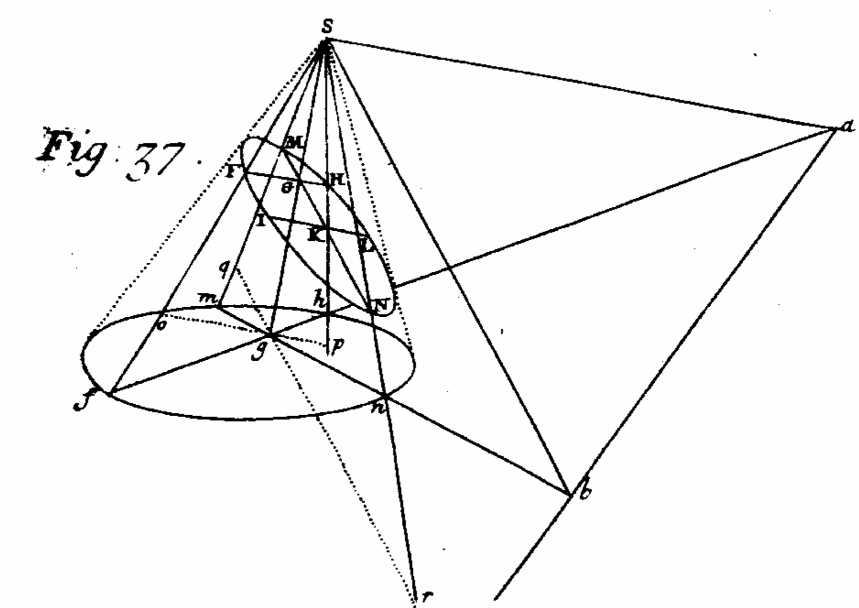



**Fig. 4.5.3**

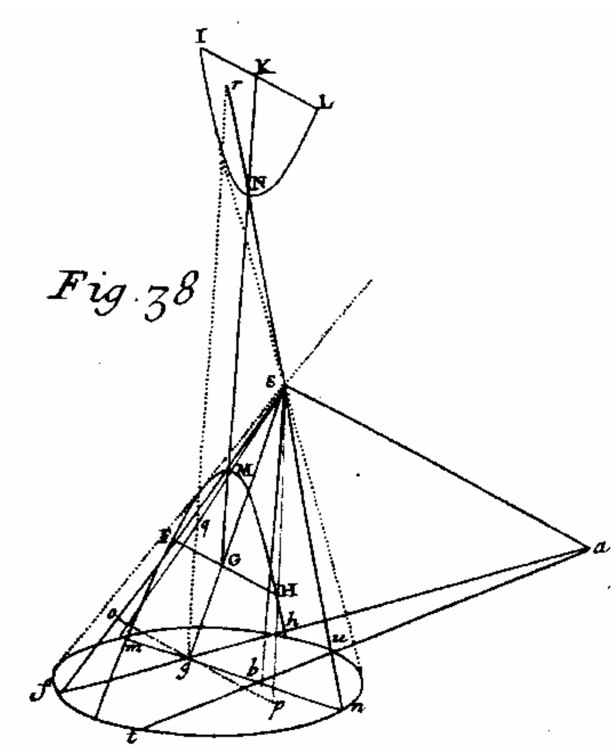



**Fig. 4.5.4**

Dans la démonstration on se propose d'évaluer le premier de ces rapports. Tout d'abord on projette la situation au plan parallèle pour que les segments se coupent en un point qui est dans le plan du cercle. Pour cela on mène par le point $g$, qui dans le cercle générateur répond au point $G$, les deux parallèles $qr$ et $op$ avec les droites $MN$ et $FG$. Evidemment on a l'égalité des rapports

$$\frac{FG\times GH}{MG\times GN}=\frac{og\times gp}{qg\times gr}.$$

Ensuite on évalue le rapport $\frac{og\times gp}{fg\times gh}$. On construit les points $a,b$

dans le plan de base, tels que $sa$ soit parallèle à $FH$ et $Sb$ soit parallèle à $MN$. A cause des triangles semblables on a $\frac{og}{fg}=\frac{sa}{fa}$ et $\frac{gp}{gh}=\frac{sa}{ah}$ et donc

$$\frac{og\times gp}{fg\times gh}=\frac{sa^2}{fa\times ah}=\frac{sa^2}{Puiss(a)}.$$ [242]

Par un raisonnement analogue on obtient $\frac{qg\times gr}{mg\times gn}=\frac{sb^2}{Puiss(b)}$. Et parce que $mg\times gn=qg\times gr=Puiss(g)$ nous obtenons

$$\frac{FG\times GH}{MG\times GN}=\frac{og\times gp}{qg\times gr}=\frac{\frac{sa^2}{Puiss(a)}}{\frac{sb^2}{Puiss(b)}}.$$

Remarquons que ce rapport dépend uniquement des points $a,b$ ou, autrement dit, de la direction des deux segments $FH,MN$. Pour cette raison $\frac{IK\times KL}{MK\times KN}$ sera égal au même rapport ce qui conclut la démonstration.

La méthode de Le Poivre est, comme nous pouvons le voir maintenant, extrêmement intéressante et originale. Elle consiste, à évaluer l'inclination du plan de la section par rapport au plan de la base dans une direction donnée. Dans le théorème nous avons deux directions des droites, qui correspondent aux deux points sur la directrice. On peut évaluer, comme nous l'avons vu, le rapport d'un segment dans la section et du segment correspondant dans le plan du cercle. (Nous avous obtenu par exemple $\frac{og}{fg}=\frac{sa}{fa}$) En plus ce rapport peut être évalué en se servant uniquement des points sur la directrice.

La propriété démontrée peut alors être interprétée comme le théorème concernant la puissance d'un point par rapport au cercle[243] qu'on modifie en calculant justement les déformations des longueurs des divers segments.

Le Poivre procède de la même manière pour d'autres théorèmes, en revenant très souvent au cône et en recommencant "à zéro" plutôt que de développer les propriétés déjà obtenues en se servant des procédés plans classiques.

---

[242] Nous notons par *Puiss( )* la puissance d'un point par rapport au cercle de base.
[243] Elements d'Euclide III.35 et III.36 - voir par exemple [Euclid 1956].

Les démonstrations sont faites toujours de nouveau à partir de cercle et ne se basent pas sur les propriétés précédemment démontrées. Tous se passe alors dans l'espace. C'est une différence importante par rapport à La Hire qui, après avoir démontré la propriété fondamentale dans l'espace, développe cette propriété par des démonstrations planes.

### 4.5.3 Les figures géométriques

Nous avons vu l'importance de la manière dont sont réalisées les figures géométriques chez La Hire.[244] C'est pourquoi, avant de présenter la méthode plane de Le Poivre, nous dirons quelques mots sur les figures de son traité.

Ces figures sont réalisées dans la projection cylindrique, mais dans un plan qui n'est pas parallèle avec la base du cône. De cette manière elles ressemblent à celle des *Sectiones conicae* de La Hire. Le Poivre dit explicitement comment ses figures sont faites.

> "J'ai crû qu'il étoit necessaire de donner icy un avis au Lecteur touchant mes Figures; car quoyque les Figures d'Optique puissent produire leur effet dans l'oeil du Spectateur, sans qu'il fasse attention aux regles de l'art, cependent il sera d'un fort usage, de s'imaginer celles de ce Livre, lesquelles representeront differens plans, produites par des paralleles tombant de tous les points de l'objet sur le plan de la projection qui est celuy du papier. Ces paralleles feroient les raïons mêmes par lesquels l'oeil verroit cet objet, s'il en étoit infiniment éloigné; c'est pourquoy on pourroit les nommer Raïons. Il est clair que selon cette projection, les lignes paralleles se representeront par des paralleles, excepté celles qui se trouveront sur un plan parallele aux raïons, qui seront representées par une ligne droite de même que ce plan: Pareilles projections où les principaux plans d'un Solide sont representez par des lignes droites, & par consequent leur commune Section par des points, est le plus simple de toutes, & on l'employe souvent à regler les autres.

[244] Voir le paragraphe 2.2.5.

> Il importe extrêmement de remarquer, que lorsqu'il arrive que ces raïons qui doivent produire l'image sont paralleles à une même ligne perpendiculaire à la commune Section du plan de la projection & d'un autre plan, & également inclinés sur tous les deux; les choses qui sont dans ce dernier plan ne sont du tout pas alterées par la projection. De sorte que ce qui est, par example, angle droit, demeure angle droit, & ce qui est cercle, demeure cercle.[245]"

Nous voyons que ce que nous avons été obligé de déduire sur les figures de La Hire,[246] Le Poivre nous le dit explicitement. En effet, il est conscient de l'importance de la construction des figures pour la recherche géométrique, surtout pour le passage de la méthode spatiale à la méthode plane.

En plus de ces figures spatiales, nous trouvons dans le traité quelques figures planes, qui sont faites d'une manière tout à fait habituelle.

