Matematika pro fyziky I
ZS 2022/23, MFF UK
Sada příkladů 7

(1) Parametrizujte epicykloidu, tj. křivku, která vznikne pohybem zvoleného bodu jedné kružnice, kutálející se po jiné pevné kružnici.

(2) Napište v parametrickém tvaru rovnici kružnice, která je průnikem koule a roviny.

(3) Napište parametrický tvar kuželosečky, tj. průniku kužele a roviny a proveďte diskusi.

(4) Parametrizujte křivku, zadanou jako průnik dvou sfér v $\mathbb{R}^3$.

(5) Spočtěte následující křivkové integrály:

(a) $\displaystyle\int_C x^2\,\mathrm{d}s$, kde C je oblouk AB křivky $y = \ln x$, $A = (2, \ln 2)$, $B = (1, 0)$,

(b) $\displaystyle\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\,\mathrm{d}s$, kde C je asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,

(c) $\displaystyle\int_C |y|\,\mathrm{d}s$, kde C je lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

(d) $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$, kde C je obvod trojúhelníka ABC, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, přičemž (A, B, C) je trojice uspořádaná ve smyslu orientace křivky,

(e) ♠ $\displaystyle\int_C \frac{(x + y)\,\mathrm{d}x - (x - y)\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, kde C je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$, přičemž trojice bodů $A = (a, 0)$, $B = (0, a)$, $C = (-a, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky, (1 bod)

(f) $\displaystyle\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde C je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ a trojice bodů $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky.

Řešení: **5.a)** $\frac{1}{3}(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$, **b)** $4a^{\frac{7}{3}}$, **c)** $4a^2(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ **d)** 0, **f)** $-\pi$.

(6) Ukažte, že $\displaystyle\int_C f(x^2 + y^2 + z^2)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)$, kde f je spojitá funkce, je roven nule přes libovolnou uzavřenou křivku C.

Příklad označený ♠ můžete odevzdávat do 20.12. jako domácí úkol.

(7) Spočtěte následující křivkové integrály:

(a) $\displaystyle\int_A^B (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$, kde $A = (-2, -1)$, $B = (3, 0)$,

(b) $\displaystyle\int_A^B \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2}\right)\mathrm{d}x + \left(2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}\right)\mathrm{d}y$, kde $A = (2, 1)$, $B = (1, 2)$ a křivka se nachází uvnitř prvního kvadrantu,

(c) $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, kde $A = (0, 0, a)$, $B = (0, b, 0)$ a křivka prochází mimo počátek.

(8) Vypočtěte hmotnost hmotného oblouku $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in (0, 2\pi)$, je-li jeho lineární hustota $\mu(x, y, x) = k(x^2 + y^2 + z^2)$.

(9) Najděte těžiště homogenního oblouku kružnice o poloměru a, $0 \le \varphi \le 2\alpha$.

(10) Spočtěte gravitační sílu, kterou působí homogenní půlkružnice o poloměru R a hmotnosti M na hmotný bod o hmotnosti m ve svém středu.

Řešení: **7.a)** 62, **b)** $-\frac{15}{4}$, **c)** $|b| - |a|$, **8**. $k\sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3 b^2}{3}\right)$, **9**. $a\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}, \frac{1-\cos 2\alpha}{2\alpha}\right)$, **10**. $2g\frac{mM}{\pi R^2}$.