NALG 001 Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr
MFF UK
Závěrečná zkouška — verze cvičná
9.1.2013
Doba řešení: 3 hodiny

Přednášející: L. Barto, J. Tůma

Křestní jméno: ________________________ **Příjmení:** ____________________________

Instrukce

– **Neotvírejte dříve než jste k tomu vyzváni dozorem!**

– Test je vytištěn oboustranně. Obsahuje 7 příkladů na stranách 2 až 14, strany 15 až 18 jsou volné na pomocné výpočty, apod. Jste odpovědný za to, že kopie zkoušky je úplná.

– Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněné, není-li řečeno jinak.

– Žádné elektronické pomůcky včetně kalkulačky nejsou dovoleny.

Příklad	Body
1 [8]	
2 [8]	
3 [12]	
4 [12]	
5 [12]	
6 [20]	
7 [8]	
DU [20]	
Celkem [100]	
Známka	

(1) [8 bodů] Zakroužkujte správnou odpověď, nezdůvodňujte. K získání bodů je potřeba vždy odpovědět správně všechny tři otázky.

(a) Mějme matici A nad $\mathbb{R}$ typu $m \times n$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{T}^m$.

- **PRAVDA NEPRAVDA** Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je vždy podprostorem $\mathbf{T}^n$.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ je vždy podprostorem $\mathbf{T}^n$.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ je vždy podprostorem $\mathbf{T}^m$.

(b)
- **PRAVDA NEPRAVDA** Existuje lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, které je na.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Existuje lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, které je prosté.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Lineární zobrazení f je prosté právě tehdy, když jádro f obsahuje pouze nulový vektor.

(c) Mějme matici A nad $\mathbb{R}$ typu $m \times n$ v odstupňovaném tvaru.

- **PRAVDA NEPRAVDA** Bázové sloupce matice A jsou vždy lineárně nezávislé.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Počet bázových sloupců matice A je roven počtu nenulových řádků matice A.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Počet bázových sloupců matice A je roven hodnosti matice A.

(d) Mějme čtvercové matice A, B, C stejného řádu nad stejným tělesem.

- **PRAVDA NEPRAVDA** Vždy platí $A(BC) = (AB)C$.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Vždy platí $AB = BA$.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Vždy platí $A(B + C) = AB + AC$.

(2) [8 bodů] Uveďte definici následujících pojmů. Pište pečlivě, celými větami, nikoliv schematicky.

(a) Matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím.

(b) Direktní součet (stačí pro dva podprostory).

(c) Homogenní soustava lineárních rovnic.

(3) [12 bodů] V tomto příkladu nemusíte zdůvodňovat řešení. K plnému počtu bodů stačí správný výsledek.

(a) Napište permutaci $\pi \in S_7$ jako složení transpozic. Permutace π je zadaná tabulkou

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} .$$

(b) Pro soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

určete, které proměnné jsou bázové a které volné (=parametry). (Soustavu neřešte!)

(c) Spočítejte matici homomorfismu $fg : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$ vzhledem ke kanonickým bázím, víte-li

$$[f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [g]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

(d) V prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1 x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

spočítejte normu vektoru $(2, 1)^T$.

(e) Jaká je charakteristika těles $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}_{37}$?

(f) Určete souřadnice vektoru $(1, 2)^T \in \mathbb{Z}_3^2$ vzhledem k bázi $B = ((1, 1)^T, (1, 0)^T)$.

(4) [12 bodů]

(a) Zjistěte, zda vektor $(1,3,2,4)^T$ leží v $\operatorname{Im} A$, kde A je reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

(b) V prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální projekci vektoru $(1, i, 1+i)^T$ na rovinu $\left\langle (1,1,i)^T, (1,2,0)^T \right\rangle$.

(c) Vyjádřete matici A nad $\mathbb{Z}_3$ jako součin elementárních matic.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) [12 bodů]

(a) Zformulujte a dokažte tvrzení o jednoznačnosti opačných prvků a nulového prvku v tělese.

(b) Zformulujte a dokažte tvrzení o dimenzi podprostoru konečně generovaného prostoru (tj. že dimenze je menší nebo rovná a kdy nastává rovnost).

(c) Zformulujte a dokažte tvrzení o ortogonální projekci vektoru na přímku.

(6) [20 bodů]

(a) Čtvercová matice C se nazývá symetrická, pokud $C^T = C$. Předpokládejme, že A, B jsou čtvercové matice stejného řádu nad stejným tělesem. Zjistěte, které z následujících matic jsou vždy symetrické (tj. dokažte, že je matice vždy symetrická, nebo uveďte protipříklad).

$$(i) B^T AB \quad (ii) B^T(A^T + A)B \quad (iii) 2A^T + 2A$$

(b) Najděte co nejjednodušší vyjádření pro $\det\left(\mathbf{v}\mathbf{v}^T\right)$, kde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Existuje reálná matice A taková, že lineární obal řádků A je

$$\left\langle (1,2,3,4,5)^T, (4,4,0,-1,3)^T, (5,1,2,3,7)^T \right\rangle$$

a jádro A je $\left\langle (\pi,1,2,0,3)^T, (3,1,0,2,3)^T \right\rangle$?

(d) Pro každé přirozené číslo n najděte vektorový prostor V a vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_7 \in V$ takové, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_7)$ je lineárně závislá, ale každá 6-členná podposloupnost je lineárně nezávislá.

(e) V prostoru V nad komplexními čísly se skalárním součinem $\langle \, | \, \rangle$ je dána ortogonální báze $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a vektor $\mathbf{w}$. Dále víme $\|\mathbf{u}\| = 3$, $\|\mathbf{v}\| = 5$, $\langle \mathbf{w} \,|\mathbf{u} \rangle = 1 + i$ a $\langle \mathbf{w} \,|\mathbf{v} \rangle = 2 - 3i$. Určete souřadnice vektoru $\mathbf{w}$ vzhledem k bázi B.

(7) [8 bodů] Zformulujte a dokažte větu o rozvoji determinantu podle sloupce.

.

.

.

.

Konec