### 4.5.4 La méthode plane

Nous trouvons chez Le Poivre la même double présentation de la théorie des sections coniques que chez La Hire. Comme La Hire, il utilise les mêmes figures pour la méthode plane et pour la méthode spatiale. Parce que ces figures sont réalisées dans une projection cylindrique dans un plan qui n'est pas parallèle au plan de la base[247], il faut accepter, dans leurs interprétations planes, que les cercles sont représentés par des ellipses.

Mais Le Poivre ne se contente pas de l'utilisation des mêmes figures. Il utilise le même discours, les mêmes énoncés des théorèmes et les mêmes démonstrations dans les deux interprétations. Donc non seulement les mêmes figures, mais encore le même texte, peuvent être lus de deux manières différentes. Les mots qui ont des significations spatiales définies

[245] Cette dernière remarque constate la conservation des distances quand on projette cylindriquement d'un plan dans un plan dont la position est anti-parallèle.
[246] Surtout le fait qu'elle sont faites dans la projection cylindrique.
[247] La cône est vu "de côté"

plus haut[248] doivent avoir de nouvelles significations dans le plan. Le Poivre donne donc une deuxième série des définitions "Pour la méthode des Plans".

Pour la réduction au plan de la projection cylindrique on définit la correspondance des points de la manière suivante. Si on a dans un plan une ligne droite $DE$ (Fig. 4.5.5) appelée *Base* et une direction des parallèles (comme $Mm, Pp$ etc.) et un rapport donné $\frac{m}{n}$,[249] les points $P, p$ se répondent mutuellement s'ils sont sur une des droites de direction donnée et leurs distances de la base sont dans le rapport donné: $\frac{PQ}{pQ} = \frac{m}{n}$. Nous voyons facilement que cette transformation est en réalité une affinité dans le plan.

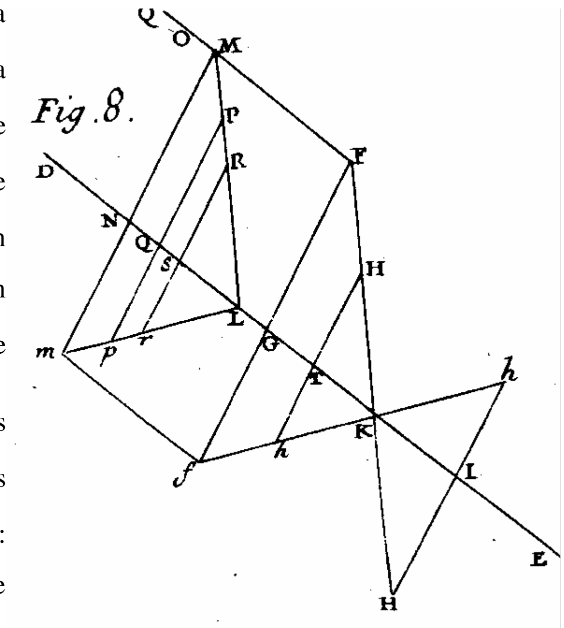



**Fig. 4.5.5**

Pour la réduction au plan de la projection conique il faut donner une règle plus compliquée. Voici la citation du paragraphe XXIII à la page 31 qui correspond à la figure 4.5.6:

> "Deux paralleles $ab, DE$, dont je nomme *Directrice* la première, & *Base* la seconde, étant données dans un plan, avec un point fixe $s$ pris au dehors d'elles, lequel je nomme *Sommet*: Je dis, qu'un point $F$ répond à un autre point $f$, si la distance du premier au second est quatrième proportionelle à la distance de la directrice, à celle de la base, & à celle du sommet."

---

[248] Voir le paragraphe 4.5.2

[249] Il n'est pas clair de quelle nature sont les quantités $m, n$ qui definissent le rapport. S'agit-il de nombres ou de distances? De toutes facons il faut pas comfondre la grandeur $m$ avec le point $m$ dans la figure 4.5.6.

Nous obtenons donc pour la distance $fF$ des deux points correspondants la formule: $\frac{fS}{fF} = \frac{(f,ba)}{(f,DE)} = \frac{fa}{fE}$. Il est évident que la transformation ainsi obtenue est la même que celle des *Planiconiques* de Philippe de La Hire.

En se servant de la correspondance des points, Le Poivre définit naturellement la correspondance des lignes droites et courbes. Ensuite une conique est, bien sûr, la courbe qui répond à un cercle.

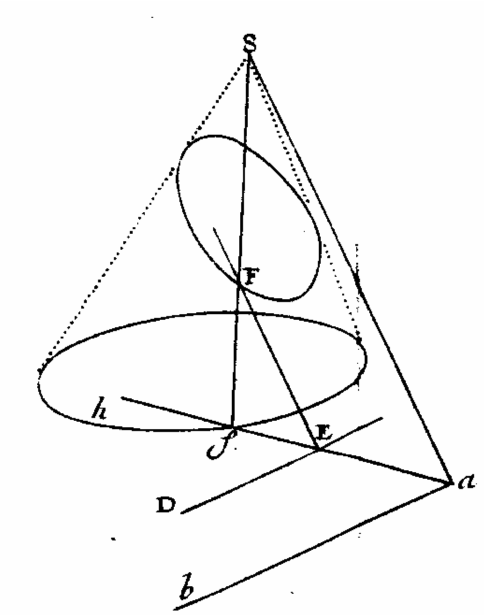


**Fig. 4.5.6**

Nous voyons que ces définitions mettent en avant les rapports des distances, tandis que chez La Hire il s'agissait plus d'une construction. Cela confirme la préférence de Le Poivre pour les évaluations des rapports de longueurs que nous avons vues à propos du théorème LIX plus haut.

Pour les sections du cône ces définitions planes suivent immédiatement les définitions spatiales et Le Poivre constate que les théorèmes qui suivent peuvent être lus aussi bien comme théorèmes plans que comme théorèmes spatiaux:

> "Il sera aisé de faire l'application du reste à la methode des plans. Tout le discours suivant, & même toutes les Figures serviront également aux deux methodes. Il faudra seulement dans celle des plans s'imaginer, que les ellipses qui representent le cercle generateur sont de veritables cercles, ce qui est facile. Ce cercle generateur pouvoit semble-t-il ëtre mieux representé par un cercle, mais les Figures seroient devenuës par là trop embroüillées."

Cette double lecture est possible uniquement parce que Le Poivre utilise des notions (en dehors de celles qui ont, comme nous l'avons vu, une double définition) qui sont préservées par la projection cylindrique dans laquelle sont faites les figures. En réalité Le

Poivre utilise essentiellement la similitude des triangles qui dépend du parallélisme des droites qui est préservé par la projection cylindrique. Le lecteur est invité à retrouver le théorème LIX au paragraphe 4.5.2 et à lire l'énoncé et la démonstration, ainsi que les figures correspondantes, d'une manière "plane".

Le Poivre va alors plus loin dans sa méthode plane que La Hire, car il la propose non seulement pour la projection conique mais aussi pour la projection cylindrique et il utilise le même discours et les mêmes figures dans les deux lectures possibles. Par contre, il ne fait pas de rapprochement entre ces deux méthodes, et ne montre pas qu'on obtient les mêmes courbes par les deux procédés.[250] Il développe tout à fait indépendamment la théorie des sections coniques par ces deux méthodes et, si on voulait être strict, on devrait par exemple distinguer quatre types d'ellipse – une obtenue par la projection cylindrique, la deuxième obtenue par la projection conique et leurs deux réductions au plan.[251]

### 4.5.5 Origine de la méthode

Le Poivre n'indique pas l'origine de sa méthode mais nous pouvons constater qu'il connaissait, au moins partiellement, les travaux de trois géomètres: Desargues, La Hire et L'Hospital.

Dans la préface de son premier traité une lettre de Descartes à Desargues est mentionnée:[252]

> "Si le Public reçoit quelque utilité de ce petit Ouvrage, il en aura autant d'obligation au hazard, qu'à mes longues études.
>
> Je ne l'ay entrepris, qu'à l'occasion d'une lettre que Monsieur Descartes écrivit autrefois à Monsieur Desargues, dans laquelle il luy mandoit, que sur ce qu'il avoit pû conjecturer du Traité de ses Sections Coniques dont le Pere Mersenne luy avoit envoyé le projet, il avoit jugé qu'il pouvoit avoir deux

[250] La Hire le démontre partiellement - voir la page 101.
[251] Par contre Le Poivre démontre dans chaque cas des proprietés des coniques qui sont suffisantes pour démontrer qu'il s'agit de la même courbe.
[252] C'est la lettre de Descartes à Desargues du 19 juin 1639.Cette lettre peut être trouvée par exemple dans [Taton, R. 1951], page 185.

desseins qui seroient fort bons & fort utiles, mais qui ne demanderoient pas tous deux la même maniere de proceder.

L'un seroit d'écrire pour les Doctes, & leur enseigner quelques proprietez de ces Sections Coniques qui ne leur soient pas connuës.

