Řešení dú
2. sada

2.f)

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}, \; x > 0.$$

na $(0, \varepsilon)$ a $(\varepsilon, +\infty)$ pro $\varepsilon > 0$.

Řešení. *Pro $x > 0$ zřejmě platí*

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} = 0,$$

neboť víme, že $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ a pak stačí použít Heineho větu.

Nyní uvažujme $(0, \varepsilon)$. Už víme, že $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$. Dále platí, že $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = n$ a $f_n > 0$ na $(n, +\infty)$ a naopak $f_n < 0$ na $(0, n)$. Máme

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{1}{n} \ln \frac{x}{n} + \frac{x}{n} \frac{1}{\frac{x}{n}} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left(\ln \frac{x}{n} + 1 \right). \end{aligned}$$

Tudíž $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{n} = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{n}{e}$. Pak nutně f_n je klesající na $(0, \frac{n}{e})$ a rostoucí na $(\frac{n}{e}, +\infty)$. Pro $n > e\varepsilon$ pak platí

$$\begin{aligned} \sup_{(0,\varepsilon)} |f_n(x) - 0| &= \sup_{(0,\varepsilon)} |f_n(x)| \\ &= |f_n(\varepsilon)| = -\frac{\varepsilon}{n} \ln \frac{\varepsilon}{n} \to 0, \; n \to +\infty. \end{aligned}$$

Pak ale $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0, \varepsilon)$.

Na $(\varepsilon, +\infty)$ platí

$$\sup_{(\varepsilon,+\infty)} |f_n(x) - 0| = \sup_{(0,\varepsilon)} |f_n(x)| = +\infty,$$

neboť zřejmě $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Tudíž f_n nemůže konvergovat stejnoměrně na $(\varepsilon, +\infty)$.