

Řešení dú
7. sada

5.e) Spočtete integrál

$$\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2},$$

kde C je kladně orientovaná¹ kružnice o poloměru $a > 0$ v \mathbb{R}^2 se středem v 0.

Řešení. Při parametrizaci kružnice $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, dostaneme

$$\varphi'(t) = (-a \sin t, a \cos t),$$

$$T(\varphi(t)) = \frac{(a \cos t + a \sin t, -a \cos t + a \sin t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}$$

$$\begin{aligned} T(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) &= (-\sin t \cos t - \sin^2 t - \cos^2 t - \cos t \sin t) \\ &= -(1 + \sin 2t) \end{aligned}$$

$$\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} = - \int_0^{2\pi} (1 + \sin 2t) dt = -2\pi.$$

¹Obíháme proti směru hodinových ručiček.