L'autre seroit d'écrire pour les Curieux qui ne sont pas doctes, & de faire que cette matiere que n'a pû être entenduë jusques icy que de fort peu de personnes, & qui est neanmoins fort utile pour la Perspective, la Peinture, l'Architecture, &c. devienne vulgaire & facile à tous ceux qui la voudront étudier dans son Livre.

Je croy avoir accompli ces deux intentions dans ce petit Traité ...

Ceux qui n'aiment pas les longues lectures, trouveront encore icy de quoy se satisfaire; car j'ay renfermé toute la Science des Sections Coniques dans quatre ou cinques feüilles d'une grosse impression, qui n'ont pourtant pas laissé de me coûter trois années de travail, & qui renferment plus de connoissances que de fort gros Volumes qui traitent de ces matieres."

Le prétention d'avoir composé un traité accessible a toutes sortes de lecteurs a été un des objets de la critique.[253] Dans sa réponse Le Poivre explique que la préface n'est pas de lui et qu'il n'est pas d'accord avec son contenu. Par contre, il a en effet parlé de la lettre citée avec l'auteur de la préface, qui nous reste inconnu.

A notre avis, il est peu probable que ce soit cette lettre seule qui a poussé Le Poivre à composer son traité. Par contre, vu que sa méthode est essentiellement projective, la mention du nom de Desargues peut être interprétée comme l'aveu d'une inspiration arguésienne et du désir de rendre cette méthode plus claire et plus accessible au lecteur.

[253] Voir la note 233.

Comme nous l'avons dit plus haut, Le Poivre a été accusé d'avoir copié sa méthode des traités de La Hire, notamment des *Planiconiques*. Le Poivre refuse cette accusation dans sa réponse dont nous choisissons quelques citations:

> "Qu'on exalte tant que l'on voudra Monsieur de la Hire, je ne m'y opposerai pas, puis qu'il le merite ; mais ce que je dois à la justice & à la verité m'empêche de souffrir qu'on impose au public, & que l'on ôte à l'un une chose à qui elle appartient, pour la donner à un autre à qui elle n'appartient pas."

> "Les sections du Cone n'étant proprement que des projections d'un cercle, on ne peut gueres en traiter qu'en parlant de projection. Mais l'Auteur du Journal entend ici ces projections que j'ai tirées , a ce qu'il pretend, de Mr de la Hire, & qui par consequent ne sont pas nouvelles : Mais au moins mes démonstrations le sont. Or cette nouvelle édition, où je ne parle plus de ces projections ,fait bien voir que mes démonstrations n'en dépendent pas. ... Mais après que ce Seigneur m'eût averti qu'elles étoient presque les mêmes que celles de Mr. de la Hire, je ne voulus donner le nom de nouvelle qu'à ma description de l'Ellipse du Cylindre, laquelle n'est point de lui."

> "Les seuls preliminaires de Mr. de la Hire , qui doit être celui qui en a écrit le mieux, sont plus longs que tout mon livre. De maniere qu'avec le travail que l'on emploiera à entendre ces preliminaires, on ne connoîtra encore que quelques proprietez du cercle, sans avoir aucune teinture des sections coniques, quand on en aura une parfaite connoissance par ma methode."

> "Je puis iurer que je ne les ai jamais lû, bien loin de les avoir lû avec soins, ces excellens ouvrages de Mr de la Hire. Cependant on pourroit bien avec quelque raison le croire , s'il y avoit quelque rapport entre ces ouvrages & le mien : mais quel rapport entre des démonstrations longues & composées, &

de courtes et simples ? l'une de ces deux choses peut-elle être jamais le fruit de l'autre ? Rien n'a donné de l'apparence à cette pensée , que ma description des trois sections coniques dans le plan. Mais j'ai voulu la retrancher dans cette édition de mon ouvrage , parce qu'elle ne m'est bonne à rien. Je pourrois dire au contraire que ce traité est le fruit que j'ai recueilli de n'avoir pas lû les ouvrages de Mr . de la Hire , parce que si je les avois lûs,la prevention ou je serois tombé pour sa division en Proportion harmonique, m'eût peut-être empéché de songer à une autre methode ainsi que Mr. de l'Hôpital & le P. Prestet."

Donc Le Poivre dit ne pas avoir lu les traités de La Hire avant la publication de son ouvrage et il constate que s'il y a une certaine ressemblance, elle ne concerne pas le fondement de sa méthode.

En effet, il nous semble qu'il faut distinguer avec soin parmi les divers éléments dont se compose la méthode de Le Poivre. En ce qui concerne la définition des coniques comme des projections du cercle, elle a dû déjà être considérée comme tout à fait naturelle à cette époque. En effet, c'est le point commun partagé par Desargues, Pascal, La Hire et il est présent aussi dans les disciplines où on applique les sections coniques telles que la gnomonique ou la perspective.

Pour ce qui concerne l'étude des sections coniques dans l'espace, la méthode de Le Poivre est à notre avis toute à fait différente de celle de La Hire. Car La Hire s'appuie sur l'invariance de la division harmonique, tandis que Le Poivre évalue la déformation des segments dans la projection. De plus Le Poivre, à la différence de La Hire, démontre très peu de conséquences par les méthodes classiques dans le plan. Il revient jusqu'au dernier théorème à l'espace et le démontre sans le secours des résultats précédents.

Enfin sa réduction des projection au plan est en effet très semblable à celle des *Planiconiques* de La Hire. Nous devons remarquer à cet endroit, que Le Poivre utilise le même mot "directrice" qui a été introduit par La Hire. De plus les deux lignes droites, la directrice et la base (formatrice chez La Hire), portent les même lettres que dans les *Planiconiques,* sans que la lettre $C$ soit utilisée par Le Poivre (comparer les figures 2.2.1 et 4.5.6). Il nous semble alors probable que Le Poivre avait quelques connaissances des *Planiconiques*, au moins par l'intermédiaire d'une tierce personne qui lui aurait montré les figures de cet ouvrage.

Par contre, comme nous l'avons vu, Le Poivre pousse beaucoup plus loin la double présentation des sections coniques (dans l'espace et dans le plan). D'une part il la développe non seulement pour les sections du cône mais encore pour les section du cylindre. D'autre part il se sert non seulement des mêmes figures dans les deux présentations mais encore du même texte.

Nous trouvons encore un argument pour l'indépendance du traité de Le Poivre par rapport à celui de La Hire mais cet argument est à notre avis erroné.[254] Il dit, que les deux méthodes sont très différentes, car La Hire traite des foyers et Le Poivre n'en parle point. Il est vrai que Le Poivre ne parle pas des foyers. Mais pour La Hire ils ne constituent pas le point clé de sa méthode. Ils sont simplement les résultats des théorèmes précédents et n'ont rien à voir avec les méthodes projectives. Peut-être cet argument vient-il d'une confusion entre la *Nouvelle méthode* et les *Nouveaux éléments*. Ces derniers, en effet, prennent les foyers comme le fondement de toute la théorie des sections coniques.[255]

Il est certain que Le Poivre a coopéré avec L'Hospital avant sa mort. De la réponse de Le Poivre à la critique dont nous avons parlé plus haut il est clair que Le Poivre a aidé L'Hospital à tracer certaines figures de son traité sur les sections coniques.[256] Il a aussi demandé à ce dernier de surveiller l'édition de son ouvrage de 1704, mais l'Hôpital était déjà très malade à ce moment et n'a donc pas pu s'engager dans une telle tâche.[257] Enfin il est probable que c'est L'Hospital qui a suggéré à Le Poivre de chercher une démonstration simple du théorème que nous avons présenté plus haut que Le Poivre a démontré au paragraphe LIX de son traité et qui peut très bien constituer la base de toute la théorie des sections coniques.[258]

---

254 Cet argument est presenté par Chasles dans son *Aperçu* et répété par exemple dans [Pequet, E. 1995].
255 Voir le paragraphe 2.3.
256 [L'Hospital, G. de 1707] - pour plus de détails sur cette coopération voir [Le Goff, J.P. 1993].
257 Cela nous explique le fait que la préface de cette ouvrage n'était pas conforme aux désirs de Le Poivre, qui devait s'absenter de Paris au moment de l'impression de son ouvrage.
258 Voir la page 233.

### 4.5.6 Les méthodes de Le Poivre par rapport à celles de La Hire

Nous voyons que Le Poivre est tout à fait dans la ligne des géomètres qui ont utilisé des procédés projectifs pour reconstruire la théorie des sections coniques.

Sa méthode spatiale est très simple et originale. Elle consiste dans l' évaluation de l'inclinaison du plan de la section par rapport au plan de la base et dans l'évaluation de la déformation qui se produit ainsi en passant du cercle de base à la conique.

Il présente également une réduction de sa méthode au plan. Les énoncés et les démonstrations de cette méthode plane se font par les mêmes mots et les mêmes figures.

Nous pouvons constater qu'on trouve dans le traité de La Poivre assez de points communs avec les traités de La Hire. Il est probable qu'il en a eu une connaissance au moins indirecte. Le Poivre a, comme La Hire, des ambitions pédagogiques mais, à notre avis, il ne le dépasse pas sur ce point.

