Řešení dú
4. sada

5.e) Najděte obsah tělesa omezeného plochami
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},\ a,b,c>0$$

Řešení. *Budeme počítat obsah tělesa*
$$M=\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<\frac{z^2}{c^2},\ z>0\}.$$
Nejprve zvolme nové souřadnice na $\mathbb{R}^3$
$$u=\frac{x}{a},\ v=\frac{y}{b},\ w=\frac{z}{c},$$
spolu se zobrazením $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \Phi(u,v,w)=(au,bv,cw)$. *Pak platí*
$$\Phi^{-1}(M)=\{(u,v,w):u^2+v^2+w^2<1,\ u^2+v^2<w^2,\ w>0\}.$$
Dále jakobián zobrazení Φ *je* abc. *Tudíž z věty o substituci pro vícerozměrný integrál se objem* M *dá spočíst jako*
$$\int\int\int_{u^2+v^2+w^2<1,\ u^2+v^2<w^2} abc\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{1}$$
Integrál (1) spočteme zvlášť v polárních a v kartézských souřadnicích.

1. postup. Zavedeme polární souřadnice:
$$\begin{aligned} u&=r\cos\varphi\sin\theta,\\ v&=r\sin\varphi\sin\theta,\\ w&=r\cos\theta,\end{aligned}$$
kde $r>0,\ \theta\in(0,\pi),\ \varphi\in(-\pi,\pi)$. *Jakobián polárních souřadnic vyjde* $r^2\sin\theta$ *a integrál (1) přejde na*
$$\begin{aligned} abc\int_0^1\int_0^{\pi/4}\int_{-\pi}^{\pi} & r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\\ &=2\pi abc\int_0^1\int_0^{\pi/4} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\\ &=2\pi abc\int_0^1 r^2[-\cos\theta]_0^{\pi/4}\mathrm{d}r\\ &=2\pi abc(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\\ &=\frac{2}{3}\pi abc(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\\ &=2\pi abc\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

2. postup. Platí

$$u^2+v^2+w^2=1,\ u^2+v^2=w^2 \Leftrightarrow$$
$$2w^2=1 \Leftrightarrow w=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Odsud plyne, že projekce množiny $\Phi^{-1}(M)$ *vzhledem k* $(u,v,w)\mapsto(u,v)$ *je* $\{(u,v):\ u^2+v^2<\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. *Pak integrál (1) se dá počítat jako*

$$\begin{aligned}
&abc\int\int_{u^2+v^2<1/2}\int_{\sqrt{u^2+v^2}}^{\sqrt{1-u^2-v^2}} 1\mathrm{d}w\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&\quad= abc\int\int_{u^2+v^2<1/2}(\sqrt{1-u^2-v^2}-\sqrt{u^2+v^2})\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&\quad\left|u=r\cos\varphi,\ v=r\sin\varphi\right|\\
&\quad= abc\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(\sqrt{1-r^2}-\sqrt{r^2})r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\
&\quad= 2\pi abc\int_0^{1/\sqrt{2}}(\sqrt{1-r^2}-r)r\mathrm{d}r\\
&\quad= 2\pi abc\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]_0^{1/\sqrt{2}}\\
&\quad= 2\pi abc(\frac{1}{3}-\frac{1}{3.2.\sqrt{2}}-\frac{1}{3.2.\sqrt{2}})\\
&\quad= 2\pi abc(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}})\\
&\quad= 2\pi abc\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$