Řešení dú
3. sada

2.f) Pro $\alpha \in \mathbb{N}_0$ rozhodněte o stejnoměrné konvergenci

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^\alpha e^{nx} \tag{1}$$

na $(-\infty,-1]$, $[-1,0]$ a $[0,1]$.

Řešení. *Pro $x>0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0$ platí $\lim\limits_{n\to+\infty} x^\alpha e^{nx} = +\infty$. Na $[0,1]$ tedy řada (1) bodově nekonverguje, neboť zde není splněna nutná podmínka konvergence. Stačí tedy uvažovat první dva intervaly.*

Položme $f_n(x) = x^\alpha e^{nx}$ pro $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Pak $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$ a

$$f_n(0) = \begin{cases} 0, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Pro $\alpha = 0$ je funkce f_n rostoucí na $(-\infty, 0]$. Pro $\alpha > 0$ platí

$$f_n'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{nx} + n e^{nx} x^\alpha = e^{nx} x^{\alpha-1}(\alpha + xn).$$

Tedy $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\alpha}{n}$. Pro α liché je f_n klesající na $(-\infty, -\frac{\alpha}{n})$ a rostoucí na $(-\frac{\alpha}{n}, 0]$. Pro α sudé je naopak f_n rostoucí na $(-\infty, -\frac{\alpha}{n})$ a klesající na $(-\frac{\alpha}{n}, 0]$. Pro $\alpha > 0$ máme

$$\sup_{(-\infty,0]} |f_n| = |f_n(-\frac{\alpha}{n})| = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha e^{-\alpha}$$

Pro $\alpha \geq 2$ tedy platí

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} |x^\alpha e^{nx}| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha} e^{-\alpha} \\ &= \alpha^\alpha e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \\ &\leq \alpha^\alpha e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Z Weierstrassova kritéria tedy plyne, že řada (1) konverguje stejnoměrně na $(-\infty, 0]$ pro $\alpha \geq 2$.

Pro $\alpha = 0$ platí, že součet řady (1) v bodě $x = 0$ je roven $+\infty$, jedná se o součet nekonečně mnoha jedniček. Nicméně jelikož f_n je rostoucí kladná funkce, pak máme

$$\sup_{(-\infty,-\varepsilon]} |f_n| = f_n(-\varepsilon) = e^{-\varepsilon n}, \ \varepsilon > 0.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\varepsilon n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-\varepsilon})^n < +\infty$, pak z Weierstrassova kritéria tedy plyne, že řada (1) konverguje stejnoměrně na $(-\infty, -\varepsilon]$ pro $\alpha = 0$.

Zbývá případ $\alpha = 1$. *Z předchozího víme, že* f_n *je klesající na* $(\infty, -\frac{1}{n})$. *Pro pevně zvolené* $-\varepsilon < 0$ *a* n *dost velké tak, aby* $-\varepsilon < -\frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, *platí*

$$\sup_{(-\infty,-\varepsilon]} |f_n| = |f_n(-\varepsilon)| = \varepsilon e^{-\varepsilon n}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon n} < +\infty$, *z Weierstrassova kritéria máme stejnoměrnou konvergenci řady (1) na* $(-\infty, -\varepsilon]$ *pro* $\alpha = 1$. *Konečně pro* $x < 0$ *máme*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} x e^{nx} &= x \sum_{n=1}^{+\infty} (e^x)^n \\ &= x\left(\frac{1}{1-e^x} - 1\right) \\ &= \frac{xe^x}{1-e^x}.\end{aligned}$$

Platí

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{xe^x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{\frac{1-e^x}{x}} = \frac{e^0}{-1} = -1.$$

Jelikož součet řady v bodě $x = 0$ *je roven nule, pak součet řady není spojitá funkce v nule zleva, řada tedy nemůže konvergovat stejnoměrně na* $[-\varepsilon, 0]$ *pro* $\varepsilon > 0$.

Závěr:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} x^\alpha e^{nx} \rightrightarrows$ *na* $(-\infty, 0]$ *pro* $\alpha \geq 2$,
- $\sum_{n=1}^{+\infty} x^\alpha e^{nx} \rightrightarrows$ *na* $(-\infty, -1]$ *pro* $\alpha \geq 0$,
- $\sum_{n=1}^{+\infty} x^\alpha e^{nx} \not\rightrightarrows$ *na* $[-1, 0]$ *pro* $\alpha = 0, 1$.
- *na* $[0, 1]$ *řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} x^\alpha e^{nx}$ *nekonverguje ani bodově pro žádné* $\alpha \in \mathbb{N}_0$