Par contre, Le Poivre a exprimé d'une manière plus profonde la correspondance projective des objets et la possibilité de construire la théorie de façon parfaitement identique dans l'espace et dans le plan. On peut dire également que sa maîtrise des démonstrations dans l'espace semble supérieure à celle de La Hire.

# 5 Conclusion

Dans cette dernière partie nous voudrions résumer les faits et les analyses que nous avons présentés au long des chapitre de cette thèse. Ce faisant nous ferons ressortir les points de vue essentiels auxquels nous ce travail nous a mené.

**Les grandes lignes de la vie de Philippe de La Hire**

Comme nous avons pu le voir au chapitre 1.1 Philippe de La Hire a vécu une longue vie apparemment très régulière, sans grands bouleversements. Il est né à Paris et à l'exception de plusieurs voyages il y vécut toute sa vie. Il est issu d'un milieu assez aisé et sa prudente conduite dans les affaires financières, ainsi que la simplicité de sa vie quotidienne, lui ont permis de garder une prospérité matérielle toute sa vie.

Grâce à son père, le peintre Laurent de La Hyre, il a grandit dans un milieu très cultivé non seulement sur le plan artistique, mais aussi sur le plan scientifique et, en effet, il s'intéressa toute sa vie à divers domaines artistiques et scientifiques. Dans les années 1660-1664 il a fait un séjour en Italie où il a étudié la géométrie qui a dès lors prévalu sur ses intérêts pour la peinture.

Il était le père d'une famille nombreuse dont il s'est bien occupé, pour autant que nous puissions le deviner d'après les quelques témoignages qui nous en sont parvenus. Deux de ses fils Gabriel-Philippe et Jean-Nicolas sont devenus académiciens et nous savons qu'il a été aidé dans certaines tâches d'observation par ses fils et même par ses filles. Il a donc pu partager une partie de ses intérêts scientifiques avec des membres de sa famille.

Même s'il a eu des occasions d'entretenir des relations avec la Cour, en particulier lorsqu'il supervisait les travaux de nivellement à Versailles, selon Fontenelle il préférait consacrer son temps aux observations et à la recherche plutôt qu'à la vie sociale. Effectivement, la quantité de ses publications et de ses journaux d'observation témoigne d'un travail très assidu et concentré.

**Les activités scientifiques de Philippe de La Hire**

Philippe de La Hire a commencé ses activités scientifiques publiques relativement tard. Il a publié son premier mémoire en 1672 alors qu'il avait déjà 32 ans. Son travail scientifique a été assez vite apprécié. En 1678 il est devenu membre de l'Académie des sciences, et plus tard professeur au Collège Royal et à l'Académie d'Architecture et il occupait donc ces trois postes rémunérés.

Dès 1680 il habite l'Observatoire de Paris et peut donc profiter des moyens de cet établissement. Il a eu la possibilité de publier dans le *Journal des Sçavants* et dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences*. C'est surtout dans ce dernier que nous trouvons un très grand nombre de mémoires de La Hire.

Tous ces éléments confirment l'excellente position qu'il occupait dans la communauté scientifique française de son temps.

Nous avons donné au chapitre 2.1 une vue d'ensemble sur ses diverses activités scientifiques et nous avons présenté une bibliographie des travaux de La Hire au paragraphe 1.2.4. Cette bibliographie nous montre la quantité impressionnante de ses travaux ainsi que l'universalité de ses intérêts. En effet comme le montrent ses travaux variés, il était très cultivé dans diverses branches des sciences et il était capable de produire des résultats originaux dans des domaines assez éloignés l'un de l'autre, tels que la géométrie, l'astronomie, la biologie, la mécanique, la théorie de la peinture et de l'architecture, la gnomonique, l'arpentage etc.

Deux sujets de sa recherche sont particulièrement importants. Il s'agit de la théorie des sections coniques et de l'astronomie. Dans ces deux domaines, nous trouvons de nombreux travaux publiés tout au long des années de son activité scientifique.

Ses recherches astronomiques se basent essentiellement sur les observations très assidues qu'il a effectuées pendant presque 40 ans à l'Observatoire de Paris. Le résultat synthétique le plus important de ce travail sont ses *Tabulae astronomicae* publiées en 1702. Ces tables ont été rééditées en plusieurs langues et se trouvent dans de nombreuses bibliothèques.

Un autre domaine mérite d'être mentionné, à savoir la mécanique. La Hire l'a étudiée comme telle, ainsi que dans ses diverses applications à des problèmes concrets.

Nous ne devons pas oublier que, outre son travail de recherche et d'observation, La Hire donnait régulièrement des cours au Collège Royal et à l'Académie d'Architecture. Les questions pédagogiques ont dû le préoccuper beaucoup et, en effet, nous trouvons dans ses publications un souci pédagogique très prononcé.

Nous avons vu qu'il n'a pas consacré son temps aux seules études théoriques, mais qu'il ne dédaignait nullement d'appliquer ses connaissances à des entreprises pratiques. Ainsi, par exemple, il a participé à la préparation de la nouvelle carte de France en 1679 – 1682, au tracé du méridien de Paris en 1683, et il supervisait les travaux de nivellement pour l'adduction d'eau au château de Versailles.

**L'objectif principal des travaux sur les coniques: la réécriture des *Coniques* d'Apollonius**

Quant à la théorie des sections coniques, qui est notre sujet principal, nous avons vu au cours des chapitres de la partie 2 et au chapitre 4.1 que La Hire a avant tout voulu simplifier la démarche classique des *Coniques* d'Apollonius de Perga dont il a eu une excellente connaissance. Son objectif explicite était de surpasser Apollonius en inventant une manière plus simple et plus directe de définir les sections coniques et de démontrer leurs propriétés. Dans ce but il a présenté trois méthodes différentes dont chacune peut être utilisée indépendamment des autres.

**Méthode projective spatiale**

La première méthode que nous avons appelée "Méthode projective spatiale" a fait l'objet du chapitre 2.1. La Hire annonce la découverte de cette méthode déjà dans son tout premier mémoire "Sur les points d'attouchement" de 1672. Ensuite il a publié une première version de cette méthode en 1673 dans sa *Nouvelle méthode en géométrie*. Plus tard, en 1685, il l'a développée dans les *Sectiones conicae*, son livre le plus volumineux sur les sections coniques.

Dans cette méthode les sections coniques sont conçues et étudiées comme des projections du cercle. La Hire démontre certaines propriétés du cercle qu'on peut exprimer en se servant de la division harmonique. Ensuite, en démontrant l'invariance projective de la division harmonique, il obtient les mêmes propriétés pour les sections coniques. Ces propriétés, dont les plus importantes sont celles exprimant la polarité par rapport à la conique, sont suffisamment puissantes pour permettre de démontrer toutes les autres propriétés des sections coniques.

Nous avons pu observer dans le paragraphe 2.1.4 comment La Hire a évolué dans sa compréhension de l'invariance de la division harmonique. Nous avons vu que dans son mémoire de 1672 il n'utilise que l'invariance par rapport à une projection entre deux droites parallèles, ce qui est un résultat trivial. Ce n'est que dans la *Nouvelle méthode* de 1673 qu'il utilise l'invariance de la division harmonique dans toute sa généralité.

**Méthode projective plane**

La deuxième méthode que nous avons appelée "Méthode projective plane" et qui a été publiée dans les *Planiconiques* en 1674 a fait l'objet du chapitre 2.2 En réalité, il s'agit d'une réduction au plan de la méthode projective spatiale. La Hire définit une transformation pour tous les points du plan. Les figures de la méthode spatiale sont réutilisées, cette fois comme figures planes. Sur ces figures, les coniques qui, dans la méthode spatiale ont été définies comme projections du cercle, sont maintenant définies comme transformées du cercle. Les mêmes propriétés que dans la méthode spatiale sont alors démontrées pour les coniques, car la transformation préserve la division harmonique.

A propos de cette méthode nous avons souligné dans les paragraphes 2.2.3 et 2.2.4 deux points extrêmement intéressants. Premièrement, le fait que La Hire utilise les même figures, une fois, comme figures spatiales et, une autre fois, comme figures planes. De cette façon une figure peut représenter deux situations différentes, en fonction de notre manière de la regarder. Deuxièmement il s'agit, probablement, d'une des premières études rigoureuses d'une transformation plane définie non seulement pour les points d'un objet géométrique mais pour l'ensemble des points d'un plan.

**Méthode d'étude des sections coniques à partir des foyers**

La troisième méthode que nous avons analysée au chapitre 2.3 est la "Méthode d'étude des sections coniques à partir des foyers", qui a été publiée dans l'ouvrage *Nouveaux éléments des sections coniques* en 1679. Dans cette méthode La Hire définit les trois sections en se servant des deux foyers pour l'ellipse et l'hyperbole et d'un foyer et de la directrice pour la parabole. De cette manière, par des démonstrations purement planes, La Hire obtient très rapidement des propriétés élémentaires des trois sections. Du fait de sa simplicité, cette méthode a été réutilisée plus tard par divers auteurs et est encore aujourd'hui utilisée dans l'enseignement de la géométrie.

