2. zápočtový test

(1) (6 bodů) Najděte definiční obor a najděte explicitní předpis pro integrál závislý na parametru

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} \mathrm{d}x.$$

Řešení. *Položme* $f(x,a) = \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}$. *Pak* f *je spojitá na* $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ *a platí*

$$\lim_{x\to 0^+} f(a,x) = 0, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(a,x) = \begin{cases} 0, & a \geq -1 \\ -\infty, & a < -1. \end{cases}$$

Tudíž integrál konverguje na pravém okolí nuly a stačí probrat konvergenci na okolí nekonečna. Dále vidíme, že $f(-1,x) \cong -1/x,\ x \to +\infty$ *a že pro* $a > -1$ *platí odhad*

$$|f(a,x)| \leq g(x) := \frac{1}{xe^x} + e^{-(\varepsilon+1)x^2}$$

pro $x \geq 1$ *a* $a \geq \varepsilon > -1$. *Funkce* $g(x)$ *je integrovatelná majoranta k funkci* $f(x,a)$ *pro* $x \in [1,+\infty)$; $a \geq \varepsilon$. *Jelikož* $(-1,+\infty) = \bigcup_{\varepsilon>-1}[\varepsilon,+\infty)$, *pak platí, že* $D_\varphi = \{a :\ a > -1\}$ *a že* φ *je zde spojitá (z věty o spojitosti integrálu závislého na parametru).*

Dále

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = xe^{-(a+1)x^2}$$

je spojitá na $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ *a integrovatelná vzhledem k* x *na* $(0,+\infty)$ *pro* $a > -1$ *s integrovatelnou majorantou*

$$h(x) = xe^{-(\varepsilon+1)x^2} \tag{1}$$

pro $a \geq \varepsilon > -1$. *Tudíž věty o derivaci integrálu závislého na parametru pro* $a \geq \varepsilon$ *platí*

$$\varphi'(a) = \int_0^{+\infty} xe^{-(a+1)x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-(a+1)x^2}}{2(a+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2(a+1)}.$$

Pak nutně

$$\varphi(a) = \frac{1}{2}\ln(a+1) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Jelikož evidentně platí $\varphi(0) = 0$, *pak* $c = 0$. *Jelikož znovu* $(-1,+\infty) = \bigcup_{\varepsilon>-1}[\varepsilon,+\infty)$, *pak* $\varphi(a) = \frac{1}{2}\ln(a+1)$ *na* $(-1,+\infty)$.

(2) (3 bodů)

Řešení. *Spočtěte délku* $\ell(c)$ *cykloidy*

$$c(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))\,,\ \ t \in [0, 2\pi],\ \ a > 0.$$

Platí

$$\begin{aligned} c'(t) &= (a - a\cos t, a\sin t) \\ \|c'(t)\| &= \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2a \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}|\,\mathrm{d}t \\ &= 4a \int_0^{\pi} |\sin \frac{t}{2}|\,\mathrm{d}t \\ &= 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 8a \left[-\cos \frac{t}{2}\right]_0^{\pi} \\ &= 8a. \end{aligned}$$