Úvod do komplexní analýzy
ZS 2022/23, MFF UK

SADA PŘÍKLADŮ 3

Křivkové integrály

(1) Spočtěte křivkové integrály $\int_\varphi f(z)dz$ pro

a) $f(z) = \Re z$ a φ orientovanou úsečku s krajními body $0,\ 1+\mathbf{i}$

b) $f(z) = \Im z$ a φ je kladně orientovaná horní půlkružnice $|z| = 1,\ \arg z \in [0, \pi]$

c) $f(z) = |z|$ a φ orientovanou úsečku s krajními body $0,\ 2-\mathbf{i}$

d) $f(z) = |z|$ a φ kladně orientovaná pravá půlkružnici $|z| = 1,\ \arg z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

e) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ a φ kladně orientovaný obvod horního polomezikruží mezi kružnicemi $|z| = 1$ a $|z| = 2$

f) $f(z) = \frac{z}{|z|}$ a φ je jako v e)

g) $f(z) = z$ a φ orientovanou úsečku s krajnímy body $0,\ 1+\mathbf{i}$

Řešení 1. **a)** $\frac{1+\mathbf{i}}{2}$, **b)** $-\frac{\pi}{2}$, **c)** $\frac{\sqrt{5}(2-\mathbf{i})}{2}$, **d)** $2\mathbf{i}$, **e)** $\frac{4}{3}$, **f)** 0, **g)** $\mathbf{i}$.

Vektorová pole v $\mathbb{R}^2$ a holomorfní funkce

Připomenutí z kurzu analýzy: Nechť U je oblast v $\mathbb{R}^2$. Vektorovým polem na U rozumíme funkci $\vec{T} = (T_1, T_2) : U \to \mathbb{R}^2$. Je-li $\varphi : [a, b] \to U$ je regulární křivka, tj. po částech spojitě diferencovatelná, pak integrál 2. druhu přes křivku φ z vektorového pole $\vec{T}$ definujeme jako

$$\int_\varphi \vec{T} \cdot d\varphi := \int_a^b \vec{T}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt,$$

kde $\cdot$ značí standardní skalární součin na $\mathbb{R}^2$. Rotace vektorového pole $\vec{T}$ je funkce

$$\operatorname{curl} \vec{T} = \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}$$

a divergence je

$$\operatorname{div} \vec{T} = \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y}.$$

Potenciálem vektorového pole $\vec{T}$ rozumíme funkci u na U takovou, že

$$T_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\ T_2 = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

V daším budeme U chápat i jako oblast v $\mathbb{C}$ (obvyklým způsobem) a komplexní funkci f na U jako funkci dvou reálných proměnných.

(2) Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce jedné komplexní proměnné. Nechť současně $\vec{R} = (\Re f, -\Im f)$ a $\vec{I} = (\Im f, \Re f)$ jsou vektorová pole na $U \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Ukažte, že

$$\Re \int_\varphi f(z)dz = \int_\varphi \vec{R} \cdot d\varphi,\ \Im \int_\varphi f(z)dz = \int_\varphi \vec{I} \cdot d\varphi.$$

(b) Nechť $F : U \to \mathbb{C}$ je potenciál f na U, tj. $F'(z) = f(z)$ pro $z \in U$. Ověřte, že pak

(i) $\Re F$ je potenciál vektorového pole $\vec{R}$ a
(ii) $\Im F$ je potenciál vektorového pole $\vec{I}$.

(c) Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) f je holomorfní na U.
(ii) $\vec{R}$ má nulovou rotaci i divergenci na U.

(iii) $\vec{I}$ má nulovou rotaci i divergenci na U.

(3) Najděte potenciál k následujícím vektorovým polím na $U \subset \mathbb{R}^2$. Případně ukažte, že potenciál neexistuje.

(a) $\vec{T} = (e^x \cos y, -e^x \sin y),\ U = \mathbb{R}^2$.
(b) $\vec{T} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right),\ U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
(c) $\vec{T} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),\ U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Řešení 3. (**a**) $u(x,y) = e^x \cos y$, (**b**) $u(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}$, (**c**) potenciál neexistuje, neboť křivkový integrál přes jednotkovou kružnici se nerovná nule.