**L'unité des trois méthodes**

Nous avons pu voir en particulier dans les paragraphes 2.2.5 et 2.3.4 que l'invention de ces trois méthodes par La Hire n'était pas indépendante. En effet nous avons vu que la méthode projective plane est issue de la méthode projective spatiale et que la méthode d'étude des sections coniques à partir des foyers est très liée à l'étude des foyers dans les propositions de la *Nouvelle méthode*. Ainsi les trois méthodes, qui peuvent être étudiées indépendamment sont en réalité les résultats d'une seule longue réflexion sur l'ensemble de la théorie des coniques.

Il prend soin aussi de montrer que les courbes obtenues et étudiées par ces trois méthodes sont les mêmes et par conséquent que les trois méthodes présentent des alternatives pour apprendre la théorie des sections coniques.

En présentant et analysant les travaux géométriques de La Hire nous avons retenu plusieurs aspects caractéristiques.

**La Hire – géomètre de l'espace**

Nous avons vu au cours du chapitre 2.1 l'excellente capacité de La Hire à travailler dans l'espace à trois dimensions. Comme Desargues La Hire est un géomètre de l'espace. Il est même allé jusqu'à utiliser, pour des démonstrations des propositions tout à fait planes, des constructions auxiliaires à trois dimensions (à propos des figures 2.1.5 et 2.1.21).

Cette capacité est assez rare comme en témoignent les difficultés que nous rencontrons chez les élèves à imaginer des constructions à trois dimensions. D'ailleurs La Hire constate lui-même à plusieurs reprises que les lecteurs de ses livres ont ces difficultés. C'est également la raison pour laquelle il a cherché des méthodes planes pour les sections coniques.

Le genre de figures utilisées est très important pour la géométrie de La Hire. Il s'agit ordinairement de figures très exactes. Nous avons pu observer au chapitre 2.1 l'évolution dans sa manière de représenter les objets géométriques à trois dimensions entre 1672 et 1685.

**Utilisation simultanée de plusieurs procédés**

Nous avons vu que dans la présentation de ses méthodes, La Hire fut capable de combiner divers procédés et modes de démonstration assez éloignés par leurs origines. De plus il inventait des tours habiles pour simplifier son discours. Dans ses écrits il ne s'enferme pas dans une seule méthode donnée à priori mais il est prêt à faire l'usage du procédé le mieux adapté pour produire le résultat voulu.

Prenons comme exemple quelques résultats de la *Nouvelle méthode* publiée en 1673 et complétée en 1674 par les *Planiconiques* pour voir quelles sont les méthodes et procédés employés. Dans la *Nouvelle méthode* il utilise tout d'abord la démarche projective pour définir les sections et en développer les propriétés projectives. Mais il donne dans le même traité une démonstration de l'invariance de la division harmonique par induction finie (à propos de la figure 2.1.2), une démonstration d'un problème purement plan concernant le cercle par une construction de la sphère à trois dimensions (à propos de la figure 2.1.5), un astucieux passage des propriétés du cercle à celles de l'ellipse par une correspondance des points (à propos de la figure 2.1.23), une démonstration du symptôme pour une hyperbole particulière dans le cône, par la méthode apollonienne (à propos de la figure 2.1.24). De plus, dans les *Planiconiques* qui sont un prolongement de la *Nouvelle méthode* il réduit la méthode spatiale au plan en interprétant les figures originellement spatiales comme des figures planes.

**L'importance des applications des sections coniques**

Comme nous l'avons vu dans la partie 3 les applications des coniques étaient un sujet extrêmement important pour La Hire. Dès le début de ses recherches en géométrie il se préoccupa des problèmes pratiques liés à la théorie des sections coniques. Nous avons vu les applications qu'il fait des sections coniques à la gnomonique, à la construction des astrolabes, à l'architecture, à la théorie des jets des bombes et dans son abrégé d'arpentage.

Mais, même dans ses traité théoriques, La Hire insiste sur l'importance des sections coniques pour diverses applications. Ainsi nous trouvons dans ses traités théorique un grand nombre de constructions des coniques destinées à un usage pratique.

Ces problèmes pratiques n'étaient pas uniquement une des motivations de La Hire pour étudier les sections coniques, mais ils sont liés à certaines des notions clés des méthodes théoriques de La Hire. Ainsi la notion de projection et celle des points à distance infinie sont très liées à la gnomonique et à la construction des astrolabes. Nous avons vu, que dans ces mémoires plus pratiques, La Hire utilise ces notions avec plus de liberté que dans ses traités théoriques et nous pouvons donc à travers les applications deviner une partie de la réflexion de La Hire qui n'est pas explicitement exprimée dans ses traités théoriques.

**Aspect pédagogique des traités de La Hire**

Dans les œuvres de La Hire nous percevons un évident effort pédagogique. Il annonce à divers endroits de ses traités que son objectif est non seulement d'être original, mais également de rendre la matière plus simple et plus accessible aux lecteurs. Effectivement ses écrits sont d'une très grande clarté.

Il est de plus capable d'adapter le niveau de son discours à un public donné. Ainsi par exemple nous pouvons voir une grande différence de niveau de difficulté mathématique entre ses ouvrages: les *Sectiones conicae* sont destinées aux géomètres, les *Nouveaux éléments*, eux, d'utilisation facile pour initiation à la théorie des sections, le mémoire "Méthode générale pour les jets des Bombes" n'a recours aux sections coniques que pour démontrer la justesse de l'instrument proposée, et enfin *L'école des arpenteurs* s'adresse encore plus clairement aux praticiens de la mesure de la terre, puisqu'il se passe des démonstrations.

En utilisant divers procédés géométriques dans ses traités sur les sections coniques La Hire montre son appartenance à plusieurs traditions géométriques.

**Appartenance à la tradition apollonienne**

Nous trouvons dans les écrits de La Hire sur les sections coniques le langage géométrique classique des éléments d'Euclide et des coniques d'Apollonius. De plus comme nous l'avons vu au chapitre 4.1, certains des procédés d'Apollonius de Perga ont été réutilisés par La Hire. Ainsi il se sert dans un cas particulier du triangle par l'axe pour démontrer le symptôme de l'hyperbole. Il utilise aussi le procédé apollonien pour passer de l'expression d'une conique par rapport à un diamètre vers l'expression de la même conique par rapport à un autre diamètre (voir le chapitre 2.3). Le symptôme reste pour lui la propriété caractéristique la plus importante des coniques même si le paramètre a un rôle moins important que chez Apollonius.

De plus La Hire affirme que son usage de le division harmonique comme d'un invariant projectif est inspiré par diverse propositions des *Conique* d'Apollonius qui contiennent cette division. Nous avons examiné cette affirmation aux paragraphes 4.1 et 4.4 et nous l'avons trouvé fiable.

Nous voyons donc, que La Hire par ses motivations, par certaines de ses inspirations et de ses méthodes appartient à la tradition apollonienne des sections coniques.

**Appartenance à la tradition des méthodes projectives**

La Hire adhère de toute évidence à la tradition des méthodes projectives. Cette tradition géométrique, sans aucun doute inspirée par les disciplines pratiques comme la perspective, la gnomonique, l'optique, la construction des astrolabes etc., est surtout représentée au cours du XVII$^{\text{ème}}$ siècle par Girard Desargues et par Blaise Pascal. Ces géomètres ont publié leurs méthodes plus de trente ans avant La Hire et à notre avis leurs intuitions de l'espace projectif ont été plus profondes que celle de La Hire. Malheureusement les traités systématiques sur les sections coniques de ces géomètres sont maintenant perdus.

Du fait de cette perte, les travaux systématiques de La Hire, connus particulièrement par les géomètres anglais (*Sectiones conicae* sont, par exemple, plusieurs fois citées par Newton dans ses *Principia*), ont une place importante dans tradition de la géométrie projective.

Contrairement à Desargues, La Hire est très prudent dans l'utilisation des point à l'infini. Il trouvait probablement que cette notion n'était pas suffisamment claire car il l'évite dans ses traités théoriques. Il est par conséquent obligé de distinguer à chaque fois le cas des parallèles de celui des concourantes. Cette distinction alourdit ses démonstrations. Cependant nous trouvons certaines traces des points à l'infini dans plusieurs figures de La Hire (voir paragraphe 2.1.8) et également dans ses écrits pratiques (voir les chapitres 3.2 et 3.3).

L'invariant projectif utilisé par La Hire est la division harmonique d'un segment. Au paragraphe 2.1.7 nous avons vu son essai intéressant de généraliser cette méthode projective aux courbes du degré supérieur. A ce propos La Hire généralise la division harmonique en un concept très proche du birapport de quatre points. Son étude des courbes du degré supérieur à deux reste en revanche très fragmentaire et nous pouvons dire que La Hire n'a pas comprit profondément cette problématique.

