Řešení dú
9. sada

3) Spočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\int_S (z-R)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je kladně orientovaná horní půlsféra $x^2+y^2+z^2=2Rz,\ R\leq z\leq 2R, R>0$, orientovaná normálou ven.

Řešení. *Předně můžeme upravit rovnici plochy na*

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2,\ R\leq z\leq 2R.$$

Jedná se tedy o horní část půlsféry se středem v $(0,0,R)$ *a poloměrem* $R>0$ *s danou "standardní"orientací. Uvažujme parametrizaci*

$$\varphi(u,v)=(u+a,v+a,R+\sqrt{R^2-u^2-v^2}),\ u^2+v^2\leq R^2.$$

Pak máme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=(1,0,*)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=(0,1,*)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}=(*,*,1),$$

kde $*$ *značí výrazy, které nemají vliv na hodnotu integrálu. Pak platí*

$$\begin{aligned}\int_S (z-R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\int_{u^2+v^2\leq R^2}(R^2-u^2-v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &\quad \left|\ u=r\cos\theta,\ v=r\sin\theta\ \right|\\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi}(R^2-r^2)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\int_0^R(R^2-r^2)r\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\left[R^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^R\\ &= \frac{\pi R^4}{2}.\end{aligned}$$