Matematika pro fyziky I
ZS 2022/23, MFF UK
Sada příkladů 9

KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

Plošný integrál 2. druhu.

(1) Spočtěte $\int_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je "vnější strana"kužele $x^2+y^2=z^2$, $0 \le z \le h$.

(2) Spočtěte $\int_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je "vnější strana"sféry $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

(3) ♠ Spočtěte $\int_S (z-R)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $R \le z \le 2R$, orientovaná normálou ven. (1 bod)

(4) Spočtěte $\int_S z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je část plochy $x-y+z=1$, $x, z \ge 0$, $y \le 0$, orientované tak, že s vektorem ve směru kladné osy y svírá ostrý úhel.

(5) Spočtěte $\int_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je část paraboloidu $x^2+y^2+2az=a^2$, $x \le 0$, $y, z \ge 0$, orientovaná tak, že pro normálový vektor $\mathbf{n}$ platí $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} > 0$, $\mathbf{k}$ je vektor ve směru kladné osy y.

(6) Spočtěte $\int_S \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}$, kde S je elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, orientovaný normálou ven.

Řešení: **1**. 0, **2**. $\frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)$, **6**. $4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

Příklad označený ♠ můžete odevzdávat jako domácí úkol do půlnoci ze soboty 7.1. na neděli.

Stokesova a Gauss –Ostrogradského věta

(7) Spočtěte křivkový integrál $\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$, orientovaná kladně vzhledem k vektoru $(1,1,1)$.

(8) Spočtěte křivkový integrál $\int_C (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, kde C je průnik krychle $[0,a]^3$ s rovinou $x+y+z=\frac{3}{2}a$, orientovaný kladně vzhledem k vektoru $(1,1,1)$.

(9) Spočtěte křivkový integrál $\int_C y^2z^2\,\mathrm{d}x + z^2x^2\,\mathrm{d}y + x^2y^2\,\mathrm{d}z$, kde C je elipsa $a(\sin^2 t, 2\sin t\cos t, \cos^2 t)$, $t \in [0, 2\pi]$, orientovaná ve směru rostoucího parametru t.

(10) Pomocí Stokesovy věty dokažte, že $\int_C yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0$ pro libovolnou uzavřenou po částech hladkou křivku.

(11) Spočtěte křivkový integrál $\int_C (x^2-yz)\,\mathrm{d}x + (y^2-xz)\,\mathrm{d}y + (z^2-xy)\,\mathrm{d}z$, kde C je oblouk šroubovice $\widehat{AB}$ $(a\cos t, a\sin t, \frac{h}{2\pi}t)$, $A=(a,0,0)$, $B=(a,0,h)$ tak, že křivku doplníte úsečkou BA na uzavřenou křivku a použijete Stokesovu větu.

(12) Spočtěte $\int_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je vnějšek sféry $x^2+y^2+z^2=a^2$.

(13) Spočtěte $\int_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, kde S je část kuželové plochy $x^2+y^2=z^2$, $0 \le z \le h$, a $\cos\alpha \ldots$ jsou směrové kosiny normály k této ploše.

(14) Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = -u + a\cos v$, $u \ge 0$ a rovinami $x=0$ a $z=0$.

(15) Dokažte Archimédův zákon.

(16) Najděte objem sudu, ohraničeného plochami $z=\pm c, x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v, y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v, z = c\sin u$.

(17) Nechť f a g jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce až do hranice oblasti Ω, která je ohraničená jednoduchou uzavřenou plochou S orientovanou normálou $\mathbf{n}$ ven. Ukažte, že platí:

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega f\Delta g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_S g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S,\ \text{je-li } \Delta f = \Delta g = 0$$

Řešení: **7**. $-\sqrt{3}\pi$, **12**. $12\pi\frac{a^5}{5}$, **13**. $-\frac{\pi}{2}h^4$, **16**. $\frac{2\pi c}{3}(2a^2+b^2)$.