La méthode projective spatiale de La Hire est de ce fait moins générale et profonde que celle de Desargues. On pourrait alors croire que La Hire l'a obtenu en simplifiant directement la méthode de Desargues. Mais nous avons par contre montré en détail au chapitre 4.4 que ce n'est pas le cas. La Hire a certainement été influencé indirectement par Desargues, mais il ne le plagie pas. Sa méthode est en réalité d'une inspiration différente car La Hire s'inspire non seulement du courant de la pensée projective mais aussi d'une manière directe des *Coniques* d'Apollonius.

La Hire fut en effet celui qui a rendu la méthode projective des sections coniques tout à fait correcte par rapport aux mathématiques du XVII$^{ème}$ siècle en excluant toutes les notions qui n'étaient pas suffisamment éclaircies à son époque pour être généralement acceptées. Ainsi sans comprendre les visions projectives dans leur profondeur il s'en est servi pour enrichir la théorie des sections coniques.

L'histoire du développement des procédés projectifs dans la géométrie avant Desargues n'est pas encore suffisamment étudiée. Nous avons donné aux chapitres 4.2 et 4.3 quelques éléments que nous avons trouvés intéressants chez J. Werner et G. dal Monte. Ces éléments montrent la présence de la pensée projective dans les discours qui peuvent être au moins partiellement considéré comme appartenant à la géométrie pure.

**Appartenance à la tradition de la géométrie analytique**

Nous avons vu au chapitre 2.4 qu'en plus des trois méthodes qu'il a utilisé pour refonder la théorie des sections coniques La Hire se servait à l'occasion de la méthode analytiques qu'il maîtrisait très bien. Il ne s'en est pas servi systématiquement pour étudier les sections coniques mais il l'a utilisée pour résoudre certains problèmes, comme le problème de la construction des normales à une section conique. Il était capable de manipuler avec beaucoup d'adresse les expressions algébriques, en les simplifiant et en faisant des substitutions, pour obtenir celles de leurs formes qui peuvent être le mieux interprétées géométriquement.

**Appartenance à la tradition de la construction des sections coniques**

La dernière tradition géométrique que nous voulons distinguer chez La Hire et celle de la construction des sections coniques. Au XVIème et au XVIIème, les méthodes pour tracer les sections coniques ou construire un grand nombre de leurs points étaient nombreuses. Mais ces méthodes étaient souvent données sans démonstration.

La Hire était sceptique quant aux descriptions des coniques par un instrument et nous ne trouvons chez lui aucune description de ce type. Il a en revanche donné plusieurs constructions des coniques point par point et il a démontré qu'elles sont correctes.

Cette problématique est chez La Hire liée d'une manière très intéressante au concept de la transformation. Nous avons vu aux paragraphes 2.2.4 et 2.3.7 que pour lui la transformation n'est jamais conçue d'une manière abstraite, mais qu'elle résulte toujours d'une construction concrète.

En effet dans certaines constructions, il fait varier un des points donnés pour la construction, et le point qui résulte de cette construction varie également. De cette manière, comme le dit La Hire, ce dernier point est *formé* par le point donné. C'est cette correspondance du point donné avec le point construit qui est étudiée chez La Hire et que nous avons interprétée comme transformation. C'est en sa compréhension et son utilisation des transformations géométriques que nous voyons un des apports les plus importants de La Hire aux développement des méthodes géométriques.

**Double lecture d'une figure**

Comme nous l'avons déjà mentionné, un des résultats les plus intéressants de La Hire est sa relecture plane des figures spatiales qu'il fait dans se *Planiconiques* que nous avons étudié au chapitre 2.2.

Nous avons présenté au chapitre 4.5 la méthode géométrique pour les sections coniques de Jacques-François le Poivre. Nous avons vu que sa méthode spatiale des sections coniques est originale et très intéressante. Il a présenté également une réduction de cette méthode au plan par un procédé très semblable à celui de La Hire. Cependant, il pousse plus loin sa double présentation de la méthode spatiale et de la méthode plane. Chez lui non seulement les mêmes figures, mais encore le même texte peut être lu de deux manières différentes.

**Synthèse**

Pour conclure sur la géométrie des sections coniques chez La Hire nous pouvons dire: si La Hire a eu la connaissance des principes des divers traditions géométriques, la tradition à laquelle il adhère le plus profondément est à notre avis la théorie apollonienne des sections coniques. Mais c'est en combinant cette théorie avec d'autres méthodes, en particulier les méthodes projectives, la méthode analytique et les méthodes de construction des coniques, qu'il a obtenu des voies élégantes pour étudier les sections coniques. Par conséquent nous voyons que dans la longue réflexion de La Hire sur la théorie des section coniuqes, plusieurs méthodes géométriques se sont croisées, permettant à cette théorie des sections coniques de parvenir à une certaine maturité.

Mais cette théorie reste chez La Hire sous sa présentation classique, car elle n'est pas complètement transformée par l'usage de la géométrie analytique et par le calcul infinitésimal. C'est pourquoi nous pouvons voir en La Hire un des derniers géomètres classiques.

**Développements possibles**

Le sujet des sections coniques chez Philippe de La Hire nous a permis d'entrevoir plusieurs thèmes que nous n'avons pas pu pour le moment aborder d'une manière systématique.

Un premier thème concerne l'histoire des sections coniques. Les écrits volumineux du XVI$^{ème}$ au début XVIII$^{ème}$ méritent une étude comparative approfondie. Nous pensons ici surtout aux écrits de L'Hôpital, Viviani, Mydorge, Grégoire de St. Vincent, aux commentaires de Commandino, aux traités de Maurolico etc. D'autre part il serait très intéressant de comparer ses écrits au corpus impressionnant des traités des auteurs arabes sur les coniques.

Un deuxième thème serait l'histoire des méthodes projectives en géométrie. Dans un premier temps il faudrait étudier comment les notions et procédés des disciplines pratiques telles que l'optique, la perspective etc. s'introduisent dans la géométrie pure. Dans un deuxième temps il faudrait de voir comment cette théorie prend forme autour des études projectives postérieures à La Hire en particulier chez les géomètres anglais.

Le troisième domaine de recherche possible, lié aux deux précédents, est l'étude de la naissance des transformations. Là encore cette partie de la géométrie a été certainement inspirée en grande partie par des disciplines pratiques et par les méthodes de représentation des objets à trois dimensions. Dans ce domaine aussi une comparaison avec les études des transformations dans la tradition arabe serait très intéressante.

C'est dans ces directions que nous voudrions orienter nos recherches ultérieures.

## Bibliographie

**[Abgrall, P. 2000]**
La géométrie de l'astrolabe au X^e siècle; *Arabic Science and Philosophy*; vol. 10 (2000); pp. 7-77; Cambridge University Press

**[Andersen, K. 1984]**
Some observations concerning Mathematicians Treatment of Perspective Constuctions in the 17th and 18th Centuries; *Mathemata. Festschrift für Heltmuth Gericke*; Stuttgart

**[Andersen, K. 1987]**
Anciens Roots of Linear Perspective; *Acta historica scientiarum naturalium et medicinalium*; 39, p. 75-89; Copenhague

**[Andersen, K. 1988]**
A mathematical perspective on the history of linear perspective from 1435 to the end of the 18th century; *Transactions of the XVth Congress of the International Assotiation of Bibliophiles*

**[Andersen, K. 1991]**
Desargue's Method of Perspective; *Centaurus*; 34, p. 44-91

**[Andersen, K. 1992]**
Perspective and the Plan and Elevation Technique, in particular in the Work by Piero della Francesca; *Amphora. Festschrift für Hans Wussing zu seinem* 65; Bâle

**[Angeli, S. degli 1658]**
*Problemata geometrica sexaginta circa conos, sphaeras, suprficies conicas sphaericasque praecipue versantia*

**[Apollonius 1537]**
*Apollonii Pergei,... Opera per... Joannem Baptistam Memum,... de graeco in latinum traducta et noviter impressa*

**[Apollonius 1566]**
*Conicorum libri quattuor...*; tr. Commandino, Federico

**[Apollonius 1661]**
*Apollonii Pergaei conicorum lib. V, VI, VII, paraphraste Abalphato Asphahanensi, nunc primum editi. Additus in calce Archimedis assumptorum liber*. Ex codicibus arabicis mss.... Abrahamus Ecchellensis

**[Apollonius 1891]**
*Apollonii Pergaei quae graece exstant, cum commentariis antiquis*; tr. Heiberg, J.L.

**[Apollonius 1896]**
*Apollonius de Perga, treatise on conic sections*. Edited in modern notation, with introductions including an essay on the earlier history of the subject, by T. L. Heath,...; tr. Heath, T.L.

**[Apollonius 1925]**
*Les coniques*; Bruges; tr. Ver Eecke, P.

**[Apollonius 1990]**
*Conics, books V to VII :* the Arabic translation of the lost Greek original in the version of the Banu Musa, ed. Toomer, G.J.

**[Barrow, I. 1655]**
*Euclidis Elementorum libri XV, breviter demonstrati*; Cantabrigiae

**[Blondel, F. 1683]**
*L'art de jetter les bombes*; Paris

**[Borelli, G.A. 1673]**
*Euclides restitutus, sive Prisca Geometriae elementa brevius et facilius contexta, in quibus precipue proportionum theoriae nova firmiorique methodo promuntur*, a Jo. Alphonso Borellio,...

