3. zápočtový test

Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = x^3 e^{-x^2}.$$

(1) Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$.

(2) Funkce x^3 i e^{-x^2} jsou spojité. Funkce f je tedy spojitá.

(3)
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

(4) Funkce f je lichá, není periodická.

(5)
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$
$$f(0) = 0.$$

(6) Platí
$$f'(x) = 3x^2e^{-x^2} - 2x^4e^{-x^2} = x^2(3-2x^2)e^{-x^2}$$
Vidíme, že $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ nebo $x = 0$. Dále f je rostoucí na $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \cup (0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ a klesající na $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$. Jelikož $f > 0$ pro $x > 0$ a $f < 0$ pro $x < 0$, pak f je rostoucí na $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$. Bod $x = 0$ není lokální extrém, neboť f zde mění znaménko. Vidíme, že bod $\sqrt{\frac{3}{2}}$ je bod lokálního i globální maxima , $f(\sqrt{\frac{3}{2}}) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}$, a že $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ je bod lokálního i globálního minima , $f(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = -f(\sqrt{\frac{3}{2}})$. Tudíž obor hodnot f je $H(f) = [-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}]$.

(7) Pro druhou derivaci platí
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2x(3-2x^2)e^{-x^2} + x^2(-4x)e^{-x^2} - 2x^3(3-2x^2)e^{-x^2} \\ &= \big(4x^5 - 14x^3 + 6x\big)e^{-x^2} \\ &= 2x\big(2x^4 - 7x^2 + 3\big)e^{-x^2}. \end{aligned}$$
Kořeny rovnice $2x^4 - 7x^2 + 3 = 0$ jsou všechny druhé odmocniny z
$$\frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3, \\ \frac{1}{2}. \end{cases}$$
Máme celkem pět kandidátu na inflexní body, a to $0, \pm\sqrt{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dále výraz $2y^2 - 7y + 3 > 0$ pro $y \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$ a $2y^2 - 7y + 3 < 0$ pro $y \in (\frac{1}{2}, 3)$. Tudíž
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\sqrt{3}, \infty),$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}).$$
Ze znaménka druhé derivace pak přímo vidíme intervaly, kde je f konvexní a kde je konkávní. Dále všechny body $0, \pm\sqrt{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní. Tečny v inflexních bodech mají rovnice:
$$\begin{aligned} T_{[-\sqrt{3}, -3^{\frac{3}{2}}e^{-3}]} &= -9e^{-3}(x+\sqrt{3}) - 3^{\frac{3}{2}}e^{-3} = -e^{-3}(9x + 12\sqrt{3}) \\ T_{[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -2^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2}}]} &= e^{-\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{\sqrt{2}}) - 2^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{2\sqrt{2}}) \\ T_{[0,0]} &= 0 \\ T_{[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2}}]} &= e^{-\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + 2^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}) \\ T_{[\sqrt{3}, 3^{\frac{3}{2}}e^{-3}]} &= -9e^{-3}(x - \sqrt{3}) + 3^{\frac{3}{2}}e^{-3} = -e^{-3}(9x - 12\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(8) Asymptoty jsme spočetli už v bodě (3). Vidíme, že asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je přímka $y = 0$ (tj. osa x).