Matematika pro fyziky I
ZS 2020/21, MFF UK

Sada příkladů 2

Posloupnosti a řady funkcí

Posloupnosti funkcí.

(1) Najděte obor bodové konvergence a hodnotu limity posloupnosti funkcí:

a) $\mathrm{e}^x \frac{\sin x \sin(2x) \dots \sin(nx)}{\sqrt{n}}$ b) $\frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$

c) $\sin(\pi x n)$

Řešení: **a**) $\mathbb{R}; f \equiv 0$, **b**) $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x: & |x| > 1 \ \vee x = 1, \\ 1: & |x| < 1, \\ 0: & x = -1. \end{cases}$, **c**) $\mathbb{Z}$; $f(x) \equiv 0$.

Zde f značí limitní funkci $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

(2) Zjistěte, zda na daných množinách konvergují posloupnosti funkcí stejnoměrně.

a) $x^n - x^{n+1}$, $x \in [0,1]$,

b) $x^n - x^{2n}$, $x \in [0,1]$

c) $\operatorname{arctg}(nx)$, $x \in (0,\infty)$,

d) $\frac{nz}{1+n^2z^2}$ na $\{z \in \mathbb{C}; |z| \le \varepsilon\}$ a $\{z \in \mathbb{C}; |z| \ge \varepsilon\}$, kde $\varepsilon > 0$,

e) $\sin(\pi x^n)$, $x \in [0,1]$,

f) ♠ $\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$ na $(0,\varepsilon)$ a na (ε,∞), kde $\varepsilon > 0$, (1 bod)

g) $\sqrt[n]{1+x^n}$, $x \in [0,\infty)$,

h) $\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}$, $x \in [0,\infty)$.

Řešení: **a**) $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$,

b) $f_n \to 0$ na $[0,1]$, $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $[0,1]$, $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $[0,1)$

c) $f_n \to \frac{\pi}{2}$ na $(0,+\infty)$, $f_n \not\rightrightarrows \frac{\pi}{2}$ na $(0,+\infty)$, $f_n \rightrightarrows \frac{\pi}{2}$ na $[\varepsilon,+\infty)$, $\varepsilon > 0$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \frac{\pi}{2}$ na $(0,+\infty)$

d) $f_n \to 0$ na $\mathbb{C}$, $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le \varepsilon\}$, $f_n \rightrightarrows 0$ na $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \varepsilon\}$, $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

e) $f_n \to 0$ na $[0,\pi]$, $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $[0,1]$, $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$

g) a **h**) $f_n \rightrightarrows f(x)$ na $[0,+\infty]$, $f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [0,1], \\ x & : x > 1. \end{cases}$

(3) Zjistěte, zda jsou následující výroky pravdivé:

a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x$

c) $\lim_{x\to1^-} \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to1^-} x^n$

Řešení: **a**) ano, **b**) ne, **c**) ne.

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat do 1.11. jako domácí úkol.