**[Borelli, G.A. 1679]**
*Elementa conica Apollonii Paergei et Archimedis Opera nova et breviori methodo demonstrata*

**[Bos, H.J.M. 1980-81]**
The construction of equations, a forgotten ancestor of algebraic geometry; Nieun-Tijdschr-Wisk; 68 n°4,pp.154-165

**[Bosse, A. 1648]**
*Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le geometral ...*; Paris

**[Bosse, A. 1665]**
*Traité des pratiques géometrales et perspectives enseignées dans l'Académie royale de la peinture et sculpture*; Paris

**[Bouquet, F. 1925]**
*Histoire de l'astronomie*; Paris

**[Bourbaki, N. 1984]**
*Elements d'histoire des mathématiques*; Masson

**[Boyer, C.B. 1989]**
*History of Mathematics*

**[Boyer, C.B. 1956]**
A History of Analytic Geometry; New York

**[Brian, E. - Demeulenaere-Dauyère, C. 1996]**
*Histoire et mémoire de l'Académie des Sciences;* Technique et documentation

**[BU 1861]**
*Biographie universelle*; Paris; éd. Michaud

**[Butt, A. - Corradi, M. 1982]**
The contribution of a 17th century mathematician to an architectural problem: Philippe de la Hire and statics of arches; *Atti-della-Accademia-di-Scienze-e-lettere*; 38, pp.303-323

**[CEHPMS 1994]**
*Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*; London & New York; éd. Grattan, I.

**[Chasles, M. 1837]**
*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie*; Bruxelles

**[Collins, J. 1676]**
Compte rendu sur la Nouvelle méthode de La Hire; *Philosophical Transactions*; t.11, n° 129, p.745-46

**[Coolidge, J.L. 1945]**
*History of Geometrical Methods*

**[Coolidge, J.L. 1945a]**
*A History of the conic sections and quadric surfaces*

**[Daffos-Diogo, H. 1987]**
Philippe de La Hire (1640-1718) précurseur de l'ergonomie; *Histoire des Sciences Médicales*; Vol. 21, No. 2 pp. 37-43

**[Daumas, M. 1964]**
*Histoire générale des techniques*; Paris

**[DB 1958]**
*Dictionnaire des biographies*; Paris; éd. Grimal, P.

**[DCBH 1872]**
*Dictionnaire critique de biographie et d'histoire*; pp. 730-731; Paris; éd. Jal, A.

**[Delambre, J.B. 1821]**
*Histoire de l'astronomie moderne*; Paris

**[Desargues, G. 1636]**
*Exemple de l’une des manieres universelles du S.G.D.L touchant de la pratique de la perspective sans enployer aucun tiers point …*, Paris

**[Desargues, G. 1639]**
*Brouillon project d'une Atteinte aux evenements des rencontres du cone avec un plan par L,S,G,D,L*; Paris

**[Desargues, G. 1640]**
*Brouillon projet d'exemple d'une manière universelle du S. G. D. L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'architecture*; Paris

**[Desargues, G. 1640a]**
*Brouillon project du S.G.D.L. touchant une manière universelle de poser le style & tracer les lignes d'un Quadran aux rayons du Soleil …* ; Paris

**[Descartes, R 1659-1661]**
*Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita*; Amsterodami

**[Descombres, R. 2000]**
*Les carrés magiques*; Paris-Vuibert

**[D'Hollander, R. 1999]**
*L'Astrolabe: Histoire, théorie et pratique*; Paris 1999; 383 p.

**[Dhombres, J. 1994]**
La culture mathématique au temps de la formation de Desargues; in [Dhombres, J. – Sakarovitch, J. 1994], pp. 55-86

**[Dhombres, J. – Sakarovitch, J. 1994]**
*Desargues en son temps*, éd. par Dhombres, J. et Sakarovitch, J.; Paris: Blanchar

**[DSB 1970-90]**
*Dictionary of scientific biography*; New York; éd. Gillispie, CH. C.

**[Euclid 1956]**
*The Elements*; Trad. angl. et comm. T. L. Heath. 2nd édition; New York, Dover Pub., 3 vol.

**[Fermat, P. 1891-1896]**
*Oeuvres de Fermat*; 3 vol.; publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry; Paris

**[Field, J.V. 1987]**
*The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*; Oxford University Press, Oxford

**[Field, J.V. 1988]**
*Perspective and the Mathematicians: Alberti to Desargues; Mathematics from Manuscript to Print 1300-1600*; p. 236-263; Oxford

**[Field, J.V. – Gray, J. 1987]**
*The geometrical work of Girard Desargues*; Springer Verlag, New York

**[Fontenelle, B. 1719]**
*Histoire de l'Accademie Royale des sciences pour l'année 1718*; Paris

**[Galilei, G. 1954]**
*Dialogues Concerning Two New Sciences*; New York; tr. Henry Crew

**[Galilei, G. 1638]**
*Discorsi e Dimonstrazioni matematiche intorno a due nuoue scienze attenente alla Mecanica & i Movimenti locali*; Leida

**[Gascoigne, R.M. 1984]**
*A Historical Catalogue of Scientists and Scientific Books*; New York - London

**[Gauja, P. 1934]**
*L'Accadémie des sciences et l'Institut de France*; Paris

**[Gemma Frisius, R. 1556]**
*De Astrolabio catholico liber*, Anvers

**[Godin, M. 1729-1734]**
*Table alphabétique des matières contenues dans l'histoire et les mémoires de l'Académie royale des sciences*; vol. I-III

**[Goujet, C.P. 1758]**
*Mémoire Historique et Littéraire sur le Collège Royal de France*; Paris

**[Guipaud, Ch. 1991]**
Les six livres de perspective de Guidobaldo del Monte; *Destin de l'art, desseins de la science*; p. 255-275; A.D.E.R.H.E.M.

**[Heath, T. 1921]**
A History of Greek Mathematics; 2 vol.; Oxford

**[Hogendijk, J.P. 1991]**
Desargues' Brouillon Project and the Conics of Apollonius; *Centaurus*; 34, P. 1-43

**[Jullien, V. 1996]**
*Eléments de géometrie de G. P. Roberval*; Vrin

**[Kemp, M. 1990]**
*The Science of Art: Optical Themas in Western Art fron Brunelleschi to Seurat*; Yale University Press, New Haven and London

**[Kline, M. 1972]**
*Mathematical thought from ancient to modern times*; New York - Oxford

**[La Hire, Ph. de 1672]**
*Observations sur les points d'attouchement de trois lignes droites qui touchent la section d'un cône*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1673]**
*Nouvelle méthode en géometrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1674]**
*Les Planiconiques*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1676]**
*De cycloide lemma*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1679]**
*Nouveaux éléments des sections coniques, Les lieux géometriques, La construction ou effection des équations*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1680]**
Maniere universelle pour faire des Cadrans Solaires; *Journal des sçavants*; p. 191

**[La Hire, Ph. de 1682]**
*La gnomonique, ou méthodes universelles pour tracer des horloges solaires ou cadrans sur toutes sortes de surfaces.*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1685]**
*Sectiones conicae in novem libros distributae*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1689]**
*L'école des arpenteurs, où l'on enseigne toutes les pratiques de géométrie qui sont nécessaires à un arpenteur*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1694]**
Traité des épicycloïdes; *Mémoires de mathématique et de physique*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1695]**
*Mécanique*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1700]**
Méthode generale pour les jets des Bombes dans toutes sortes de cas proposés avec un instrument universel qui sert à cet usage; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 24. juillet, p. 199

**[La Hire, Ph. de 1700a]**
Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant données, trouver la superficie ou l'aire; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 6. mars, p. 74

**[La Hire, Ph. de 1701]**
Construction d'un nouvel astrolabe universel; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 3. decembre, p. 257

**[La Hire, Ph. de 1702]**
*Les constellations Celestes, avec les Etoiles qui y sont comprises, divisées en deux Planisphères*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1702a]**
*Tabulae astronomicae Ludovici Magni jussu et munificentia exratae et in lucem editae etc.*; Paris

**[La Hire, Ph. de 1702b]**
Remarques sur la forme de quelques Arcs dont on se sert dans l'Architecture*; Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 24. mars, p. 100

**[La Hire, Ph. de 1704]**
Construction generale des lieux ou sont les sommets de tous les angles égaux droits, aigus ou obtus, qui sont formés par les touchantes des Sections Coniques*; Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 2. août, p. 220

**[La Hire, Ph. de 1708]**
Méthode pour décrir de gands arcs des Sections coniques, sans avoir leur centre ni la grandeur d'aucun diametre; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 4. aout, p. 289

**[La Hire, Ph. de 1712]**
Sur la construction des voutes dans les edifices; *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*; 27. fevrier, p. 70

**[Lanier, D.-Le Goff, J.P. 1989]**
L'heritage Arguesien; *Cahiers de la perspective*, IREM de Basse-Normandie, Caen, Mars 89

**[Le Goff, J.P. 1993]**
Un auteur méconnu et une œuvre oubliée : Jacques-François Le Poivre (1652 ?-1710) , & son Traité des Sections du Cone…, Mons, 1708, *Cahiers de la perspective*, IREM de Basse-Normandie, Caen, n°6, juin 1993.

