Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
Druhá zápočtová písemka

7.12.

Pište pečlivě. Lepení primitivní funkce na celém definičním oboru je za dva bonusové body.

$$\int \frac{\sin x \ \mathrm{d}x}{2+\sin x+\cos x}$$

(6 bodů)

Řešení: Jelikož $2+\sin x+\cos x \geq 0$, přitom rovnost může nastat jen pro $\sin x = \cos x = -1$, což není možné, tak funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}$. Jelikož $R(u,v) = \frac{u}{2+v+u}$ nemá žádnou symetrii, pak nezbývá než volit substituci $y = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi, \pi)$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x \ \mathrm{d}x}{2+\sin x+\cos x} &= \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)} \frac{2y}{(1+y^2)(2+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2})} \\
&= \int \frac{4y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)(2(1+y^2)+2y+(1-y^2))} \\
&= \int \frac{4y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)(y^2+2y+3)}
\end{aligned}$$

Zřejmě $y^2+2y+3 = (y+1)^2+2 > 0$. Nyní najdeme rozklad na parciální zlomky.

$$\begin{aligned}
\frac{4y}{(y^2+1)(y^2+2y+3)} &= \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{Cy+D}{y^2+2y+3} \\
&= \frac{(Ay+B)(y^2+2y+3)+(Cy+D)(y^2+1)}{(y^2+1)(y^2+2y+3)} \\
&= \frac{y^3(A+C)+y^2(2A+B+D)+y(3A+2B+C)+3B+D}{(y^2+1)(y^2+2y+3)}.
\end{aligned}$$

Tudíž řešíme soustavu:

$$\begin{aligned}
A+C &= 0, \\
2A+B+D &= 0, \\
3A+2B+C &= 4, \\
3B+D &= 0,
\end{aligned}$$

Řešením je $A = 1,\ B = 1, C = -1, D = -3$. Stačí tedy spočíst:

$$\int \frac{(y+1)\,\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \arctan y + c_1$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{(y+3)\,\mathrm{d}y}{y^2+2y+3} &= \frac{1}{2}\int \frac{(2y+2)\,\mathrm{d}y}{y^2+2y+3} + 2\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+2y+3} \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2+2y+3) + 2\int \frac{\mathrm{d}y}{(y+1)^2+2} \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2+2y+3) + \int \frac{\mathrm{d}y}{\left(\frac{(y+1)}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \quad \Bigg|\ u = \frac{y+1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2+2y+3) + \sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2+2y+3) + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{y+1}{\sqrt{2}}\right) + c_2.
\end{aligned}$$

Celkově tedy integrál vyjde

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2\frac{x}{2}) + \arctan\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} + 3) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} + 3}\right) + \frac{x}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + 3}\right) + \frac{x}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 2\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 3\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\right) + \frac{x}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + 3\cos^2\frac{x}{2}}\right) + \frac{x}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} + \sin x + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}\right) + \frac{x}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2+\sin x+\cos x}\right) + \frac{x}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + c,\ \ x \in (-\pi,\pi).
\end{aligned}$$

Dále spočteme limity

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi^-} F(x) &= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(1-\sqrt{2}), \\
\lim_{x\to-\pi^+} F(x) &= -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

Tudíž primitivní na $\mathbb{R}$ je tedy tvaru

$$G(x) := \begin{cases} F(x) + kC + c,\ \ x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi) \\ (k+\frac{1}{2})C + c,\ \ x = k\pi \end{cases} \qquad ,$$

kde $k \in \mathbb{Z}, c$ je integrační konstanta a

$$C := \lim_{x \to \pi^-} F(x) - \lim_{x \to -\pi^+} F(x) = \pi(1 - \sqrt{2}).$$