15.11.

1. zápočtový test

(1) (4 body) Najděte lokální extrémy funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^A ((y')^2 + 2y'y - y^2)\mathrm{d}x,$$

pro
(a) $y(0) = 1,\ y(A) = 1,\ A = \frac{\pi}{2}$,
(b) $y(0) = 0,\ y(A) = 0,\ A = 2\pi$.

Řešení. *Máme* $f(x, y, z) = z^2 + 2zy - y^2 \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi] \times \mathbb{R}^2)$ *a*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2z - 2y,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2y.$$

Euler-Lagrangeova rovnice je tudíž

$$\begin{aligned} 0 &= 2y' - 2y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(2y' + 2y\big) \\ &= 2y' - 2y - 2y'' - 2y' \\ &= -2y'' - 2y. \end{aligned}$$

Tudíž $y'' = -y$. *Jedná se o rovnici druhého řadu s konstatními koeficienty. Standardním postupem najdeme, že každé řešení je tvaru* $y_o(x) = A\cos x + B\sin x,\ A, B \in \mathbb{R}$. *Z okrajových podmínek dostaneme*

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A, \\ 1 &= y(\frac{\pi}{2}) = B. \end{aligned}$$

Pro (a) máme tedy jediný kritický bod funkcionálu $y_o(x) = \sin x + \cos x$. *Pro (b) máme nekonečně mnoho kritických bodů* $y_o(x) = C\sin x,\ C \in \mathbb{R}$.

Zkusíme použít Jacobiho rovnici. Dostaneme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2,\ P := \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2.$$

Tudíž pro (a) i (b) je $P = 2,\ Q = -2$ *je Jacobiho rovnice tvaru*

$$-(2h')' - 2h = 0.$$

Pro případ (a) konjugovaný bod neexistuje uvnitř $(0, \frac{\pi}{2}]$, *tudíž* y_0 *je lokální minimum, neboť* $P > 0$ *a* f *je* $\mathcal{C}^3$. *Pro případ (b) je konjugovaný bod* $x = \pi$, *tudíž* y_o *není lokální extrém.*

(2) (5 bodů) Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady

(1)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-(x-n)^2}}{n+x}$$

na $[0, K]$, $K > 0$ a na $[0, +\infty)$.

Řešení. *Položme* $f_n(x) = \frac{e^{-(x-n)^2}}{n+x}$ *pro* $x \geq 0$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Zřejmě* $f_n > 0$ *na* $[0, +\infty)$ *a* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{0_+}{+\infty} = 0$. *Pak*

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{e^{-(x-n)^2}(-2(x-n)(n+x)-1)}{(n+x)^2} \\ &= \frac{e^{-(x-n)^2}(-2(x^2-n^2)-1)}{(n+x)^2}. \end{aligned}$$

Tudíž $f_n'(x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n^2 = n^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_n = \sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}$. *Dále* f_n *je rostoucí na* $[0, x_n)$ *a klesající na* $(x_n, +\infty)$. *Pro* $K > 0$ *pevné a* $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_{n_0} \geq K$ *tedy platí, že* f_n *je rostoucí na* $[0, K]$ *pro* $n \geq n_0$. *Tudíž pro taková* n *platí odhad*

$$\sup_{[0,K]} |f_n(x)| = f_n(K) = \frac{e^{-(K-n)^2}}{K+n}.$$

Dále řada

(2)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-(K-n)^2}}{K+n}$$

konverguje, neboť $\{\frac{1}{K+n}\}_{n=1}^{+\infty}$ *je monotónní a omezená a řada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(K-n)^2}$$

konverguje z Cauchyho odmocninového kritéria. Konvergence řady (2) tedy plyne z Abelova kritéria. Z Weierstrassova kritéria tedy plyne stejnoměrná kovergence (1) na $[0, K]$, $K > 0$.

Na $[0, +\infty)$ *můžeme použít Dirichletovo kritérium, neboť* $\{\frac{1}{x+n}\}_{n=1}^{+\infty}$ *je monotónní posloupnost funkcí, které konverguje stejnoměrně k nule na* $[0, +\infty)$. *Dále*

(3)
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(x-n)^2} &= \sum_{n\in\mathbb{N};\ n\leq x} e^{-(x-n)^2} + \sum_{n\in\mathbb{N}; n>x} e^{-(x-n)^2} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

V posledním kroku jsme použili, že řada $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2}$ *má nezáporné členy a konvergence plyne třeba z Cauchyho kritéria. Tudíž řada*

$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(x-n)^2}$ má stejnoměrně omezenou posloupnost částečných součtů.