**[Le Goff, J.P. 1994]**
Desargues et la naissance de la géométrie projective, in [Dhombres, J. – Sakarovitch, J. 1994], pp. 157-206

**[Legrand, J.P. 1990]**
On the climatic changes and the sunspot activity during the XVIIth century; *Anales Geophysicae*; Vol.8 N 10 pp. 637

**[Lehman, R. 1887-88]**
De La Hire und seine Sectiones Conicae; *Jahresberichte des königlichen Gymnasiums zu Leipzig*; pp. 1-28

**[Lemonnier, H. 1911-15]**
*Procès-verbaux de l'Académie royale d'architecture*; II-IV; Paris; éd. Lemonnier, H.

**[Le Poivre, J.F. 1704]**
*Traité des sections du cylindre et du cône considérés dans le solide et dans le plan ..*; Paris

**[Le Poivre, J.F. 1708]**
*Traité des sections du cône considérées dans le solide, avec des démonstrations simples et nouvelles, plus simples et plus générales que celles de l'édition de Paris*, Mons

**[L'Hospital, G. de 1707]**
*Traité des sections coniques*; Paris

**[Loria, G. 1929]**
*Storia delle matematiche*, Torino

**[Mariotte, E. 1686]**
*Traité du mouement des eaux et des autres corps fluides*; tr. La Hire, Philippe

**[Maurolico, F. 1575]**
*Opuscula mathematica, nunc primum in lucem edita...*; Venetiis : apud F. Franciscium Senensem

**[Montaiglon A. 1875]**
*Procès-verbaux de l'Académie royale de peinture et de sculpture, 1648-1792*; Paris

**[Monte, G. dal 1600]**
*Perspectivae libri sex*

**[Mydorge, C. 1631-39]**
*Prodromi catoptricum et dioptricum sive conicorum operis ad abdita rodii reflexi et refracti mysteria et facem praeferentis libri primus et secundus*; Paris

**[NBG 1859]**
*Nouvelle biographie générale*; Paris; éd. Hoefer, F.

**[Newton, I. 1711]**
*Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias, cum enumeratione linearum tertii ordinis*; In-4, 101 p.; Londini : ex officina Pearsoniana, 1711

**[Pappus 1982]**
*La collection mathématique*; éd. Ver Eecke, P.

**[Pappus 1986]**
*Book 7 of the Collection*; Springer; tr. Alexander Jones

**[Pascal, B. 1963]**
*Oeuvres complètes de Pascal*; Paris; éd. Lafuma, Luis

**[Pequet, E. 1995]**
*Jacques-François Le Poivre, Mathématicien – Géomètre montois, Mons, 11 février 1652 – Mons, 6 décembre 1710.* paru dans le catalogue de l'exposition qui a eu lieu à l'Université de Mons-Hainaut, resource internet: http://members.nbci.com/pequet/chst/lepoivre.htm

**[Picard, J. 1684]**
*Traité du nivellement et abrégé de la mesure de la terre, mis en lumière par M. de La Hire.*; Paris; éd. La Hire, Philippe de

**[Picolet, G. 1987]**
*Jean Picard et les débuts de l'astronomie de précision au XVIIe siècle*: actes du colloque du tricentenaire (Paris, 12-13 octobre 1982); éd. par Guy Picolet; Paris

**[Poggendorff 1864-1904]**
*Biographish-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der Exacten Wissenschaften*; Leipzig

**[Ponault, M. 1994]**
L'Etude de la perspective dans l'Histoire de Saint-Etienne par Laurent de la Hyre"; in [Dhombres, J. – Sakarovitch, J. 1994]

**[Poncelet, J.V. 1822]**
*Traité des propriétés projectives des figures*; Paris

**[Poudra 1864]**
*Oeuvres de Desargues réunies et analysées*; Paris

**[Rashed, R. 1981]**
Rashed, R. Ibn al-Haytham et la mesure du paraboloïde. *Journal for the History of Arabic Science* 5 (1981), pp. 262-291.

**[Rashed, R. 1986]**
al-Tusi, Sharaf al-Din. *Oeuvres Mathématiques: Algèbre et Géométrie au XIIe siècle.*, ed. R. Rashed, 2 vols. Paris: Les Belles Lettres. 1986.

**[Rashed, R. 1990]**
Rashed, R. A Pioneer in Anaclastics: Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses. *Isis* 81 (1990), pp. 464-491.

**[Rashed, R. 1993]**
Rashed, R., ed. *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècles. Volume 2: Ibn al-Haytham.* London: Al-Furqan Islamic Heritage Foundation, 1993.

**[Rashed, R. 1993a]**
Rashed, R. *Géométrie et Dioptrique au Xe siècle: Ibn Sahl, al-Quhi et Ibn al-Haytham.* Paris: Les Belles Lettres, 1993.

**[Rashed, R. 1996]**
*Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècles. Volume 1: Fondateurs et commentateurs.* London: Al-Furqan Islamic Heritage Foundation

**[Rashed, R. - Morelon, R. 1997]**
Rashed, R., ed., *Encyclopaedia of the History of Arabic Sciences.* London: Routledge, 1997. Volume 1: Astronomy - Theoretical and Applied, Volume 2: Mathematics and Physical Sciences, Volume 3: Technology, Alchemy and Life Sciences.

**[Rosenberg, P. - Thuillier, J. 1988]**
*Laurent de La Hyre, 1606-1656, L'homme et l'oeuvre*; Genève

**[Royas, J. 1551]**
*Commentarium in astrolabium*, Lutetiae

**[Russo, F. 1955]**
*Eléments de Bibliographie de l'histoire des sciences et des techniques*; Hermann

**[Sakarovitch, J. 1998]**
*Epures d'architecture: de la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVIe-XIXe siècles*, Basel: Birkhauser, 427 p.

**[Sancte Vincentio, G. a 1647]**
*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*; Antverpiae

**[Sancte Vincentio, G. a 1668]**
*Opus geometricum posthumum ad mesolabium per rationum proportionalium novas proprietates*; Gandavi

**[Sédillot, L.A. 1869]**
Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France; *Bullettino di bibliographia e di storia delle scienze matematiche et fisiche*; 2, pp. 198

**[Serlio, S. 1545]**
*Libro primo d'Architettura*, Bolognese

**[Sharma, V.N. 1990]**
Zij-i Muhamad Shahi and the tables of de la Hire; *Indian Journal of History of Science*; 25, pp.34-44

**[Sturdy, D.J. 1995]**
*Science and social status, the members of the academie des siences, 1666-1750*; The Boydell Press, Woodbridge

**[Sutto, J. P. 1998]**
*Francesco Maurolyco, Mathématicien Italien de la Renaissance*, Thése de doctorat

**[Taton, R. 1949]**
La préhistoire de la géométrie moderne; *Revue d'histoire des sciences*; t. 2, pp.197-224

**[Taton, R. 1951]**
L'œuvre mathématique de Desargues; *Presses universitaires de France*, Paris

**[Taton, R. 1951a]**
La géométrie projective en France de Dsargues à Poncelet; *Les conférences du Palais de la Découverte*

**[Taton, R. 1953]**
La première oeuvre géometrique de Philippe de La Hire; *Revue d'histoire des sciences*; 6, p. 93-111

**[Taton, R. 1955]**
L'essay pour les coniques de Pascal; *Revue d'histoire des sciences*; t. 8, pp.1-18

**[Taton, R. 1965]**
*Les origines de l'Accademie royale des sciences*; Paris

**[Taton, R. 1964]**
*L'œuvre scientifique de Pascal*; Paris

**[Taton, R. 1966]**
*Histoire génerale des sciences*; Paris

**[Taton, R. 1978]**
Initiation de Leibnitz à la géometrie (1672-1676); *Studia leibnitiana supplementa*; vol. XVII, pp. 103-129

**[Van Schooten, F. 1646]**
*De Organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus*; Lugd. Batav.

**[Ventimiglio, R. 1690]**
*Enodationes duodecim problematum*

**[Werner, J. 1522]**
*Super vigintiduobus elementis conicis*; Norimbergae

**[Wieleitner, H. 1913]**
Über die Plani-Coniques von de la Hire; *Archiv für die Geschichte der Naturwisenschaften und der Technik*; 5, pp. 49-55

**[Witt, J. de 1661]**
*Johannis de Witt Elementa curvarum linearum*; Descartes, R., Geometria, Editio secunda; Amsterodami; éd. Schooten, Franciscus

**[Woodsbury, R.S. 1958]**
The First Epicycloidal Gear Teeth; *ISIS*; vol.49 pp. 375-377

**[Zeuthen, H.G. 1886]**
*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*; Kopenhagen